

Modélisation implicite du procédé d'abrasion

Charly Euzenat, Sylvain Lavernhe, Christophe Tournier

▶ **To cite this version:**

Charly Euzenat, Sylvain Lavernhe, Christophe Tournier. Modélisation implicite du procédé d'abrasion. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, 2018, Aix-en-Provence, France. hal-02292469

HAL Id: hal-02292469
https://hal.science/hal-02292469

Submitted on 19 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation implicite du procédé d'abrasion

Charly Euzenat [1], Sylvain Lavernhe [1], Christophe Tournier[1]

[1]LURPA, ENS Cachan, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 94235 Cachan, France.

Résumé

Cet article présente un modèle numérique pour générer des topographies de surfaces d'abrasion. La topographie qui résulte de ces opérations n'est pas seulement le résultat de la coupe, mais aussi du repoussage et de la déformation de la matière. Ainsi, la géométrie n'est pas strictement définie par l'intersection entre les grains et la pièce. La difficulté majeure rencontrée dans la simulation de l'abrasion est la complexité numérique liée au nombre d'interactions. Compte tenu des contraintes numériques et physiques, un modèle géométrique efficace en terme de complexité a été développé. Ce modèle repose sur une formulation implicite du processus d'abrasion. Les caractéristiques d'une surface définie implicitement et les déformations qui sont nativement possibles présentent des avantages quant à simuler le procédé d'abrasion.

Mots-clés : Simulation, Abrasion, Surface implicite

1. Introduction

Les performances des pièces mécaniques à haute valeur ajoutée sont étroitement liées à la qualité des surfaces fonctionnelles. Les opérations de rectification sont couramment utilisées pour améliorer l'état de surface après usinage et pour en maîtriser l'aspect. Dans ce contexte, les possibilités de prédire la géométrie sont souvent limitées à des règles empiriques. Dans ce contexte, la mise au point d'un cadre de simulation efficace et pertinent pour l'abrasion permettrait d'améliorer la qualité de la production. La visualisation des marques micrométriques induites par l'outil est réalisable en conditions de laboratoire [LQLB14]. Les algorithmes développés pour le calcul de la surface d'usinage reposent sur une discrétisation en dexel, voxel ou z-buffer pour effectuer numériquement des opérations booléennes entre l'outil et la pièce. La performance de ces méthodes a été démontrée en utilisant une implémentation parallèle sur des processeurs graphiques [ALTB15]. Néanmoins, ces méthodes ne sont pas directement utilisables pour la simulation de l'abrasion.

D'autre part, la résolution numérique des équations issues de la mécanique des milieux continus pour simuler l'abrasion est très étudiée dans la littérature. Cela permet d'obtenir un ensemble d'équations pour modéliser le comportement de la matière et l'équilibre qui structure la pièce. Le rayage et l'impact d'un seul grain ont été simulés avec succès à l'aide de méthodes numériques basées soit sur des maillages (méthode des éléments finis) [TP09] ou des particules (méthode *SPH*) [LVE*16, TP12]. Les topographies simulées et les efforts mis en jeu correspondent aux résultats des mesures expérimentales. Cependant, compte tenu du temps qu'il faut pour simuler l'interaction entre un grain et un spécimen de quelques millimètres carrés, l'application de ces méthodes mécaniques à une opération d'abrasion complète demeure inaccessible avec des ressources informatiques raisonnables.

En se basant sur les considérations précédentes, une nouvelle approche pour simuler l'abrasion a été développée. La méthode présentée reste une simulation géométrique mais de part sa formulation, tend à traduire le comportement d'équilibre mécanique entre les grains et la matière. Les avantages liés à l'utilisation de la représentation implicite des surfaces sont adaptés pour tenir compte de la complexité des interactions d'abrasion en limitant la complexité de l'algorithme. L'application de ce cadre de simulation est déjà envisageable dans un contexte industriel.

2. Description du procédé d'abrasion

Le processus l'abrasion se caractérise par un enlèvement de matière sous des contraintes générées par des particules abrasives. La géométrie résultante de l'abrasion reste due à des interactions qui ne sont pas maîtrisées localement. Plusieurs hypothèses ont été faites pour décrire ces mécanismes

[KDB11,Gah87]. Des actions mécaniques et chimiques sont responsables de l'enlèvement de matière.

