



HAL
open science

Nouvelles conditions LMI de stabilisation non quadratique pour descripteurs flous de type T-S

Tahar Bouarar, Kevin Guelton, Nouredine Manamanni

► **To cite this version:**

Tahar Bouarar, Kevin Guelton, Nouredine Manamanni. Nouvelles conditions LMI de stabilisation non quadratique pour descripteurs flous de type T-S. Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications, Oct 2008, Lens, France. hal-02291461

HAL Id: hal-02291461

<https://hal.science/hal-02291461>

Submitted on 18 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nouvelles conditions LMI de stabilisation non quadratique pour descripteurs flous de type T-S

New non quadratic LMI stabilization for T-S fuzzy descriptors

Tahar Bouarar, Kevin Guelton, Noureddine Manamanni

Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (CReSTIC)
Université de Reims Champagne-Ardenne, Moulin de la Housse BP 1039, 51689 Reims Cedex 2, France
{tahar.bouarar, kevin.guelton, noureddine.manamanni}@univ-reims.fr

Résumé :

Ce papier présente de nouvelles conditions de stabilité pour les systèmes descripteurs de type Takagi-Sugeno (T-S) basés sur la redondance des descripteurs. Ces conditions sont obtenues via une fonction floue de Lyapunov (FLF) et une loi de commande non-Parallel-Distributed-Compensation (non-PDC). Tout d'abord, les conditions de stabilité LMI pour la classe des systèmes considérée sans perturbations externes sont proposées. Ensuite, le problème de synthèse d'un contrôleur H_∞ est traité. Enfin, un exemple numérique illustre l'efficacité des approches proposées.

Mots-clés :

Takagi-Sugeno, descripteurs, LMI, fonction non quadratique de Lyapunov.

Abstract:

This paper presents new stability conditions for Takagi-Sugeno (T-S) descriptor systems based on descriptors redundancy. These conditions are obtained via fuzzy Lyapunov function (FLF) and a non-Parallel-Distributed-Compensation (non-PDC) control law. First, LMI stability conditions for the considered class of systems without external disturbances are proposed. Then, the problem of H_∞ based controller design is treated. Finally, a numerical example is proposed to illustrate the efficiency of the proposed approaches.

Keywords:

Takagi-Sugeno, descriptors, LMI, non quadratic Lyapunov function.

1 Introduction

Les modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) [1] ont montré leurs intérêts théoriques et pratiques puisqu'ils permettent de représenter exactement les systèmes non linéaires affines en la commande par une transformation en secteurs non linéaires [2]. Depuis

l'introduction des modèles T-S, de nombreux travaux basés sur la théorie de Lyapunov traitant la stabilité et la stabilisation ont été proposés. Par exemple, des conditions de stabilité, basées sur une fonction de Lyapunov quadratique (QLF), formulées en termes de LMI ont été proposées dans [2][3]. Celles-ci sont pessimistes puisqu'elles nécessitent la recherche d'une matrice commune pour toutes les contraintes LMI. Une manière de relâcher ces résultats est de considérer un autre type de fonction de Lyapunov. Par exemple, les conditions de stabilité basées sur la fonction de Lyapunov continue par morceaux ont été suggérées par [4][5][6]. D'autre part, des conditions basées sur la fonction floue de Lyapunov (FLF) ont été proposées par [5][7][8][9][10]. Notons que, toutes les approches précédentes concernent une classe des représentations d'états « classiques » des systèmes non linéaires. Une classe plus générale des systèmes non linéaires, appelés systèmes descripteurs, est décrite par des systèmes d'équations algèbro-différentielles [11][12]. Les premières études concernant la stabilisation des descripteurs T-S ont été proposées ces dernières années [13][14]. Les systèmes descripteurs permettent de représenter les systèmes singuliers [12]. De plus, ils constituent l'écriture naturelle des systèmes mécaniques à inertie variable dans le temps [15][16]. Des études ont conduit aux conditions de stabilité quadratiques pour la classe des modèles descripteurs T-S incertains [17][18][19][20]. Néanmoins, celles-ci

demeurent conservatives du fait de l'utilisation d'une QLF. Par ailleurs, l'utilisation d'une FLF conduit à des conditions difficiles à mettre en œuvre du fait de la présence des dérivées des fonctions d'appartenances. Afin de palier à cet inconvénient, un compromis a été proposé par [21]. Cependant, bien que simples d'utilisation, ces conditions restent toutefois pessimistes puisque la matrice de la FLF est partiellement constante. D'autre part, afin de réduire le coût de calcul et de relâcher les conditions de stabilité des systèmes T-S « classiques », une nouvelle approche, basée sur une réécriture redondante du système en boucle fermée sous la forme d'un descripteur a été proposée par [22].

