Le problème inverse de Galois sur les corps des fractions tordus à indéterminée centrale

Bruno Deschamps, François Legrand

Le Problème Inverse de Galois sur les corps des fractions tordus à indéterminée centrale

Bruno DESCHAMPS et François LEGRAND

Abstract.— In this article, we show that the Inverse Galois Problem over a skew field H of finite dimension over its center k is equivalent to a variant of the Inverse Galois Problem over k involving a polynomial constraint. As an application, we show that if k contains an ample field, then the Inverse Galois Problem has a positive answer over the skew field $H(t)$ of rational fractions with central indeterminate.

Résumé.— Dans cet article, nous montrons que le Problème Inverse de Galois sur un corps gauche H de dimension finie sur son centre k est équivalent à une variante du Problème Inverse de Galois sur k faisant intervenir une contrainte polynomiale. En application de ce résultat nous montrons que, si k contient un corps ample, alors le Problème Inverse de Galois admet une réponse positive sur le corps $H(t)$ des fractions rationnelles tordu à indéterminée centrale.

Le problème inverse de la théorie de Galois sur un corps K s'énonce de la manière suivante :

PIG$_K$ (Problème Inverse de Galois sur K) : *Tout groupe fini G est-il le groupe de Galois d'une extension galoisienne L/K ?*

Etant donnée une extension de corps commutatifs H/k, il est clair que, de manière générale, l'implication PIG$_H \Longrightarrow$ PIG$_k$ est fausse, même lorsque H/k est finie. On peut, par exemple, penser au cas du corps $k = \mathbb{Q}^{\text{tr}}$ des nombres algébriques totalement réels, corps sur lequel seuls les groupes finis engendrés par des involutions sont groupes et Galois (voir [FHV93]) et $H = \mathbb{Q}^{\text{tr}}(\sqrt{-1})$ dont le groupe de Galois absolu est prolibre (voir, par exemple, [GJ02, Remark 7.10(b)]). L'étude de la réciproque PIG$_k \Longrightarrow$ PIG$_H$ est plus commode : si l'on se donne une extension galoisienne L/k de groupe fini G telle que l'algèbre $M = L \otimes_k H$ soit un corps, alors un argument classique de théorie de Galois montre que M/H est une extension galoisienne de groupe G. Comme L/k est une extension algébrique, la condition "$L \otimes_k H$ est un corps" équivaut juste au fait que les extensions L/k et H/k sont linéairement disjointes sur k. Si l'on suppose l'extension H/k finie alors la linéaire disjonction peut s'interpréter de la manière suivante : on considère $(e_1, \ldots, e_n)$, une k-base de H et l'on considère la forme

$$P_H(x_1, \ldots, x_n) = N_{H/k}(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$$

où $N_{H/k}$ désigne la norme de l'extension H/k. Les extensions H/k et L/k sont alors linéairement disjointes sur k si et seulement si la forme P_H ne possède que le zéro trivial sur L. On peut donc considérer une variante du Problème Inverse de Galois :

PIG$\mathcal{F}$C$_k$ (Problème Inverse de Galois à $\mathcal{F}$-contrainte) : *Pour la k-forme $\mathcal{F}$ donnée, tout groupe fini G est-il le groupe de Galois d'une extension galoisienne L/k telle que $\mathcal{F}$ ne possède que le zéro trivial sur L ?*

Pour le choix de $\mathcal{F} = P_H$, on voit donc que $\mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_k \Longrightarrow \mathrm{PIG}_H$. En fait, un argument classique montre que, pour ce choix de $\mathcal{F}$, on a $\mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_k \Longleftrightarrow \mathrm{PIG}_k$[1], mais c'est la formulation $\mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_k$ qui va nous intéresser dans cet article.

