

Un modèle épidémique dans un environnement qui oscille rapidement

Nicolas Bacaer

► **To cite this version:**

Nicolas Bacaer. Un modèle épidémique dans un environnement qui oscille rapidement. 2019. hal-02193965v2

HAL Id: hal-02193965

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02193965v2>

Submitted on 10 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle épidémique dans un environnement qui oscille rapidement

Nicolas Bacaër *

Résumé

On étudie un modèle épidémique non linéaire de type S-I-R dans l'approximation de champ moyen lorsque le taux de contact oscille rapidement de manière périodique. La taille finale de l'épidémie est proche de celle que l'on obtient en remplaçant le taux de contact par sa moyenne. Une approximation de la correction peut être calculée analytiquement lorsque la reproductivité de l'épidémie est proche de 1. La correction, qui peut être positive ou négative, est proportionnelle à la fois à la période des oscillations et à la fraction initiale de personnes infectées.

Mots-clés : système non linéaire, épidémie, moyennisation

1 Introduction

La modélisation des épidémies est un thème à cheval entre la médecine et les sciences sociales auquel la physique statistique tente depuis quelques décennies d'apporter son éclairage [1, 2, 3]. On étudie ci-dessous un modèle épidémique non linéaire de type S-I-R dans l'approximation de champ moyen lorsque l'environnement temporel oscille rapidement, ce qui conduit à utiliser la méthode de moyennisation.

Soit N la taille supposée constante d'une population, $S(t)$ le nombre de personnes susceptibles d'être infectées au temps t , $I(t)$ le nombre de personnes infectées et $R(t)$ le nombre de personnes retirées de la chaîne de transmission parce qu'elles sont guéries et immunisées. Ainsi $N = S(t) + I(t) + R(t)$. Soit $a(t)$ le taux de contact infectieux et b le taux de guérison. On suppose comme dans le modèle simplifié de Kermack et McKendrick (voir par exemple [4, p. 75]) que

$$\frac{dS}{dt} = -a(t)\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t)\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (1)$$

*Institut de recherche pour le développement, Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes, Les Cordeliers, 75006 Paris, France. Courriel : nicolas.bacaer@ird.fr

Chaque individu susceptible d'être infecté est donc influencé par la proportion I/N d'individus infectés dans la population totale, autrement dit par le « champ moyen », et non par son voisinage dans une structure de contact particulière.

Dans un travail récent [5], on s'est intéressé à l'influence qu'aurait une oscillation périodique de faible amplitude du taux de contact $a(t)$ sur la taille finale $R(\infty)$ de l'épidémie. On va s'intéresser ici au cas où l'amplitude est quelconque mais où la période des oscillations est petite par rapport à la durée typique de l'épidémie. Pour une épidémie qui durerait quelques semaines, cela représenterait par exemple l'alternance rapide entre le jour et la nuit. Pour une épidémie qui durerait quelques mois, cela représenterait l'alternance entre les jours ouvrés et les fins de semaines, notamment pour les épidémies en milieu scolaire. Pour une épidémie qui durerait plusieurs années voire plusieurs décennies, cela représenterait l'alternance entre les hivers et les étés.

Soit $\varepsilon > 0$ la période des oscillations, un paramètre destiné à tendre vers 0. On suppose que

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/\varepsilon))$$

avec $\bar{a} > 0$ et une fonction ϕ continue par morceaux telle que $|\phi(\tau)| \leq 1$ pour tout τ , de sorte que le taux de contact $a(t)$ reste toujours positif ou nul. On suppose de plus que la fonction ϕ est périodique de période 1 et de moyenne nulle : $\int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0$. Ainsi $a(t)$ est une fonction périodique de période ε et sa moyenne est \bar{a} . Prenons comme conditions initiales au début de l'épidémie

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

avec $0 < i < N$.

La section 2 montre des simulations de ce modèle. On constate sur des exemples que la taille finale de l'épidémie est remarquablement proche de celle que l'on obtient en remplaçant le taux de contact par sa moyenne. Dans la section 3, on propose une explication de cette proximité en faisant quelques hypothèses supplémentaires sur les paramètres du modèle, notamment en supposant que la fraction initiale de personnes infectées est petite et que la reproductivité de l'épidémie reste proche de 1. On obtient une formule approchée pour la correction à apporter à la taille finale de l'épidémie. Cette correction est proportionnelle à la fois à la période des oscillations et à la fraction initiale de personnes infectées, d'où sa petitesse.