Dans cet article, de nouvelles conditions LMI pour la stabilisation non quadratique des systèmes descripteurs flous sont proposées. Celles-ci sont basées sur une réécriture redondante de la boucle fermée, l'utilisation d'une loi de commande non-PDC et d'une FLF. Enfin, un exemple académique illustre la pertinence et l'applicabilité des approches proposées

2 Formulation du problème

Considérons la classe des modèles descripteurs T-S avec perturbations externes donnée par :

$$\sum_{k=1}^l v_k(z(t)) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + W_i \gamma(t)) \quad (1)$$

Où l et r représentent respectivement le nombre de règles floues à gauche et à droite de la représentation d'état (1), $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $\gamma(t) \in \mathbb{R}^d$ représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur des perturbations externes supposées bornées. $z(t) \in \mathbb{R}^f$ est le vecteur des prémisses, $v_k(z(t))$ et $h_i(z(t))$ sont des fonctions d'appartenances positives et

normalisées satisfaisants les propriétés d'une somme convexe :

$$0 \leq h_i(z(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1,$$

$$0 \leq v_k(z(t)) \leq 1, \quad \sum_{k=1}^l v_k(z(t)) = 1.$$

$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $W_i \in \mathbb{R}^{d \times n}$ sont des matrices réelles et $E_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice réelle et, le cas échéant, singulière.

Notations : Soient, pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $k \in \{1, \dots, l\}$, les fonctions scalaires $v_k(z(t))$, $h_i(z(t))$, les matrices de dimensions appropriées L_k , G_i et M_{ik} . On notera :

$$L_v = \sum_{k=1}^l v_k(z(t)) L_k, \quad G_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) G_i \quad \text{et}$$

$$M_{hv} = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^r v_k(z(t)) h_i(z(t)) M_{ik}. \quad \text{De plus,}$$

(*) désigne une quantité transposée à l'intérieur d'une matrice symétrique. Enfin, de manière générale, on notera $X_z = X(z(t))$ une matrice dépendante des variables de prémisses $z(t)$ et pour laquelle une structure « hv » n'est pas encore définie. Dans la suite du papier, lorsque cela s'avèrera nécessaire, le temps t sera omis dans les variables pour alléger les écritures.

On suppose ici que le système (1) est bien défini (« impulse free ») [12], c'est-à-dire que $\forall t, \deg(\det(sE_v - A_h)) = \text{rang}(E_h)$.

Afin de stabiliser (1), on considère la loi de commande non-PDC suivante :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j(z(t)) v_k(z(t)) F_{jk} (X_z^1)^{-1} x(t) \quad (2)$$

où F_{jk} et X_z^1 sont des matrices réelles de dimensions appropriées à trouver pour la synthèse du contrôleur flou. La structure de

X_z^1 sera définie et justifiée dans la suite (c.f. inégalité (14)).

Soit le vecteur d'état augmenté $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$, le modèle descripteur T-S avec perturbations externes (1) peut être réécrit :

$$\bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{hv}\bar{x}(t) + \bar{B}_h u(t) + \bar{W}_h \gamma(t) \quad (3)$$

Où $\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{A}_{hv} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_h & -E_v \end{bmatrix}$, $\bar{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ B_h \end{bmatrix}$
et $\bar{W}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ W_h \end{bmatrix}$.