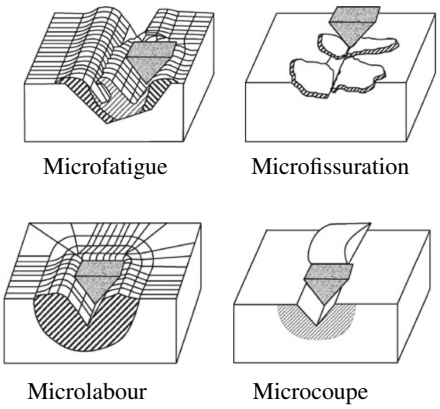


Figure 1: *Mécanismes d'abrasion [KDB11, Gah87]*

Parmi les défauts mécaniques induits, quatre schémas principaux ont été identifiés. Le micro labour est le résultat d'une déformation plastique qui se produit lorsqu'un grain entre en contact avec la surface. Il repousse le matériau qui s'agglomère sur les côtés de la rainure. Ce type de déformation n'induit pas d'enlèvement de matière. La micro fatigue se produit lorsque plusieurs grains passent dans la même zone jusqu'à ce que le matériau se rompe. Les matériaux fragiles comme les céramiques sont plus sujets à la micro fissuration en raison d'une contrainte maximale admissible très limitée. Lors de l'abrasion des aciers trempés, la micro coupe prévaut. Le micro labour se produit lors du polissage des métaux tendres alors que le taux d'enlèvement est faible, contrairement à la micro coupe qui peut être observée lorsque les grains abrasifs ont des arrêtes vives. Le type d'interaction rencontré dépend de l'échantillon, de la topographie abrasive et de la dureté relative. La rugosité et la géométrie de la surface sont affectées par le type de mécanisme d'abrasion.

D'un point de vue empirique, la prédiction de la surface obtenue suite à un processus de finition peut être réalisée grâce à plusieurs modèles. L'un des plus courants pour déterminer le taux d'enlèvement de matière est le modèle Preston [Pre27].

$$\frac{dz}{dt} = K_p.p.v \tag{1}$$

Cette équation reflète le fait que le taux d'enlèvement est lié à la fois à la pression de contact p et à la vitesse relative v. Le coefficient Preston K_p est l'équivalent de l'efficacité de l'outil abrasif. Plusieurs autres lois dérivées du modèle de Preston ont été mises au point pour améliorer la pertinence des prévisions.

Le modèle implicite proposé tend à simuler la *micro coupe* et le *micro labour* dans un modèle géométrique efficace numériquement. Quelque soit le temps de polissage consacré à l'amélioration de l'état de surface, la rugosité converge vers une valeur donnée. Il faut alors changer d'outil pour diminuer la dimension caractéristique des grains de manière à pouvoir poursuivre le polissage vers le niveau de qualité souhaité.

2.1. Approche

La simulation d'abrasion géométrique dont il est question dans cet article nécessite l'utilisation d'une description numérique de la surface [CDH*07]. Deux méthodes principales de représentation des surfaces sont couramment utilisées dans l'infographie : les descriptions paramétriques ou les descriptions implicites. Les surfaces paramétriques sont définies par une évaluation explicite d'une fonction alors que les surfaces implicites sont extraites de données volumétriques. Un déplacement dans le cadre d'une représentation explicite implique de trouver un champ vectoriel de vitesse pour déplacer la surface au cours du temps. Pour être pertinente, la simulation du champ vectoriel de vitesse est souvent liée à un modèle de comportement mécanique. Les équations dynamiques sont intégrées pour calculer une position de la surface en temps réel. Ces méthodes sont la façon numérique la plus proche d'émuler un spécimen dans le cadre d'un processus de fabrication. Cependant, elles impliquent une complexité numérique importante.

Une formulation implicite a été choisie pour surmonter le calcul d'un champ de déformation explicite. Les formulations implicites sont utilisées en infographie pour obtenir des déformations d'objets ou modéliser intuitivement des surfaces [BDS*03]. En effet, les surfaces implicites ont des propriétés de mélange qui permettent d'obtenir des formes complexes à partir de primitives simples [BW90]. L'addition de potentiels implicites conduit à des raccordements lisses entre différentes surfaces. Ces caractéristiques sont adaptées à la modélisation native des géométries rencontrées avec les actions de micro labour ou de micro coupe. De plus, une telle formulation permet de simuler le contact exact entre des objets flexibles et une déformation étendue au-delà de la zone de contact [Gas93]. Cette description numérique offre ainsi des compromis entre efficacité numérique et pertinence de la modélisation.