Traditionnellement, les arithméticiens considèrent le(s) problème(s) inverse(s) de Galois pour des corps commutatifs. Nonobstant, la théorie de Galois possède une généralisation au cas non commutatif et il est donc possible de regarder le Problème Inverse de Galois dans le cas des corps gauches. La définition la plus générale d'extension galoisienne est celle donnée par Artin : une extension L/k est dite galoisienne si le corps des invariants de L sous l'action de $\mathrm{Aut}(L/k)$ est égal à k. C'est avec cette définition que s'entend la théorie de Galois des corps gauches. Le résultat central de cet article est le

Théorème A.— *Soient k un corps commutatif et H un corps de dimension finie sur son centre k. Si $\mathcal{F}$ désigne la k-forme associée à la norme réduite de l'extension H/k relativement au choix d'une k-base de H, alors on a l'équivalence*

$$\mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_k \Longleftrightarrow \mathrm{PIG}_H$$

Ainsi, en jouant sur les analogues "norme/norme réduite" pour la forme $\mathcal{F}$ et "commutatif/gauche de centre k" pour le corps H, on voit que l'on a toujours

$$\mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_k \Longrightarrow \mathrm{PIG}_H$$

mais, chose surprenante, l'implication $\mathrm{PIG}_H \Longrightarrow \mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_k$ n'est vraie en toute généralité que dans le cas non commutatif, comme nous l'avons illustré tout à l'heure.

La première partie de cet article est consacrée à la preuve du théorème A. Nous commençons cette partie par un bref rappel des éléments fondamentaux de la généralisation de la théorie de Galois au cas des corps gauches afin de faciliter la compréhension de ce texte aux arithméticiens non familiarisés à cette situation.

La deuxième partie de cet article s'intéresse plus particulièrement au cas de certains corps de fractions rationnelles tordus. Rappelons que, si H désigne un corps (commutatif ou non), on définit *l'anneau des polynômes tordu $H[t]$ à indéterminée centrale et à coefficients dans H* comme le H-espace vectoriel de base $\{t^n\}_{n\geq 0}$ sur lequel on considère le produit qui vérifie $at = ta$ pour tout $a \in H$. Il s'agit en fait, pour la construction de Ore (voir [Ore33]), de l'anneau de polynômes tordu $K[t,\alpha,\delta]$ obtenu en prenant pour δ la dérivation nulle et pour α l'endomorphisme identité. Cet anneau est un anneau de Ore et, en particulier, il possède un unique corps de fractions que l'on note $H(t)$ et que l'on appelle *le corps des fractions rationnelles tordu à indéterminée centrale et à coefficients dans H*. En tant que corps des fractions d'un anneau de Ore, le corps $H(t)$ jouit d'une propriété très forte : tous ses éléments peuvent s'écrire sous la forme $p(t)q(t)^{-1}$

[1]Notons n le nombre de corps intermédiaires de H/k. Pour un groupes G donné on considère une extension galoisienne L/k de groupe G^{n+1} et l'on considère le corps L_i des invariants de L par le sous-groupe de G^{n+1} obtenu en retirant le i-ème facteur direct. Les extensions L_i/k sont alors galoisiennes de groupe G et elles sont linéairement disjointes deux à deux sur k. Puisqu'elles sont au nombre de $n+1$, au moins l'une d'entre elle est d'intersection avec H réduite à k, c'est-à-dire linéairement disjointe de H sur k.

avec $p(t), q(t) \in H[t]$. Lorsque H est commutatif, le corps $H(t)$ obtenu est alors le classique corps des fractions rationnelles à coefficients dans H. Le théorème A montre alors que $\mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_{k(t)} \Longleftrightarrow \mathrm{PIG}_{H(t)}$ pour le choix de la forme $\mathcal{F}$ associée à la norme réduite de l'extension H/k.