De même, (2) peut se réécrire :

$$u(t) = -\bar{K}_{hvz}\bar{x}(t) \quad (4)$$

avec $\bar{K}_{hvz} = \begin{bmatrix} F_{hv}(X_z^1)^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

L'écriture d'une boucle fermée sous forme redondante consiste à réécrire (4) telle que :

$$0\dot{u}(t) = u(t) + \bar{K}_{hvz}\bar{x}(t) \quad (5)$$

avec $0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice nulle ; et de considérer un vecteur d'état étendu $\tilde{x}(t) = [\bar{x}^T(t) \quad u^T(t)]^T$. La dynamique de la boucle fermée peut alors être exprimée sous sa forme redondante par :

$$\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{W}_h \gamma(t) \quad (6)$$

avec $\tilde{E} = \begin{bmatrix} \bar{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{hv} & \bar{B}_h \\ \bar{K}_{hvz} & I \end{bmatrix}$, $\tilde{W}_h = \begin{bmatrix} \bar{W}_h \\ 0 \end{bmatrix}$

On constate alors que, s'il peut-être établi que (6) est stable, $x(t)$ et $u(t)$ convergent vers 0 et (1) est stabilisé par (2).

3 Conditions de stabilité LMI

Dans cette partie, nous considérerons le problème de stabilité non perturbé, c'est-à-dire $\gamma(t) = 0$. Le théorème suivant résume les résultats.

Théorème 1 : Soient $\forall z(t), \mu \in \{1, \dots, r-1\}$, $\varepsilon \in \{1, \dots, l-1\}$, $\dot{h}_\mu(z(t)) \geq \lambda_\mu$, $\dot{v}_\varepsilon(z(t)) \geq \varpi_\varepsilon$. Le système descripteur T-S (1) non perturbé ($\gamma(t) = 0$) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande non-PDC (2), s'il existe les matrices $X_{jk}^1 = X_{jk}^{1T} > 0$, X_{ij}^4 , X_{ij}^5 , X_{jk}^6 , X_{jk}^7 , X_{jk}^8 , X_{jk}^9 et F_{jk} tels que, $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$, $\forall k = 1, \dots, l$, $\forall \varepsilon \in \{1, \dots, l-1\}$, $\forall \mu \in \{1, \dots, r-1\}$:

$$\Psi_{ijk} < 0, X_{i\varepsilon}^1 - X_{il}^1 \geq 0 \text{ et } X_{\mu k}^1 - X_{rk}^1 \geq 0 \quad (7)$$

avec

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} X_{ij}^{4T} + X_{ij}^4 + \Omega_{11} & (*) & (*) \\ \begin{pmatrix} X_{ij}^{5T} + A_i X_{jk}^1 & - \\ E_k X_{ij}^4 + B_i X_{jk}^7 \end{pmatrix} & \Omega_{22} & (*) \\ X_{ij}^{6T} + S_{jk} + X_{jk}^7 & \Omega_{32} & X_{jk}^{9T} + X_{jk}^9 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{11} = -\sum_{\varepsilon=1}^{l-1} \varpi_\varepsilon(z) (X_{j\varepsilon}^1 - X_{jl}^1) + \sum_{\mu=1}^{r-1} \lambda_\mu(z) (X_{\mu k}^1 - X_{rk}^1)$$

$$\Omega_{22} = -X_{ij}^{5T} E_k^T - E_k X_{ij}^5 + X_{jk}^{8T} B_i^T + B_i X_{jk}^8$$

et $\Omega_{32} = -X_{ij}^{6T} E_k^T + X_{jk}^{9T} B_i^T + X_{jk}^8$.

Preuve : Soit la FLF candidate :

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) \tilde{E} X_z^{-1} \tilde{x}(t) \quad (8)$$

où $X_z = \begin{bmatrix} X_z^1 & X_z^2 & X_z^3 \\ X_z^4 & X_z^5 & X_z^6 \\ X_z^7 & X_z^8 & X_z^9 \end{bmatrix}$ est une matrice non singulière et :

$$\tilde{E} X_z^{-1} = X_z^{-T} \tilde{E} > 0 \quad (9)$$

(9) implique $X_z^1 = X_z^{1T} > 0$ et $X_z^2 = X_z^3 = 0$.

Le système en boucle fermée (6) est stable si :

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \dot{\tilde{x}}^T \tilde{E} X_z^{-1} \tilde{x} + \tilde{x}^T \tilde{E} X_z^{-1} \dot{\tilde{x}} + \tilde{x}^T \tilde{E} \dot{X}_z^{-1} \tilde{x} < 0 \quad (10)$$

C'est-à-dire si :

$$\tilde{A}^T X_z^{-1} + X_z^{-T} \tilde{A} + \tilde{E} \dot{X}_z^{-1} < 0 \quad (11)$$

Notons que, de part la structure d'interconnexion de X_z^1 définie ci-dessous, $\tilde{E} \dot{X}_z^{-1}$ est symétrique.