Une surface implicite est l'ensemble des points qui sont solution d'une équation scalaire. La surface fait partie d'un ensemble de données volumétriques F_t qui contient des valeurs numériques dans le domaine d'étude.

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{X} | F_t(\mathbf{X}) = 0\} \tag{2}$$

$$F_t : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{X} & \longmapsto & F_t(\mathbf{X}) \end{array} \right. \tag{3}$$

L'équation 2 signifie que la surface de l'échantillon est définie là où le champ scalaire est nul. Ainsi, la modification de l'ensemble des données volumétriques F_t conduit à une surface évolutive.

3. Modèle implicite

3.1. Schéma d'interaction

Pendant l'abrasion, la surface libre de la pièce mécanique évolue sous l'action des particules abrasives. Cette évolution a été modélisée par la déformation du champ scalaire F_t plutôt que de suivre explicitement la surface. Ce modèle implicite tient compte du fait que la géométrie est le résultat d'un équilibre entre l'action des particules et la résistance du matériau de l'échantillon. Chaque particule abrasive est modélisée par un champ W tel que défini par l'équation 4, l'action d'enlèvement consiste à soustraire ce champ à celui de l'échantillon. L'équation 5 définit ce schéma d'évolution temporelle où F_t est l'image de la surface au cours du temps. Dans ce contexte, une récurrence conduit à l'équation 6 qui définit l'évolution de F_t depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t.

$$W : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{X} & \longmapsto & W(\mathbf{X}) \end{array} \right. \tag{4}$$

$$F_t(\mathbf{X}) = F_{t-1}(\mathbf{X}) - W_i(\mathbf{X}) \tag{5}$$

$$F_t(\mathbf{X}) = F_{t_0}(\mathbf{X}) - \sum_i W_i(\mathbf{X}) \tag{6}$$

Ce schéma de déformation de surface peut s'exécuter de manière parallèle. Le champ scalaire initial F_{t_0} modélise à la fois la géométrie et le comportement de l'échantillon alors que l'ensemble $\{W_i | i \in [1;n]\}$ tient compte de l'effet de chaque particule abrasive sur la surface.

3.2. Potentiel abrasif

Chaque particule abrasive possède un potentiel scalaire défini W_i qui modélise son effet sur le spécimen. Ce potentiel modifie le champ scalaire associé à la surface via l'équation 6. Une définition pertinente de celui-ci reste nécessaire pour proposer un modèle vraisemblable en ce qui concerne le processus d'abrasion. Une définition analytique de W a été choisie et des contraintes liées au procédé ont conduit à la paramétrisation proposée.

W est la composition de deux fonctions $K \circ D$. D est la fonction qui donne la distance entre le point $\mathbf{X}$ considéré dans l'espace 3D et la trajectoire de la particule abrasive. K est la fonction noyau qui modélise l'action abrasive sur la surface de la pièce.

$$F_{t_0}(z = 0) = 0 \tag{7}$$

$$S_a = \int_S \|z - z_m\| \, ds \tag{8}$$

$$K : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ l & \longmapsto & K(l) \end{array} \right. \tag{9}$$

$$D : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{X} & \longmapsto & D(\mathbf{X}) \end{array} \right. \tag{10}$$

La fonction noyau K a été définie comme la somme de deux noyaux gaussiens. Cette formulation est couramment utilisée en infographie pour construire des surfaces implicites [Bli82, BW90]. Dans le cadre de l'abrasion implicite, une valeur positive conduit à l'enlèvement de matière tandis qu'une valeur négative permet de repousser la matière. Chacun des deux noyaux permet respectivement de traduire les deux comportements précédents. Une forme générique pour la fonction noyau des particules est donnée dans l'équation 11.

$$K(l) = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \exp\left(-\frac{(l - \mu_k)^2}{\sigma_k^2} \right) \tag{11}$$