Il existe une famille importante de corps commutatifs k pour lesquels le $\mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_{k(t)}$ admet une réponse positive pour toute k-forme $\mathcal{F}$ ne possédant pas de zéro sur le corps $k(t)$: c'est celle des corps amples. Il s'agit d'une propriété introduite par Pop dans [Pop96] et qui joue un rôle majeur en théorie inverse de Galois. Un corps commutatif k est dit *ample* si toute courbe lisse définie sur k et géométriquement irréductible possède une infinité de points k-rationnels dès qu'elle en possède au moins un. Parmi ces corps, on trouve les corps PAC[2] (e.g. les corps séparablement clos, le corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{tr}}(\sqrt{-1})$), les corps valués complets (e.g. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$, $\kappa((x))$), le corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{tp}}$ des nombres algébriques totalement p-adiques, le corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{tr}}$ des nombres algébriques totalement réels (voir les articles de survol [DD97], [BSF13] et [Pop14] pour plus de détails). Dans cette deuxième partie nous détaillons certains liens qui existent entre cette propriété d'amplitude et notre problématique. Ceci nous permet finalement de montrer le

Théorème B.— *Si k désigne un corps commutatif contenant un corps ample, alors le* $\mathrm{PIG}_{H(t)}$ *admet une réponse positive pour tout corps H de dimension finie sur son centre k*

Une première application de ce résultat, sans doute la plus simple, s'obtient en considérant $k = \mathbb{R}$: *tout groupe fini est groupe de Galois sur* $\mathbb{H}(t)$, où $\mathbb{H}$ désigne le corps des quaternions d'Hamilton. Mais le théorème B s'applique aussi à des corps ayant des gros groupes de Brauer (e.g. $\mathbb{Q}^{\mathrm{tr}}$, $\overline{k_0}(x_1,\ldots,x_n)$), ce qui montre l'étendue du champ d'application.

1.— Preuve du théorème A.

1.1.— Descente galoisienne.

Nous rappelons ici les résultats fondamentaux de la théorie de Galois. Dans le cas non commutatif, la présence d'automorphismes intérieurs perturbe un peu les choses. Cette perturbation se mesure de la manière suivante : si L est un corps de centre C et si L/K désigne une extension galoisienne de groupe G telle que l'une des dimensions de L en tant que K-espace vectoriel droite ou gauche soit finie, alors

1/ Les dimensions droite et gauche de L en tant que K-espace vectoriel sont égales (et l'on peut donc parler du degré $[L : K]$ de l'extension sans se soucier de quel coté l'on considère le K-espace vectoriel L).

2/ L'ensemble $A = \{a \in L^* \mid I(a) \in G\} \cup \{0\}$ est un corps (ici $I(a)$ désigne l'automorphisme de conjugaison intérieur associé à l'élément $a \in L^*$). L'ensemble A est en fait le commutant du corps K dans L.

3/ Si l'on considère $G_0 = \{I(a) \mid a \in A\}$ le sous-groupe de G composé des automorphismes intérieurs, alors on a

$$[L : K] = [G : G_0][A : C]$$

On voit qu'il peut donc exister des situations où $[L : K]$ est fini et où G est infini

[2] Un corps k est dit Pseudo Algébriquement Clos (PAC) si toute k-variété non vide et géométriquement irréductible a un ensemble Zariski dense de points k-rationnels.

(c'est par exemple le cas lorsque que l'on considère un corps L de dimension finie sur son centre K), on peut même trouver des exemples où G est fini mais où $|G| > [L : K]$ (voir [Des18]). Pour autant, une conséquence de la propriété 3/ est que l'on a $[L : K] = |G|$, dès que $G_0 = 1$ (ou de manière équivalente dès que le commutant A de K dans L est égal au centre $C = Z(L)$). Dans cette situation, on dit que l'extension L/K est *extérieure*. Dans la situation opposée où $G = G_0$, on dit que L/K est *intérieure*.