A partir de (9), en multipliant (11) à gauche et à droite respectivement par X_z^T et X_z on obtient :

$$X_z^T \tilde{A}^T + \tilde{A} X_z + \tilde{E} X_z \dot{X}_z^{-1} X_z < 0 \quad (12)$$

Soit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{X_z^{-1} X_z\} &= \frac{d}{dt} \{I\} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \{X_z^{-1}\} X_z + X_z^{-1} \frac{d}{dt} \{X_z\} &= 0 \\ \Leftrightarrow X_z \frac{d}{dt} \{X_z^{-1}\} X_z &= -\frac{d}{dt} \{X_z\} \end{aligned}$$

(12) devient :

$$X_z^T \tilde{A}^T + \tilde{A} X_z - \tilde{E} \dot{X}_z < 0 \quad (13)$$

C'est-à-dire, après développement :

$$\left[\begin{array}{cc} X_z^{4T} + X_z^4 - \dot{X}_z^1 & (*) \\ \left(X_z^{5T} + A_h X_z^1 - \right. & \left. \begin{array}{c} -X_z^{5T} E_v^T - \\ E_v X_z^5 + X_z^{8T} B_h^T \\ + B_h X_z^8 \end{array} \right) & (*) \\ \left(X_z^{6T} + S_{hv} \right) & \left(X_z^{9T} B_h^T - \right. \\ \left. + X_z^7 \right) & \left. \left(X_z^{6T} E_v^T + X_z^8 \right) \right) \left(X_z^{9T} \right) \\ & \left(+ X_z^9 \right) \end{array} \right] < 0 \quad (14)$$

On choisi $X_z^1 = X_{hv}^1 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j(z) v_k(z) X_{jk}^1$,

$$X_z^4 = X_{hh}^4 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) X_{ij}^4,$$

$$X_z^5 = X_{hh}^5 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) X_{ij}^5,$$

$$X_z^6 = X_{hh}^6 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) X_{ij}^6,$$

$$X_z^7 = X_{hv}^7 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j(z) v_k(z) X_{jk}^7,$$

$$X_z^8 = X_{hv}^8 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j(z) v_k(z) X_{jk}^8,$$

$$\text{et } X_z^9 = X_{hv}^9 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j(z) v_k(z) X_{jk}^9.$$

Dans ce cas, en tenant compte de la propriété de sommes convexes $\dot{h}_r(z) = -\sum_{\mu=1}^{r-1} \dot{h}_\mu(z)$ et

$\dot{v}_l(z) = -\sum_{\varepsilon=1}^{l-1} \dot{v}_\varepsilon(z)$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{hv}^1 &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l \dot{h}_j v_k X_{jk}^1 + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j \dot{v}_k X_{jk}^1 \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j v_k \left\{ \begin{array}{c} \sum_{\varepsilon=1}^{l-1} \dot{v}_\varepsilon (X_{j\varepsilon}^1 - X_{j\varepsilon}^1) + \\ \sum_{\mu=1}^{r-1} \dot{h}_\mu (X_{\mu k}^1 - X_{rk}^1) \end{array} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

Soient, pour $j=1, \dots, r-1$, $\dot{h}_j(z) \geq \lambda_j$ et pour $k=1, \dots, l-1$, $\dot{v}_k(z) \geq \varpi_k$, on peut écrire :

$$-\dot{X}_{hv}^1 \leq -\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j v_k \left\{ \begin{array}{c} \sum_{\varepsilon=1}^{l-1} \varpi_\varepsilon (X_{j\varepsilon}^1 - X_{j\varepsilon}^1) + \\ \sum_{\mu=1}^{r-1} \lambda_\mu (X_{\mu k}^1 - X_{rk}^1) \end{array} \right\} \quad (16)$$

Notons que, de manière évidente, les bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenances sont négatives. De ce fait, les conditions $X_{j\varepsilon}^1 - X_{j\varepsilon}^1 \geq 0$ et $X_{\mu k}^1 - X_{rk}^1 \geq 0$ pour

tout j, k, ε, μ sont requises. Ainsi, en considérant (14) et (16), on obtient $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z) h_j(z) v_k(z) \Psi_{ijk} < 0$ avec Ψ_{ijk} définie dans (7). ■

Remarque 1: L'utilisation d'une écriture redondante de la boucle fermée (6) permet l'obtention de conditions LMI ayant une structure d'interconnexion en double somme alors que l'écriture « classique » [17-20] conduit à une structure en triple somme. Cette particularité permet donc de réduire considérablement le nombre de LMIs à vérifier et par conséquent diminue le coût de calcul.