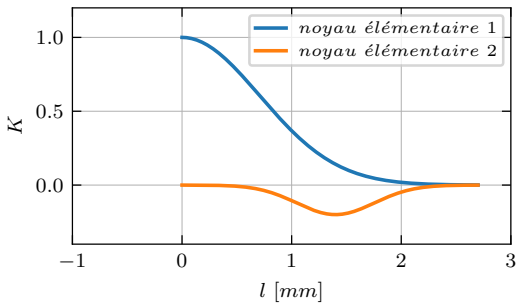


Figure 2: *Noyaux gaussiens*

La représentation graphique correspondante pour les deux fonctions gaussiennes est effectuée dans la figure 2. Cette fonction peut être définie une seule fois pour n'importe quelle particule ou varier en fonction des caractéristiques

propres de chacune. L'interaction de l'abrasion suit les règles générales ci-dessous :

1. L'action est limitée dans l'espace, ce qui signifie que son potentiel doit être zéro loin de son centre.
2. L'influence maximale est rencontrée près du centre de la particule.
3. Chaque particule a un rayon d'influence caractéristique défini par sa taille.
4. L'influence sur la surface diminue avec l'éloignement.

La figure 3 montre une représentation graphique de ces hypothèses. Les quatre points correspondants aux quatre hypothèses précédentes permettent de déterminer la forme générale du potentiel associé à un grain abrasif.

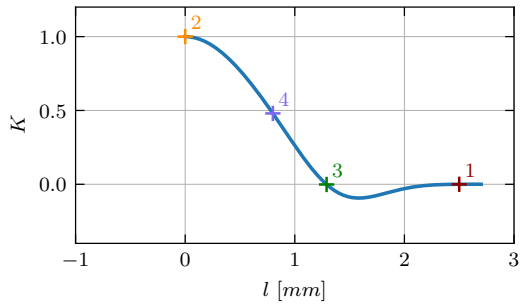


Figure 3: *Contraintes liées au procédé*

α permet de choisir l'intensité du noyau. σ permet de modifier la distance d'influence et représente donc le rayon des particules abrasives. La position du noyau est modifiée avec la définition d'une valeur non nulle pour μ. D'autres paramétrisations pourraient être envisagées. Une écriture polynomiale du noyau conduit à de meilleurs résultats en terme de performance d'exécution [She99] et l'influence à long terme peut être négligée en ne définissant un noyau à support compact que pour des distances proches du centre.

Les deux figures ci-dessous mettent en évidence l'influence de la définition du noyau sur la surface de réponse :

La matière repoussée pendant l'action de micro labour peut être modélisée par la partie négative du noyau entre le point 1 et 3 sur la figure 3. Le rayon du grain a été représenté en noir dans la figure 5. La surface résultante n'est pas la stricte intersection de la particule comme attendu d'une opération booléenne. L'équilibre implicite entre le potentiel de la surface F_t et le noyau des particules conduit à une intersection intermédiaire entre la surface d'origine et le rayon caractéristique de la particule considérée dans cette illustration.

La fonction distance modélise la trajectoire suivie par

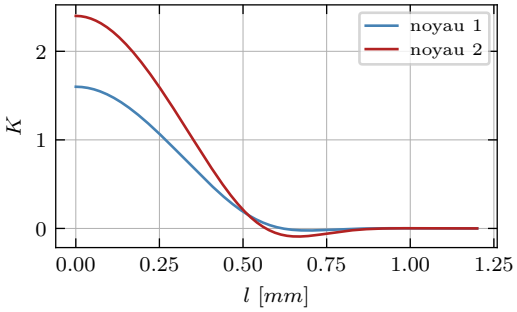


Figure 4: *Exemples de noyaux*

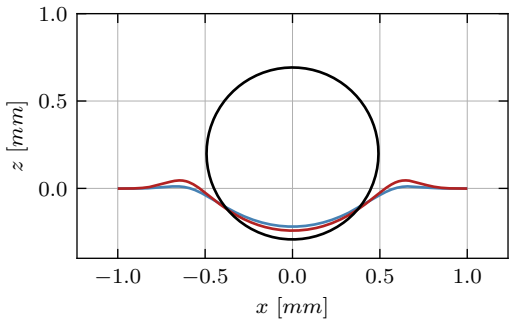


Figure 5: *Vue en coupe des iso-surfaces*

chaque grain. La forme de mouvement peut être soit un impact, une rayure linéaire ou une rectification circulaire suivant la forme de la fonction choisie. Un exemple de rayage linéaire avec un seul grain est présenté dans la figure 6.