Venons-en maintenant aux correspondances galoisiennes. Pour les étudier nous allons avoir besoin de la notion de N-groupe. Un groupe G d'automorphismes d'un corps K est appelé N-groupe si l'ensemble

$$A(G,K) = \{x \in K^* / \ I(x) \in G\} \cup \{0\}$$

est un corps. Un sous-groupe S d'un N-groupe G sera dit N-invariant dans G, si le sous-N-groupe de G engendré par le normalisateur $N_G(S)$ de S dans G est égal à G tout entier. Si L/K désigne une extension galoisienne de degré fini alors

a) Les correspondances galoisiennes opèrent une bijection réciproque l'une de l'autre entre les sous-N-groupes de $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ et les extensions intermédiaires de L/K.

b) Si, par les correspondances galoisiennes, le sous-N-groupe S correspond à l'extension intermédiaire L_0, alors L/L_0 est galoisienne de groupe S. De plus, le groupe $\mathrm{Aut}(L_0/K)$ s'identifie au groupe quotient $N_G(S)/S$ et l'extension L_0/K est galoisienne si et seulement si S est N-invariant dans $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

On pourra trouver dans [Coh95, §3.3] un exposé complet de la théorie de Galois dans le cas non commutatif et le détail des preuves des propriétés que nous venons d'énoncer. On remarquera pour finir ce paragraphe de rappels, que dans le cas où les corps sont commutatifs, on retrouve exactement les théorèmes fondamentaux de la théorie de Galois usuelle.

Si l'on considère une extension galoisienne de degré fini M/K de groupe de Galois Γ et que l'on note Γ_0 l'ensemble des éléments de Γ qui sont des automorphismes intérieurs, alors Γ_0 est un sous-N-groupe de Γ qui est N-invariant (en fait normal). En posant $L = M^{\Gamma_0}$, on obtient alors la tour

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\Gamma_0", "\text{intérieure}"'] \\
L \arrow[d, dash, "\Gamma/\Gamma_0", "\text{extérieure}"'] \\
K
\end{tikzcd}$$

Ainsi, on peut toujours "découper" une extension galoisienne de degré fini M/K en une partie M/L intérieure et une partie L/K extérieure. Le théorème suivant s'intéresse à la situation duale :

Théorème 1.— *On suppose avoir une tour d'extensions de corps $M/L/K$ telle que M/L soit galoisienne extérieure de groupe fini G et L/K soit galoisienne intérieure de degré fini. Si $\widetilde{\widetilde{K}}$ désigne le bicommutant de K dans M, alors l'extension $\widetilde{\widetilde{K}}/K$ est une extension galoisienne extérieure de groupe G.*

Preuve : On pose $G_0 = \mathrm{Gal}(L/K)$, $\Gamma = \mathrm{Aut}(M/K)$ et l'on considère $\Gamma_0 \subset \Gamma$ le sous-groupe des éléments de Γ qui sont des automorphismes intérieurs. On a donc

$$\Gamma_0 = \{I(a)/\ a \in \widetilde{K}^*\} \simeq \widetilde{K}^*/Z(M)^*$$

(où, pour un sous-corps $K_0 \subset M$ donné, la notation $\widetilde{K_0}$ désigne le commutant de K_0 dans M).

1er point. Puisque M/L est extérieure, on a $\widetilde{L} \subset Z(M)$ et donc $Z(M) = \widetilde{L}$.

2ème point. L'extension M/K est galoisienne. En effet, le groupe G_0 se relève naturellement dans Γ_0 et l'on voit immédiatement que $M^{<G_0,G>} = K$.

3ème point. $<\Gamma_0, G> = \Gamma$. Puisque $M^{<\Gamma_0,G>} = K$, pour montrer que $<\Gamma_0, G> = \Gamma$ il suffit de montrer que $<\Gamma_0, G>$ est un N-groupe, c'est-à-dire de montrer que l'ensemble

$$A = \{a \in M^*/\ I(a) \in <\Gamma_0, G>\} \cup \{0\}$$

est un corps. Mais, par définition même de Γ_0, on a que $I(a) \in <\Gamma_0, G> \subset \Gamma$ si et seulement si $I(a) \in \Gamma_0$ et donc

$$A = \{a \in M^*/\ I(a) \in \Gamma_0\} \cup \{0\} = \widetilde{K}$$

qui est bien un corps.