Remarque 2: Pour $j = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, l$, toutes les fonctions d'appartenances $h_i(z)$ et $v_k(z)$ doivent être de classe C^1 . Ce point est évidemment vérifié lorsqu'un découpage en secteur non linéaire est utilisé pour obtenir le modèle T-S à commander.

4 Synthèse H_∞

Les conditions de stabilité données dans le théorème précédent ne tiennent pas compte des perturbations externes. Dans cette section, une approche basée sur le critère H_∞ est proposée. Afin d'atténuer l'effet des perturbations externes ($\gamma(t) \neq 0$), on considère la contrainte H_∞ donnée par:

$$\int_{t_0}^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) - \mu^2 \int_{t_0}^{t_f} \tilde{\gamma}^T(t) \tilde{\gamma}(t) \leq 0 \quad (17)$$

Où t_0 et t_f désignent respectivement le temps

$$\text{initial et le temps final, } \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} > 0,$$

Q est une matrice de pondération et $\mu > 0$ désigne le taux d'atténuation.

Théorème 2 : Soient $\forall z(t)$, $\mu \in \{1, \dots, r-1\}$, $\varepsilon \in \{1, \dots, l-1\}$, $\dot{h}_\mu(z(t)) \geq \lambda_\mu$, $\dot{v}_\varepsilon(z(t)) \geq \varpi_\varepsilon$. S'il existe les matrices $X_{jk}^1 = X_{jk}^{1T} > 0$, X_{ij}^4 , X_{ij}^5 , X_{ij}^6 , X_{jk}^7 , X_{jk}^8 , X_{jk}^9 , F_{jk} ainsi que le scalaire positif $\eta = \mu^2$ tels que $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$, $\forall k = 1, \dots, l$, $\forall \varepsilon \in \{1, \dots, l-1\}$, $\forall \mu \in \{1, \dots, r-1\}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \Psi_{ijk} & & & & (*) \\ X_{jk}^1 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & W_i^T & 0 & 0 & -\eta I \end{array} \right] < 0$$

$$X_{i\varepsilon}^1 - X_{il}^1 \geq 0 \text{ et } X_{\mu k}^1 - X_{rk}^1 \geq 0 \quad (18)$$

avec Ψ_{ijk} définie dans (7).

Alors, le système descripteur T-S (1) est stable en boucle fermée via la loi de commande non-PDC (2) au regard de la performance H_∞ (17) garantissant un taux d'atténuation $\mu > 0$ des perturbations externes.

Preuve : Le descripteur T-S incertain et perturbé en boucle fermée (6), est stable sous la performance H_∞ (17), si :

$$\dot{V}(\tilde{x}) + \tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x} - \mu^2 \tilde{\gamma}^T(t) \tilde{\gamma}(t) < 0 \quad (19)$$

C'est-à-dire si :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^T \\ \tilde{\gamma}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_{11} + \tilde{Q} & (*) \\ \tilde{W}_h^T X_z^{-1} & -\mu^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\gamma} \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

Où $\Xi_{11} = \tilde{A}^T X_z^{-1} + X_z^{-T} \tilde{A} + \tilde{E} \dot{X}_z^{-1}$ (voir équation (11)).