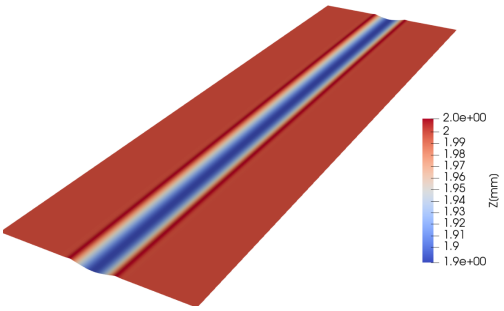


Figure 6: *Rayage linéaire*

La fonction utilisée ici correspond à la distance à une droite. Il faut définir un point de passage et une orientation par grain pour obtenir une rayage linéaire sur l'échantillon.

D'autres fonctions peuvent être envisagées. Il convient néanmoins que la distance puisse être exprimée sous forme de fonction analytique.

3.3. Définition initiale de la surface

La simulation d'abrasion présentée repose sur la définition d'un potentiel initial tel qu'il est défini dans l'équation 6 par le terme F_{t_0}. Ce champ représente la surface brute de l'échantillon avant l'opération d'abrasion. Sa construction est faite à partir de la surface initiale qui est connue avant le début de la simulation. Il s'agit de construire un potentiel dont l'iso-surface de niveau zero représente la pièce brute. Il n'y a pas unicité de ce potentiel, d'autres contraintes doivent donc être imposées. Utiliser un champ de distance signé par rapport à la surface est une technique souvent utilisée pour trouver une solution unique. Cela revient à imposer le gradient du potentiel initial. Or, hormis pour des considérations numériques, le gradient du champ n'a aucune influence sur la géométrie de l'iso-surface initiale. Il peut donc être défini de manière arbitraire. En ce qui concerne la modélisation du procédé d'abrasion, ce degré de liberté supplémentaire permet de prendre en compte les propriétés mécaniques et de décrire à la fois la géométrie de la surface et le comportement du couple outil-matière.

Du point de vue de la performance d'exécution, il est plus adapté de modéliser le comportement mécanique grâce au champ scalaire initial que de faire varier le noyau de chaque particule abrasive au cours du temps. Ceci permet de conserver le parallélisme de la simulation tout en modélisant l'effet d'usure de l'outil.

Le potentiel initial est donné par la fonction suivante :

$$F_{t_0}(\mathbf{X}) = F_{t_0}(z) = \frac{k}{a}(e^{-az} - 1) \tag{12}$$

Le paramètre a permet de tenir compte de la dureté du matériau et de limiter la profondeur d'usure maximale. k influe sur la pente du potentiel aux faibles profondeurs pour modéliser le comportement initial du couple outil-matière.

3.4. Implémentation numérique

L'extraction de surface à partir du champ scalaire défini dans l'équation 2 nécessite l'utilisation d'une discrétisation spatiale. La scène est définie comme une boîte englobante rectangulaire qui est découpée en tranches selon un pas donné. Ceci conduit à générer un ensemble de points répartis de manière régulière dans l'espace de travail. Chaque point contient une valeur du champ scalaire F_t.

Cette discrétisation permet d'utiliser l'algorithme *marching cubes* pour extraire la surface [LC87]. Cet algorithme n'est utilisé qu'à la fin de la simulation pour obtenir la surface finale. Il est possible d'arrêter la simulation en cours pour extraire une surface intermédiaire mais cela pénalisera l'exécution du programme.

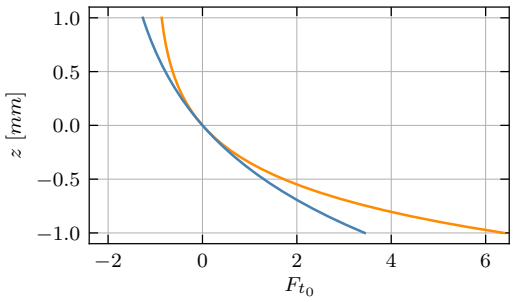


Figure 7: *Potentiel initial de la surface*

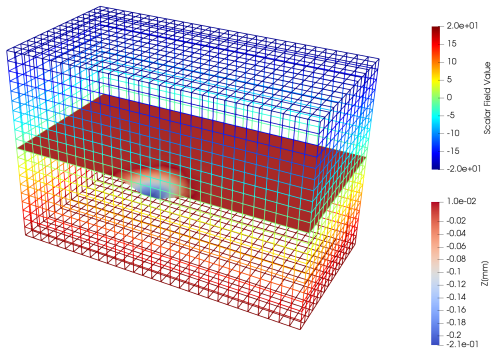


Figure 8: *Discrétisation spatiale*

La discrétisation précédente est le support numérique pour simuler l'équation 6.