2 Quelques simulations

Les paramètres sont choisis pour être plausibles :

- la population totale est $N = 10\,000$;
- une seule personne est infectée au début de l'épidémie ($i = 1$) ;
- chaque personne a en moyenne $\bar{a} = 15$ contacts par mois ;
- la durée moyenne de l'infection est $1/b = 1/10$ mois, soit environ 3 jours ;
- la période ε est $1/4$ de mois, soit environ 7 jours ;

– le facteur périodique est

$$\phi(t/\varepsilon) = k \cos(\omega t + \psi),$$

où $\omega = 2\pi/\varepsilon$ et $|k| \leq 1$;

– le déphasage est $\psi = -\pi/2$ de sorte que $\phi(t/\varepsilon) = k \sin(\omega t)$ et le taux de contact $a(t)$ est dans une phase croissante à $t = 0$.

La reproductivité vaut alors $\bar{a}/b = 1,5 > 1$, ce qui garantit le développement d'une épidémie avec une taille finale $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$ [6].

La figure 1 montre deux simulations typiques du modèle : l'une avec $k = 0$ (le taux de contact est constant), l'autre avec $k = 1$ (le taux de contact oscille). Quoique les courbes pour $k = 1$ s'éloignent notablement de celles pour $k = 0$ pendant l'épidémie, il est remarquable que les tailles finales $R(\infty)$ dans les deux simulations soient presque indiscernables graphiquement. Ceci sera expliqué dans la section suivante.

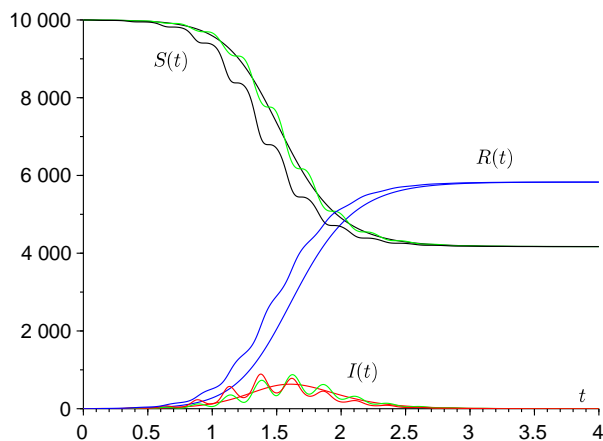


FIGURE 1 – Simulation d'une épidémie : $S(t)$ en noir, $I(t)$ en rouge, $R(t)$ en bleu. Les courbes non ondulées correspondent à $k = 0$, les courbes ondulées à $k = 1$. Les courbes vertes sont les approximations du deuxième ordre pour $S(t)$ et $I(t)$.

En réduisant la période des oscillations (par exemple avec $\varepsilon = 1/8$ de mois), on verrait les courbes $(S(t), I(t), R(t))$ pour $k = 1$ conserver leurs oscillations mais se rapprocher de la solution avec $k = 0$, que l'on note $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ car elle correspond à $a(t) = \bar{a}$. C'est d'ailleurs une conséquence du théorème de moyennisation de Fatou [7, théorème 42]. En effet, en posant $\tau = t/\varepsilon$, le système s'écrit

$$\frac{dS}{d\tau} = -\varepsilon \bar{a}(1 + \phi(\tau)) \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = \varepsilon \left[\bar{a}(1 + \phi(\tau)) \frac{SI}{N} - bI \right], \quad \frac{dR}{d\tau} = \varepsilon bI, \quad (2)$$

avec $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$. Le théorème assure que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(\varepsilon)$$

pendant un temps τ de l'ordre de $1/\varepsilon$. Ainsi $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(\varepsilon)$ pendant un temps t de l'ordre de 1. Plus précisément, il existe des constantes c_1, c_2, c_3 et ε_0 toutes positives telles que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et tout $t > 0$, on ait

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq \varepsilon [c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

On peut calculer une approximation au second ordre. Écrivons le système (2) sous la forme $dZ/d\tau = \varepsilon f(\tau, Z)$, où $Z = (S, I, R)$ et $f(\tau, Z)$ est τ -périodique de période 1. Alors

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\sigma + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\sigma + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons qu'il faut retrancher le terme en $\sin(\psi)$ pour que ces dernières fonctions soient de moyenne nulle. D'après [7, théorème 44], on a

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - \varepsilon \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(\varepsilon^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + \varepsilon \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(\varepsilon^2)$$

et $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(\varepsilon^2)$ sur un intervalle de temps τ de l'ordre de $1/\varepsilon$. Autrement dit,

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

et $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$ sur un intervalle de temps t de l'ordre de 1. Ces approximations de $S(t)$ et $I(t)$ sont représentées en vert dans la figure 1.