En multipliant à gauche et à droite par $\text{diag}[X_z^T \quad I]$ et $\text{diag}[X_z \quad I]$, (20) se réécrit :

$$\begin{bmatrix} X_z^T \Xi_{11} X_z + X_z^T \tilde{Q} X_z & (*) \\ \tilde{W}_h^T & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

Soit le changement de variable $\eta = \mu^2$, en suivant le même chemin que pour la preuve du théorème 1 et en appliquant le complément de Schur [23], on obtient directement les conditions données par le théorème 2. ■

Remarque3 : Les conditions présentées aux théorèmes 1 et 2 considèrent une structure d'interconnexion de la matrice de Lyapunov en triple somme $X_z = X_{vhh}$. Cette formulation nécessite la connaissance des valeurs minimales des dérivées des fonctions d'appartenances $h_i(z(t))$ et $v_k(z(t))$. Une manière de réduire le nombre de paramètres nécessaires a priori peut-être obtenu en choisissant :

$$\begin{aligned} X_z^1 &= X_v^1 = \sum_{k=1}^l v_k X_k^1, & X_z^4 &= X_h^4 = \sum_{i=1}^r h_i X_i^4, \\ X_z^5 &= X_h^5 = \sum_{i=1}^r h_i X_i^5, & X_z^6 &= X_h^6 = \sum_{i=1}^r h_i X_i^6; \\ X_z^7 &= X_v^7 = \sum_{k=1}^l v_k X_k^7, & X_z^8 &= X_v^8 = \sum_{k=1}^l v_k X_k^8 \text{ et} \\ X_z^9 &= X_v^9 = \sum_{k=1}^l v_k X_k^9. \end{aligned}$$

Notons que ce compromis a peu d'effet sur le conservatisme des conditions LMI. Par ailleurs, un autre compromis a été proposé par [21] dans le cadre de la stabilisation des descripteurs T-S pour lequel les dérivées des fonctions d'appartenance ne sont pas requises. Appliquées aux conditions redondantes proposées dans cet article, cela conduit à choisir X^1 constant dans le théorème précédant au détriment de conservatisme des conditions.

5 Exemple de simulation

Soit le système descripteur non linéaire décrit par :

$$E(x(t))\dot{x}(t) = \begin{cases} A(x(t))x(t) + \\ Bu(t) + W\gamma(t) \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{où } x(t) &= \begin{bmatrix} x_1^T(t) \\ x_2^T(t) \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \\ W &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & E(x(t)) &= \begin{bmatrix} -1.5 + \sin(x_1(t)) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A(x(t)) &= \begin{bmatrix} 1 & \cos(x_1(t)) \\ b & \frac{\sin(x_2(t))}{x_2(t)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

a et b deux paramètres.

Un représentant T-S exact peut être associé au système non linéaire (22) en utilisant l'approche par secteur non linéaire [2]. $E(x(t))$ contient un terme non linéaire conduisant à $l=2$ et $A(x(t))$ contient deux termes non linéaires conduisant à $r=4$. Le découpage de ces termes non linéaires s'effectue de la manière suivante :

$$\sin(x_1) = \frac{1 - \sin(x_1)}{2}(-1) + \frac{\sin(x_1) + 1}{2}(1) \quad (23)$$

$$\cos(x_1) = \underbrace{\frac{1 - \cos(x_1)}{2}}_{w_{10}}(-1) + \underbrace{\frac{\cos(x_1) + 1}{2}}_{w_{11}}(1) \quad (24)$$

$$\frac{\sin(x_2)}{x_2} = \underbrace{\frac{1 - \frac{\sin(x_2)}{x_2}}{(1-\delta)}}_{w_{20}}(\delta) + \underbrace{\frac{\frac{\sin(x_2)}{x_2} - \delta}{(1-\delta)}}_{w_{21}}(1) \quad (25)$$

Où $\delta = -0,2172$, est la valeur minimale de la fonction non linéaire $\frac{\sin(x_2)}{x_2}$.

En considérant (23), (24) et (25), le modèle descripteur T-S pour (22) est donné par :

$$\sum_{k=1}^2 v_k(z(t))E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t))A_i x(t) + Bu(t) + W\gamma(t) \quad (26)$$

avec $E_1 = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ b & \delta \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & \delta \end{bmatrix}$,

$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, $h_1(z(t)) = w_{10}w_{20}$,

$h_2(z(t)) = w_{10}w_{21}$, $h_3(z(t)) = w_{11}w_{20}$,

$h_4(z(t)) = w_{11}w_{21}$, $v_1(z(t)) = \frac{1 - \sin(x_1)}{2}$,

et $v_2(z(t)) = \frac{\sin(x_1) + 1}{2}$.