Algorithme 1 : Pseudo-code pour la simulation

```
pour pour chaque particule abrasive X_a faire
    pour pour chaque point de la grille X_g faire
        calculer la distance D entre X_g et X_a
        évaluer la valeur K du noyau pour D
        soustraire K à la valeur du champ en X_g
    fin
fin
extraire l'iso-surface
```

Ce schéma numérique permet une simulation et un rendu simple et performant du modèle. L'algorithme est parallèle et peut être implémenté efficacement sur des unités de traitement graphiques.

4. Résultats

Un code de simulation a été implémenté grâce à la bibliothèque logicielle *PyOpencl* [KPL*12]. Cette infrastructure de développement consiste en une interface entre la librairie de calcul parallèle *OpenCl* et le langage de programmation *Python*. Cela permet à la fois d'allier rapidité de développement et performance raisonnable dans un contexte de prototypage. Le procédé de polissage sur polisseuse conventionnelle a donc pu être simulé avec des jeux de données suffisamment pertinents.

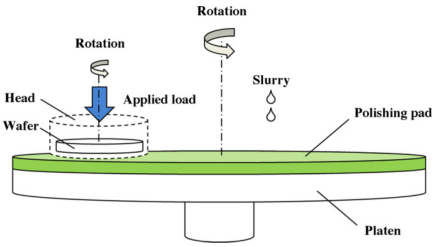


Figure 9: *Polisseuse conventionnelle [OS09]*

L'implémentation parallèle dont il est question pour simuler le polissage est décrite par l'algorithme 2.

Algorithme 2 : Stratégie de parallélisation

Un point de la grille = un processus
pour *pour chaque particule abrasive* $\mathbf{X}_a$ **faire**
  calculer la distance D entre $\mathbf{X}_g$ et $\mathbf{X}_a$
  évaluer la valeur K du noyau pour D
  soustraire K à la valeur du champ en $\mathbf{X}_g$
fin

Dimensions	longueur	largeur	hauteur
Intervalles $[mm]$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$[-0.2,0.04]$
Pas $[mm]$	0.01		
Nombre de points	1010025		

Table 1: *Caractéristiques de l'espace de travail*

Une zone rectangulaire de 2 mm de coté à été isolée. La discrétisation spatiale possède des mailles cubiques de la même manière que dans la figure 8. Les dimensions de cette zone sont données dans la table 1. Vu les dimensions réduites de l'espace de travail, le passage circulaire des grains abrasifs a été approximé par des droites générées à partir des caractéristiques cinématiques de la machine. Le nombre de passage des grains est un paramètre de cette implémentation, ainsi plusieurs simulations représentant des instants différents ont été programmées.

Les paramètres utilisés pour ces simulations sont donnés dans la table 2. La taille de la grille et les paramètres qui définissent les potentiels abrasifs ainsi que la surface ont été fixés. En première approche seule l'influence du nombre de grains a été étudiée.

Paramètres (eq. 11)	$\sigma_1\ [mm]$	$\mu_1\ [mm]$	α_1
Valeurs	0.02	0	0.08
Paramètres (eq. 11)	$\sigma_2\ [mm]$	$\mu_2\ [mm]$	α_2
Valeurs	0.01	0.028	-0.016
Paramètres (eq. 12)	a	k	
Valeurs	100	1	

Table 2: *Paramètres de la simulation*

Ces résultats ont été simulées sur un processeur *Intel i7-4770HQ* :

— Fréquence de base : 2.2 GHz
— Fréquence maximale : 3.4 GHz
— Nombre de cœurs : 4
— Nombre de processus (*threads*) : 8

Ce composant possède un processeur graphique intégré *Intel Iris 5200* :