4ème point. $\Gamma_0 \triangleleft \Gamma$ et $<\Gamma_0, G> = \Gamma_0 \rtimes G$. En effet, si $\sigma \in \Gamma$ et $I(a) \in \Gamma_0$, on a $\sigma \circ I(a) \circ \sigma^{-1} = I(\sigma(a)) \in \Gamma_0$. Par ailleurs, si $\sigma = I(a) \in \Gamma_0 \cap G$ alors, pour tout $x \in L$, on a $\sigma(x) = axa^{-1} = x$ et donc $a \in \widetilde{L}$. D'après le point 1, on a $Z(M) = \widetilde{L}$ et l'on en déduit que $\sigma = \mathrm{Id}$. L'action de G sur Γ_0 dans le produit semi-direct $\Gamma_0 \rtimes G$ se décrit en identifiant Γ_0 au groupe quotient $\widetilde{K}^*/Z(M)^*$: pour tout $\sigma \in G$ et $\overline{\alpha} \in \widetilde{K}^*/Z(M)^*$, $\overline{\alpha}^\sigma = \sigma(\alpha)$.

Conclusion. Le groupe Γ_0 est donc un sous-N-groupe N-invariant de Γ et la théorie de Galois assure alors que M^{Γ_0}/K est galoisienne de groupe $\Gamma/\Gamma_0 = (\Gamma_0 \rtimes G)/\Gamma_0 \simeq G$, d'après le point 4. Le dernier point consiste à remarquer que

$$x \in M^{\Gamma_0} \Longleftrightarrow \forall a \in \widetilde{K},\ ax = xa \Longleftrightarrow x \in \widetilde{\widetilde{K}}$$

□

Corollaire 2.— (Descente galoisienne) *Soit H un corps de dimension finie sur son centre k. Si M/H désigne une extension galoisienne de groupe fini G, alors l'extension (commutative) $Z(M)/k$ est galoisienne de groupe G. Par ailleurs, le corps M est alors isomorphe au produit tensoriel $H \otimes_k Z(M)$.*

Preuve : Commençons par montrer que l'extension M/H est extérieure en supposant par l'absurde le contraire. Comme M/H est de groupe fini, d'après [Des18, Théorème du §2], le centre C de M est un corps fini. Or, M est un corps de dimension (droite ou gauche) finie sur le corps commutatif k et donc, M est aussi de dimension finie sur son centre C (voir par exemple [Des01, Lemme 2.1.]). Ainsi, M est lui-même un corps fini, et donc l'extension M/H est commutative et, par suite, extérieure.

On peut donc appliquer le théorème 1, en posant $K = k$ et $L = H$. L'extension $\widetilde{\widetilde{k}}/k$ est alors galoisienne de groupe G. Puisque $Z(H) = k$, on a $H \subset \widetilde{k}$ et donc $\widetilde{\widetilde{k}} \subset \widetilde{H} = Z(M)$ (la dernière égalité vient du fait que M/H est extérieure). En reprenant les notations de la preuve du théorème, on a $\widetilde{\widetilde{k}} = M^{\Gamma_0}$. Comme Γ_0 est composé uniquement d'automorphismes intérieurs, on voit que $Z(M) \subset M^{\Gamma_0}$, ce qui prouve finalement que $\widetilde{\widetilde{k}} = Z(M)$.