Une méthode permettant le calcul exact des bornes de $\dot{v}(z(t))$ et $\dot{h}(z(t))$ a été proposée dans [5]. La Figure 1 montre les domaines de solutions, sur l'intervalle $(a, b) \in [-20 \ 5] \times [-20 \ 5]$. Elle représente les résultats issus de la résolution du théorème 1 (pour $\varpi_\varepsilon = -3.5$, $\lambda_\mu = -5$) et ceux donnés par les conditions proposées dans [21].

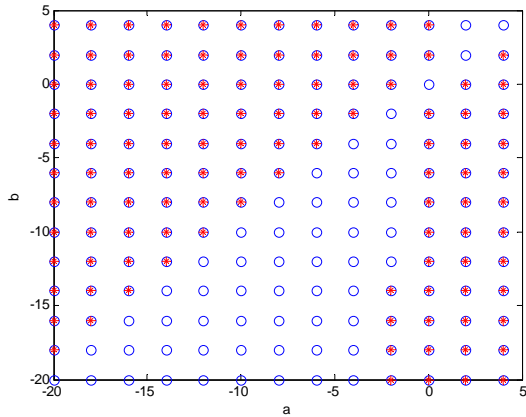


Figure 1 – Domaines de solutions : «o» théorème 1, «*» [21].

Notons que pour $a = b = 0$, aucune solution n'est envisageable par l'approche proposée dans [21]. La résolution des conditions de stabilité données par le théorème 1 permet de synthétiser un correcteur flou assurant la stabilisation de (22). La Figure 2 illustre la convergence du vecteur d'état et l'évolution du signal de commande pour $x(0) = [0.5 \ 1]^T$.

Le Tableau 1, montre les valeurs du taux d'atténuation $\eta = \mu^2$ calculées pour $a = 0$, $b \in [0 \ 4]$, $Q = \text{diag}[1 \ 1]$. Les résultats sont comparés pour les conditions du théorème 2 en choisissant X_{hhv}^1 ou X_{hv}^1 et pour les conditions issues de [21]. Aux vues des taux d'atténuation obtenus, on constate que les meilleurs résultats sont ceux issus du théorème 2.

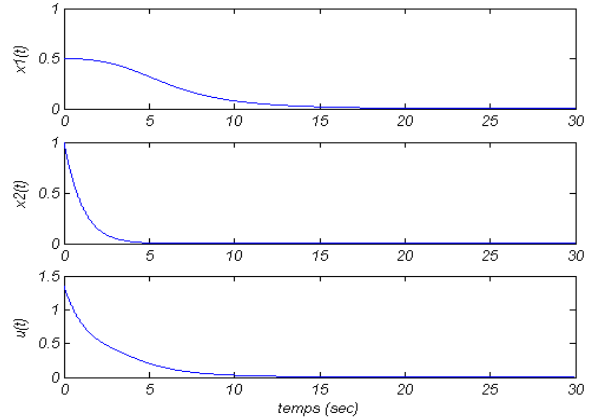


Figure 2 – Résultat de simulation (théorème1)

Tableau 1 – Performances H_∞

b	0	1	2	3	4
μ Th.2, X_{hhv}^1	0.32	0.3	0.27	0.23	0.19
μ Th 2, rem3 X_{hv}^1	0.65	0.54	0.39	0.29	0.23
μ [21]	X	4.7	2.96	2.92	2.97

6 Conclusion

Dans ce papier, de nouvelles conditions de stabilité moins pessimistes pour une classe plus générale des modèles non linéaires T-S ont été proposées. Celles-ci sont basées sur une FLF et une loi de commande non-PDC. La résolution d'un nombre important de contraintes LMI s'avère difficile à l'aide des solveurs et des ordinateurs actuels. Ainsi, afin de remédier à ce problème, l'approche floue proposée tient compte de l'avantage de la redondance dont l'effet est de réduire le nombre de conditions LMI à résoudre, ce qui conduit à une diminution du coût de calcul. Un

exemple numérique a été proposé pour montrer la pertinence des approches proposées par rapport à celles existantes dans la littérature.

Remerciements :

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre du projet COSMOS du GIS 3SGS. Les auteurs souhaitent remercier Pr. Lei Mém et Dr Hank O’Rolabo pour leurs remarques avisées et le département des Ardennes pour son soutien financier.