— Fréquence de base : 200 MHz
— Fréquence de maximale : 2.2 GHz
— Mémoire disponible : 1.5 GB

Essais	Nombre de passages de grains
1	52
2	92
3	182
4	388
5	905
6	1961
7	3645

Table 3: *Descriptions des essais réalisés*

Dans les conditions définies par les tables 1 et 3 le temps de calcul du champ de potentiel final est de 10 ms et le temps d'extraction de la surface par l'algorithme *marching cubes* est de 40 ms. Dans les différents essais réalisés, le nombre de passage des grains n'influe pas sur le temps de calcul dans la mesure où il est très inférieur au nombre de points de la grille spatiale. C'est principalement la mémoire du processeur graphique qui est limitante dans cette implémentation. Un exemple de surface obtenue par cette simulation est donné dans la figure ci-dessous :

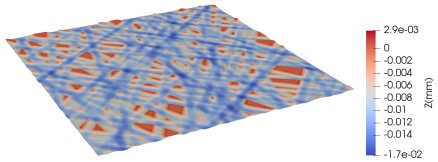


Figure 10: *Rendu de simulation*

La hauteur moyenne de la surface ainsi que la rugosité surfacique S_a *(ISO 25178-2)* sont données en fonction du nombre de passages des grains. Des travaux expérimentaux ont montré que la rugosité de surface S_a lors d'opérations de polissage peut être modélisée par la fonction suivante [GLQT15] :

$$S_a = A.e^{\frac{-t}{\tau}} + B \tag{13}$$

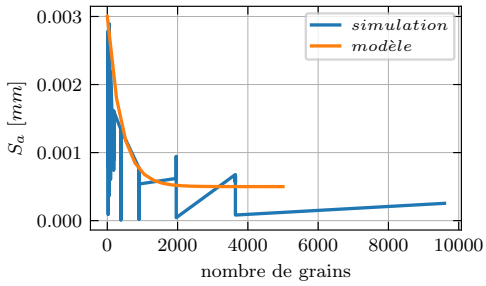


Figure 11: *Rugosité en fonction du nombre de passage de grains*

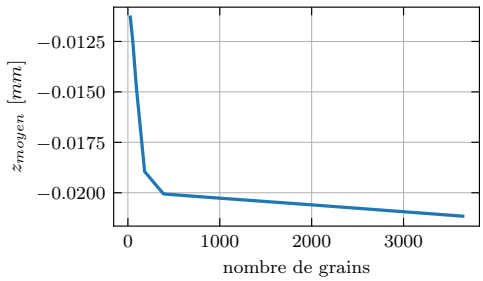


Figure 12: *Hauteur moyenne en fonction du nombre de passage de grains*

La figure 11 présente à la fois les résultats issues de la simulation et le modèle de l'équation 13. L'évolution de l'état de surface en fonction du nombre de grains est comparable dans la forme générale aux résultats expérimentaux qui sont obtenus en mesurant la rugosité en fonction du temps. De même la hauteur moyenne de la surface simulée tend à stagner ce qui est cohérent avec les travaux expérimentaux réalisés sur le modèle de Preston. L'évolution de ces caractéristiques en fonction des paramètres de la simulation reste à mener. Cette étude permettra de régler la simulation en fonction des caractéristiques du matériau et de l'outil abrasif.

5. Conclusion

Un modèle implicite du procédé d'abrasion a été développé pour obtenir des topographies de surface. Une implémentation numérique a permis d'obtenir des résultats préliminaires pertinents. Ce modèle propose une définition géométrique de l'interaction entre les grains et la pièce. Néanmoins les caractéristiques des surfaces implicites et les déformations associées permettent de modéliser nativement les phénomènes physiques observés pendant l'abrasion. Le repoussage de la matière de part et d'autre de la trace laissée ainsi que la diminution du taux d'enlèvement de matière au cours du temps ne nécessite pas de coût de calcul supplémentaire.

Les paramètres qui permettent de déterminer les potentiels associées à la surface et aux grains abrasifs devront par la suite être étudiés quant à leur influence relative sur la surface simulée et ses caractéristiques géométriques. D'autre part les surfaces initiales utilisées dans les simulations présentées jusqu'à lors sont parfaitement planes. La prise en compte de surfaces issues d'une opération d'usinage qui présentent un état de surface rugueux doit être implémentée. Enfin, une implémentation plus performante pour pouvoir simuler des opérations plus complexes sur des pièces réelles reste à mener.