On se retrouve avec les extensions suivantes

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, dash, "n"', "G"] \arrow[dr, dash, "m^2"] & \\
H \arrow[dr, dash, "m^2"'] & & Z(M) \arrow[dl, dash, "n", "G"'] \\
 & k &
\end{tikzcd}$$

On considère une k-base $e_1, \cdots, e_{m^2}$ de $H \subset M$ que l'on ordonne de sorte $e_1, \cdots, e_i$ soit une famille $Z(M)$-libre (i.e. linéairement indépendante sur $Z(M)$) maximale pour un certain indice i. Si $i \neq m^2$, alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_i \in Z(M)$ tel que $e_{i+1} = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i e_i$. Puisque tous les e_j sont dans H, on a pour tout $\sigma \in G$,

$$e_{i+1} = \sigma(\lambda_1)e_1 + \cdots + \sigma(\lambda_i)e_i$$

Par nature même du centre d'un corps, tout automorphisme de M induit un automorphisme de $Z(M)$ et comme $e_1, \cdots, e_i$ est $Z(M)$-libre, on en déduit finalement que pour tout $j = 1, \cdots, i$ on a

$$\forall \sigma \in G,\ \sigma(\lambda_j) = \lambda_j$$

Ceci prouve que $\lambda_j \in k$ pour tout $j = 1, \cdots, i$, ce qui constitue une absurdité, car $e_1, \cdots, e_{i+1}$ est k-libre. Ainsi, la famille $e_1, \cdots, e_{m^2}$ est une $Z(M)$-base de M. Par ailleurs, les tenseurs $e_1 \otimes 1, \cdots, e_{m^2} \otimes 1$ forment aussi une $Z(M)$-base de $H \otimes_k Z(M)$. L'application $H \otimes_k Z(M) \longrightarrow M$ obtenue par propriété universelle du produit tensoriel est donc un isomorphisme de $Z(M)$-algèbres. Ceci prouve bien que $H \otimes_k Z(M)$ est un corps, isomorphe à M.

□

Une conséquence de ce qui précède est alors :

Corollaire 3.— *Pour tout corps H de dimension finie sur son centre k, on a* $\mathrm{PIG}_H \Longrightarrow \mathrm{PIG}_k$.

1.2.— Extension des scalaires.

On s'intéresse dans cette partie à une réciproque du corollaire 2. On se donne donc un corps H de dimension finie sur son centre k et l'on considère L/k, une extension galoisienne de corps commutatifs de groupe fini G. Le corollaire 2 assure que s'il existe une extension galoisienne M/H de groupe fini telle que $L = Z(M)$, alors on a nécéssairement $M = H \otimes_k L$. On va donc étudier ce genre de produits tensoriels, mais pour bien les comprendre, nous allons commencer par rappeler quelques propriétés sur l'extension des scalaires d'une algèbre simple centrale :

On se donne un corps commutatif infini k et une k-algèbre simple centrale $\mathscr{A}$. On note $n^2 = [\mathscr{A} : k]$ et l'on se donne, une fois pour toute, une k-base $(e_1, \cdots, e_{n^2})$ de $\mathscr{A}$. Si L/k désigne une extension de corps commutatifs (sans hypothèse de finitude ni même d'algébricité), l'algèbre obtenue de $\mathscr{A}$ par *extension des scalaires à L* est par définition la k-algèbre tensorisée $\Omega = \mathscr{A} \otimes_k L$. On peut plonger L dans Ω en l'identifiant à $k \otimes_k L$. Il est alors clair que L est inclus dans le centre, $Z(\Omega)$, de Ω de sorte que l'algèbre Ω peut être considérée comme une L-algèbre. Si l'on note $\tilde{e_i} = e_i \otimes 1$ pour tout $i = 1, \cdots, n^2$, on voit que $(\tilde{e_1}, \cdots, \tilde{e_{n^2}})$ est une L-base de Ω. On a en particulier $[\Omega : L] = [\mathscr{A} : k] = n^2$. Il est facile de voir qu'en fait, Ω eſt une L-algèbre simple centrale : le produit tensoriel d'une k-algèbre simple centrale par une k-algèbre simple eſt une k-algèbre simple (voir par exemple [Bla72, Théorème II-3]) et le centre d'un produit tensoriel de k-algèbres eſt le produit tensoriel des centres (voir par exemple [Bla72, Corollaire II-7]).

