Annexe à la proposition denitac.pdf

Denise Vella-Chemla

Annexe à la proposition denitac.pdf (Denise Vella-Chemla, 23.7.2019)

On cherche à décomposer un nombre pair n en somme de 2 nombres premiers $p_1 + p_2$.

On ne peut pas faire référence à $\zeta(-1)$ comme on l'a fait dans [1]. On peut cependant, pour obtenir une minoration du nombre de décomposants de Goldbach de n, utiliser le cardinal $\left|\mathcal{P}_{\frac{n}{2}}\right|$ de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\frac{n}{2}$ et le multiplier par le produit $\prod\limits_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ qui compte combien de chances a le nombre premier p_1 de ne pas partager son reste avec n selon chaque module p inférieur à $\sqrt{n}$ (le fait de ne pas partager son reste avec n permet à p_1 d'avoir un complémentaire à n (appelé p_2) qui est premier également).

La minoration[1] de $\pi(x)$ (le nombre de nombres premiers inférieurs à x) par $\frac{x}{\log x}$ est fournie dans [2], page 69, pour $x \geq 17$ (Corollaire 1, (3.5), du Théorème 2, dont la démonstration est fournie au paragraphe 7 de [2]).

On a en conséquence $|\mathcal{P}_{\frac{n}{2}}| > \frac{\frac{n}{2}}{\log\left(\frac{n}{2}\right)}$.

La minoration de $\prod\limits_{p\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ est également fournie dans [2], page 70 (c'est le corollaire (3.27) du Théorème 7 dont la démonstration est fournie au paragraphe 8 de [2], avec γ la constante d'Euler-Mascheroni).

$$\frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1-\frac{1}{\log^2 x}\right) < \prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) \quad \text{pour } 1 < x. \tag{3.27}$$

En multipliant ces expressions ensemble, on obtient que le nombre de décomposants de Goldbach de n doit être supérieur à :

$$\frac{n/2}{\log(n/2)}\frac{e^{-\gamma}}{\log\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\log^2\sqrt{n}}\right)$$

qui est strictement supérieur à 1 à partir de 24.

Bibliographie

[1] http://denisevellachemla.eu/denitac.pdf.

[2] J. B. Rosser et L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, dedicated to Hans Rademacher for his seventieth birthday, Illinois J. Math., Volume 6, Issue 1 (1962), 64-94.

1. Cette minoration est à distinguer du Théorème des nombres premiers, prouvé indépendamment par Hadamard et La Vallée-Poussin, et qui fournit une tendance asymptotique pour $\pi(x)$.