Références

[ALTB15] ABECASSIS F., LAVERNHE S., TOURNIER C., BOUCARD P.-A. : Performance evaluation of CUDA programming for 5-axis machining multi-scale simulation. *Computers in Industry. Vol. 71* (aug 2015), 1–9.

[BDS*03] BARTHE L., DODGSON N. A., SABIN M. A., WYVILL B., GAILDRAT V. : Two-dimensional potential fields for advanced implicit modeling operators. *Computer Graphics Forum. Vol. 22*, Num. 1 (mar 2003), 23–33.

[Bli82] BLINN J. F. : A generalization of algebraic surface drawing. *ACM Trans. Graph.. Vol. 1*, Num. 3 (juillet 1982), 235–256.

[BW90] BLOOMENTHAL J., WYVILL B. : Interactive techniques for implicit modeling. *SIGGRAPH Comput. Graph.. Vol. 24*, Num. 2 (février 1990), 109–116.

[CDH*07] CHEUTET V., DANIEL M., HAHMANN S., LA GRECA R., LÉON J.-C., MACULET R., MÉNEGAUX D., SAUVAGE B. : Constraint Modeling for Curves and

Surfaces in CAGD : A Survey. *International Journal of Shape Modeling. Vol. 13*, Num. 2 (décembre 2007), 159–199.

[Gah87] GAHR K. Z. : Microstructure and wear of materials. vol. 10 de *Tribology Series*. Elsevier, 1987.

[Gas93] GASCUEL M.-P. : An implicit formulation for precise contact modeling between flexible solids. In *Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (New York, NY, USA, 1993), SIGGRAPH '93, ACM, pp. 313–320.

[GLQT15] GRANDGUILLAUME L., LAVERNHE S., QUINSAT Y., TOURNIER C. : Mold manufacturing optimization : A global approach of milling and polishing processes. *Procedia CIRP. Vol. 31* (2015), 13–18.

[KDB11] KLOCKE F., DAMBON O., BEHRENS B. : Analysis of defect mechanisms in polishing of tool steels. *Production Engineering. Vol. 5*, Num. 5 (feb 2011), 475–483.

[KPL*12] KLÖCKNER A., PINTO N., LEE Y., CATANZARO B., IVANOV P., FASIH A. : PyCUDA and PyOpenCL : A Scripting-Based Approach to GPU Run-Time Code Generation. *Parallel Computing. Vol. 38*, Num. 3 (2012), 157–174.

[LC87] LORENSEN W. E., CLINE H. E. : Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. In *Proceedings of the 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (New York, NY, USA, 1987), SIGGRAPH '87, ACM, pp. 163–169.

[LQLB14] LAVERNHE S., QUINSAT Y., LARTIGUE C., BROWN C. : Realistic simulation of surface defects in five-axis milling using the measured geometry of the tool. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. Vol. 74*, Num. 1-4 (jun 2014), 393–401.

[LVE*16] LEROCH S., VARGA M., EDER S., VERNES A., RIPOLL M. R., GANZENMÜLLER G. : Smooth particle hydrodynamics simulation of damage induced by a spherical indenter scratching a viscoplastic material. *International Journal of Solids and Structures. Vol. 81* (mar 2016), 188–202.

[OS09] OH S., SEOK J. : An integrated material removal model for silicon dioxide layers in chemical mechanical polishing processes. *Wear. Vol. 266*, Num. 7-8 (mar 2009), 839–849.

[Pre27] PRESTON F. W. : The theory and design of plate glass polishing machine. *J. soc. Glass technol. Vol. 11* (1927), 214–256.

[She99] SHERSTYUK A. : Kernel functions in convolution surfaces : a comparative analysis. *The Visual Computer. Vol. 15*, Num. 4 (Jul 1999), 171–182.

[TP09] TAKAFFOLI M., PAPINI M. : Finite element analysis of single impacts of angular particles on ductile targets. *Wear. Vol. 267*, Num. 1-4 (jun 2009), 144–151.

[TP12] TAKAFFOLI M., PAPINI M. : Material deformation and removal due to single particle impacts on ductile materials using smoothed particle hydrodynamics. *Wear. Vol. 274-275* (jan 2012), 50–59.