Rappelons que la norme réduite de $\mathscr{A}/k$ eſt définie de la manière suivante : on commence par se donner un corps neutralisant D de la k-algèbre $\mathscr{A}$. Par définition, il exiſte un isomorphisme $\varphi : \mathscr{A} \otimes_k D \longrightarrow \mathscr{M}_n(D)$. La norme réduite $\mathrm{Nrd}_{\mathscr{A}/k}$ eſt alors la composée des applications :

$$\mathrm{Nrd}_{\mathscr{A}/k} : \mathscr{A} \xrightarrow{a \mapsto a\otimes 1} \mathscr{A} \otimes_k D \xrightarrow{\varphi} \mathscr{M}_n(D) \xrightarrow{\det} D$$

Cette application ne dépend, ni du corps neutralisant D, ni de l'isomorphisme φ et elle eſt en fait à valeurs dans k. Une propriété importante de la norme réduite eſt qu'un élément $x \in \mathscr{A}$ eſt inversible si et seulement si $\mathrm{Nrd}_{\mathscr{A}/k}(x) \neq 0$ (toutes ces propriétés sont présentées dans [Bou12]). L'application $\mathcal{F}_{\mathscr{A}}(x_1, \cdots, x_{n^2}) \in k[x_1, \cdots, x_{n^2}]$ définie pour tout $(x_1, \cdots, x_{n^2}) \in k^{n^2}$, par

$$\mathcal{F}_{\mathscr{A}}(x_1, \cdots, x_{n^2}) = \mathrm{Nrd}_{\mathscr{A}/k}(x_1 e_1 + \cdots + x_{n^2} e_{n^2})$$

eſt une k-forme de degré n que l'on appellera *la forme associée à la norme réduite* $\mathrm{Nrd}_{\mathscr{A}/k}$ *relativement au choix de la k-base $(e_1, \cdots, e_{n^2})$ de $\mathscr{A}$.* Par exemple, si $\mathscr{A} = \mathbb{H}_k$ désigne l'algèbre des quaternions à coefficients dans le corps k, alors la norme réduite d'un élément $x = a + bu + cv + dw$ (où $u^2 = v^2 = w^2 = uvw = -1$) vaut la traditionnelle norme des quaternions $q(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, de sorte que, pour la choix de la k-base $\{1, u, v, w\}$ de $\mathbb{H}_k$, on a

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}_k}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Une des propriétés importantes que nous allons exploiter dans la suite eſt donnée par le

Lemme 4.— *Avec les notations précédentes (on a notamment posé $\Omega = \mathscr{A} \otimes_k L$), les formes $\mathcal{F}_{\mathscr{A}}$ et $\mathcal{F}_{\Omega}$ sont égales.*

Preuve : On considère la clôture algébrique $\overline{L}$ de L. Il exiſte un k-isomorphisme

$$\varphi : \Omega \otimes_L \overline{L} = (\mathscr{A} \otimes_k L) \otimes_L \overline{L} \longrightarrow \mathscr{A} \otimes_k \overline{L}$$

que l'on peut choisir avec la propriété que $\varphi((a \otimes 1) \otimes 1) = a \otimes 1$. Le corps $\overline{L}$ eſt un corps neutralisant de la k-algèbre $\mathscr{A}$ et de la L-algèbre Ω, si bien qu'il exiſte un isomorphisme $\psi : \mathscr{A} \otimes_k \overline{L} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\overline{L})$. Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, "f", "a\mapsto a\otimes 1"'] \arrow[d, "a\mapsto a\otimes 1"', "\theta"] & \mathscr{A} \otimes_k \overline{L} \arrow[r, "\psi"] & \mathscr{M}_n(\overline{L}) \arrow[r, "\det"] & \overline{L} \\
\mathscr{A} \otimes_k L \arrow[r, "g", "x\mapsto x\otimes 1"'] & (\mathscr{A} \otimes_k L) \otimes_L \overline{L} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi\circ\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