Remarquons qu'avec une période du taux de contact qui est petite, on n'observe pas de courbe épidémique avec plusieurs grandes vagues, contrairement aux simulations de [6]. C'est que le système se rapproche de plus en plus du cas où le taux de contact est moyenné, qui ne donne qu'une seule vague épidémique.

3 Proximité des tailles finales

En écrivant la première équation (1) sous la forme $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$, en intégrant entre $t = 0$ et $t = +\infty$, en tenant compte des conditions initiales et de ce que $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$, on trouve facilement comme dans [5] que

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a} R(\infty)}{b N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/\varepsilon) dt = 0. \quad (3)$$

L'intégrale oscillante $\int_0^\infty I(t) \phi(t/\varepsilon) dt$ tend sans doute vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. En effet, on sait d'une part que $I(t) \simeq \bar{I}(t)$. D'autre part, du moins lorsque ϕ est un cosinus, l'intégrale $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/\varepsilon) dt$ tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. C'est une conséquence du fait que $\bar{I}(t)$ soit une fonction positive intégrable, car $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$, et du fait que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable tende vers 0 à l'infini.

Il en résulte que $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. La question est de savoir à quelle vitesse ceci se produit. En première approximation, un développement limité de l'équation (3) comme dans [5] donne

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/\varepsilon) dt.$$

Puis on utilise pour $\bar{I}(t)$ l'expression analytique approchée en forme de cloche symétrique obtenue par Kermack et McKendrick (voir par exemple [5] ou [8]), ce qui suppose que la reproductivité \bar{a}/b reste proche de 1 tout en étant supérieure à 1 et que la fraction initiale infectée i/N soit petite ($i/N \ll 1$) :

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{N X}{\text{ch}^2[Y(t - T)]}, \quad (4)$$

où $\text{ch}(\cdot)$ désigne le cosinus hyperbolique tandis que X , Y et T vérifient, sous l'hypothèse supplémentaire vraisemblable $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$ (la fraction initiale infectée est bien plus petite que la reproductivité n'est proche de 1),

$$X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2}, \quad T \simeq \frac{\log [2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}. \quad (5)$$

Notons que T est une approximation du temps qui s'écoule avant le pic de l'épidémie dans un environnement constant.

Supposons enfin que $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$ comme dans la figure 1. Notons $\text{Re}(\cdot)$ la partie réelle d'un nombre complexe et i le nombre imaginaire habituel (à ne pas confondre avec i , la population infectée initialement). On a alors, en utilisant un résultat classique sur le calcul asymptotique des intégrales complexes avec une phase qui n'est pas stationnaire de sorte que le terme principal vient du bord de l'intervalle d'intégration [9, théorème 3],

$$\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/\varepsilon) dt \simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - T)]} dt$$

$$\begin{aligned}
&= N X k \operatorname{Re} \left(e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\operatorname{ch}^2[Y(t-T)]} dt \right) \\
&\simeq -N X k \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\psi}}{i\omega \operatorname{ch}^2(-YT)} \right) \\
&= -\frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \operatorname{ch}^2(YT)}.
\end{aligned}$$

Avec les approximations (5), on voit en plus que

$$\operatorname{ch}^2(YT) \simeq e^{2YT}/4 \simeq (N/i)(1-b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

ce qui donne finalement pour $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (6)$$

La taille finale $\bar{R}(\infty)$ dans un environnement constant est l'unique solution strictement positive de l'équation

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp \left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \right),$$

ce que l'on retrouve facilement à partir de l'équation (3). Puisque $i \ll N$, la taille finale $\bar{R}(\infty)$ ne dépend que très peu de la condition initiale i . Elle est donnée de manière approchée par la solution strictement positive de

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp \left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \right).$$

Le terme correcteur dans l'équation (6), qui peut être positif ou négatif selon le signe de $\sin(\psi)$, est donc à la fois proportionnel à $1/\omega$, c'est-à-dire à la période ε qui est petite, et à la fraction i/N de personnes initialement infectées, qui est également petite. C'est pourquoi, comme annoncé, la taille finale de l'épidémie est remarquablement proche de celle que l'on obtient en remplaçant le taux de contact par sa moyenne.