Références

- [1] T. Takagi, M. Sugeno, “Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control,” *IEEE Trans. on System Man and Cybernetics*, Vol. 15 (1), 1985, pp. 116-132.
- [2] K. Tanaka, H.O. Wang, “Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach,” Wiley, New York, 2001.
- [3] H.O. Wang, K. Tanaka, M.F. Griffin, “An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues,” *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 4, No. 1, February 1996.
- [4] Z. Ji, Y. Zhou, Y. Shen, “Stabilization of a Class of Fuzzy Control Systems via Piecewise Fuzzy Lyapunov Function Approach,” in *Proc. ACC’07, American Control Conference, USA*, July 11-13, 2007.
- [5] K. Tanaka, T. Hori, and H.O. Wang, “A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems,” *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 582-589, 2003.
- [6] M. Johansson, A. Rantzer, K.E. Arzen, “Piecewise quadratic stability of fuzzy systems,” *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol.7. No 6, pp. 713-722, 1999.
- [7] Y. Blanco, W. Perruquetti, P. Borne, “Non Quadratic Stability of Nonlinear Systems in The Takagi-Sugeno Form,” *Proceedings of European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001.
- [8] T.M. Guerra, L. Vermeiren., “LMI based relaxed non quadratic stabilizations for non-linear systems in the Takagi-Sugeno’s form,” *Automatica*, Vol. 40 (5), pp. 823-829, 2004
- [9] B.J. Rhee, S. Won, “A new Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 9, pp. 1211-1228, 2006.
- [10] G. Feng, “A Survey on Analysis and Design of Model-Based Fuzzy Control Systems,” *IEEE Trans Fuzzy Systems*, vol. 14, no. 5, pp.676- 697, 2006.
- [11] D. G. Luenberger, “Dynamic Equation in Descriptor Form,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-22, pp. 312-321, 1977.
- [12] Dai L. “Singular control systems,” in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer - Verlag, 1989, pp.12-45.
- [13] T. Taniguchi, K. Tanaka, K. Yamafuji, H.O. Wang, “Fuzzy descriptor systems: Stability Analysis and Design via LMIs,” in *Proc. ACC’09, American Control conference*, San Diego, California, June 1999.
- [14] T. Taniguchi, K. Tanaka, H.O. Wang, “Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control,” *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 8 (4), 2000, pp.442-452.
- [15] K. Guelton, S. Delprat, T.M. Guerra, “An alternative to inverse dynamics joint torques estimation in human stance based on a Takagi-Sugeno unknown inputs observer in the descriptor form”, *Control Engineering Practice*, 2008, doi:10.1016/j.conengprac.2008.04.002
- [16] H. Schulte, K. Guelton, “Modelling and simulation of two-link robot manipulators based on Takagi Sugeno fuzzy descriptor systems,” *Proc. IEEE ICIT06, Int. Conf. on Industrial Technology*, Mumbai, India, December 2006.
- [17] B.P. Ma, J. Sun, “Robust stabilization of uncertain T-S fuzzy descriptor systems,” in *Proc. 3rd IEEE International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Shanghai, China, 2004.
- [18] T. Bouarar, K. Guelton, B Mansouri, N. Manamanni, “ LMI Stability Condition for Uncertain Descriptors,” in *Proc. FUZZ-IEEE, Int. Conf. on fuzzy systems*, London, UK, July 2007.
- [19] J. Yoneyama, A. Ichikawa, “ H_{∞} -Control for Takagi-Sugeno Fuzzy Descriptor Systems,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Syst. Man Cyberm*, Tokyo, Japan, 1999, Vol. 3, pp 28-33.
- [20] T. Bouarar, K. Guelton, N. Manamanni, “LMI Based H_{∞} Controller Design for Uncertain Takagi-Sugeno Descriptors Subject to External Disturbances,” *3rd IFAC Workshop on advanced Fuzzy/Neural control*, Valenciennes , France, October 2007.
- [21] T. M. Guerra, M. Bernal, A. Kruszewski, M. Afroun, “A way to improve results for the stabilization of continuous-time fuzzy descriptor models,” *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, 2007.
- [22] K. Tanaka, H. Ohtake, H.O. Wang, “A Descriptor System Approach to Fuzzy Control System Design via Fuzzy Lyapunov Functions,” *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol.15, No. 3, June 2007.
- [23] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,” Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [24] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali, “LMI Control Toolbox for Use with MATLAB”, *the Mathworks Partener Series*. 1995