Ceci est illustré dans la figure 2 avec des valeurs des paramètres identiques à celles de la figure 1 pour $k = 1$. On a fait varier la période ε . On a aussi essayé deux conditions initiales : $i = 1$ et $i = 2$. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la courbe pour $R(\infty)$ semble bien tangente à l'approximation (6). On remarquera sur l'échelle verticale la petitesse de la différence relative $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$. Comme $N = 10\,000$, cela se traduit pour la taille finale de l'épidémie au maximum par une différence de 1 ou 2 personnes (la taille devrait en principe être un nombre entier). Notons que la reproductivité \bar{a}/b vaut ici 1,5, de sorte que l'approximation (4) de Kermack et McKendrick est encore relativement bonne [8, p. 240].

Si ψ est nul ou un multiple entier du nombre π , le terme correcteur dans l'équation (6) est nul. Mais comme il s'agit d'un cas exceptionnel, il ne vaut peut-être pas la peine de trouver un nouvel équivalent pour l'intégrale $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/\varepsilon) dt$

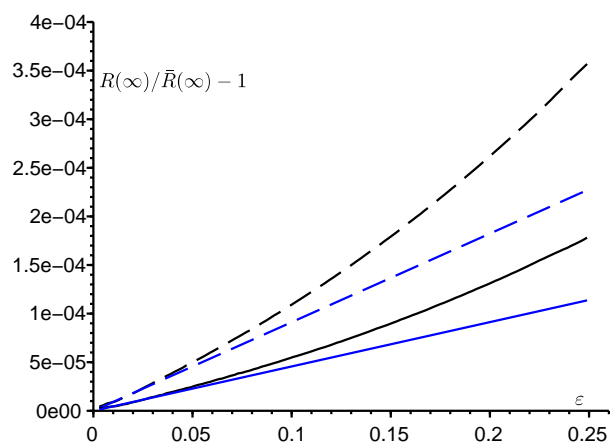


FIGURE 2 – La différence relative $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ entre les tailles finales des épidémies en fonction de la période ε . En noir, $R(\infty)$ est estimé en simulant le système d'équations différentielles. L'approximation (6) est représentée en bleu. Les paramètres sont les mêmes que dans la figure 1 avec $k = 1$, sauf que la période ε varie entre 0 et 0,25 mois et que $i = 1$ (lignes continues) ou $i = 2$ (pointillés).

ci-dessus.

En conclusion, on peut dire que la proximité des tailles finales $R(\infty)$ et $\bar{R}(\infty)$ justifie d'une certaine manière le fait que dans beaucoup de modèles épidémiques, on néglige les oscillations de courte période pour ne considérer que des taux de contacts moyens.

Références

- [1] N. Zekri, J.-P. Clerc, Étude statistique et dynamique de la propagation d'épidémies dans un réseau de petit monde, *C. R. Phys.* 3 (2002) 741-747.
- [2] P.J. Giabbanelli, J.G. Peters, Réseaux complexes et épidémies, *Techn. Sci. Inform.* 30 (2011) 181-212.
- [3] J.-Ph. Bouchaud, J.-P. Nadal, De la physique statistique aux sciences sociales, avant-propos, *C. R. Physique* (2019) <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2019.05.001>
- [4] A. Hillion, *Les Théories mathématiques des populations*, Presses Universitaires de France, Paris, 1986.
- [5] N. Bacaër, Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, *C. R. Biologies* (2019)
- [6] N. Bacaër, M.G.M. Gomes, On the final size of epidemics with seasonality, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 1954-1966.
- [7] J.-P. Francoise, *Oscillations en biologie*, Springer/SMAI, Berlin, 2005.
- [8] J. Gani, J. Badrikian, Processus stochastiques de population, in : P.-L. Hennequin (éd.), *École d'été de probabilités de Saint-Flour IV-1974*, Springer, Berlin, 1975, p. 188-293.
- [9] J.-L. Ovaert, J.-L. Verley, Calculs asymptotiques, in : *Dictionnaire des mathématiques - algèbre, analyse, géométrie*, Albin Michel, Paris, 1997, p. 47-62.