eſt alors commutatif. Comme $\mathrm{Nrd}_{\mathscr{A}/k} = \det \circ \psi \circ f$ et $\mathrm{Nrd}_{\Omega/L} = \det \circ (\psi \circ \varphi) \circ g$, on en déduit que

$$\mathrm{Nrd}_{\mathscr{A}/k} = \mathrm{Nrd}_{\Omega/L} \circ \theta$$

Pour tout $(x_1, \cdots, x_{n^2}) \in k^{n^2}$, on a $\theta(x_1 e_1 + \cdots + x_{n^2} e_{n^2}) = x_1 \tilde{e_1} + \cdots + x_{n^2} \tilde{e_{n^2}}$ et donc

$$\mathcal{F}_{\mathscr{A}}(x_1, \cdots, x_{n^2}) = \mathcal{F}_{\Omega}(x_1, \cdots, x_{n^2})$$

Puisque le corps k est infini, on en conclut que $\mathcal{F}_{\mathscr{A}} = \mathcal{F}_{\Omega}$, par Zariski-densité.

□

Dans le cas où $\mathscr{A} = H$ désigne un corps, le lemme 4 permet alors de caractériser arithmétiquement le cas où $H \otimes_k L$ est un corps :

Proposition 5.— *Soient H un corps de dimension finie sur son centre k, $\mathcal{F}_H$ la forme associée à la norme réduite de H/k relativement au choix d'une k-base et L/k une extension de corps commutatifs. On a l'équivalence*

$$H \otimes_k L \text{ est un corps} \Longleftrightarrow \text{la forme } \mathcal{F}_H \text{ ne possède que le zéro trivial sur } L$$

Preuve : Comme rappelé au début de ce paragraphe, l'algèbre $M = H \otimes_k L$ est une L-algèbre simple centrale et un élément $x \in M$ est inversible si et seulement si on a $\mathrm{Nrd}_{M/L}(x) \neq 0$. Puisque d'après le lemme 4 on a $\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_H$, l'égalité $\mathrm{Nrd}_{M/L}(x) = 0$ a lieu pour $x \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{F}_H$ possède un zéro non trivial sur L.

□

Revenons maintenant à la réciproque du corollaire 2.

Proposition 6.— (Extension galoisienne des scalaires) *Soit H un corps de dimension finie sur son centre k et L/k une extension galoisienne de corps commutatifs de groupe fini G. Si $M = H \otimes_k L$ est un corps, alors l'extension M/H est galoisienne extérieure de groupe G.*

Preuve : On note $\Gamma = \mathrm{Aut}(M/H)$. Puisque $[M : L] = [H : k] = n^2$, on a

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
& M \arrow[dl, "\Gamma"'] \arrow[dr, "n^2"] & \\
H \arrow[dr, "n^2"] & & L \arrow[dl, "G"] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/k)$, on considère l'application $\tilde{\sigma} : H \otimes_k L \longrightarrow H \otimes_k L$ définie sur les tenseurs $x \otimes t$ par

$$\tilde{\sigma}(x \otimes t) = x \otimes \sigma(t)$$

Puisque σ est un k-automorphisme de L, on voit que $\tilde{\sigma} \in \Gamma$. L'application $\sigma \longmapsto \tilde{\sigma}$ est visiblement un morphisme de groupes et, comme L s'identifie à $k \otimes_k L$ dans $H \otimes_k L$, on voit que $\tilde{\sigma} = \mathrm{Id}$ seulement si $\sigma = \mathrm{Id}$. Ainsi, G se plonge dans Γ. Il est clair que le sous-corps des éléments invariants de M par l'action de l'image de G dans Γ est égal à $H \otimes_k k = H$. Il s'ensuit que l'extension M/H est bien galoisienne.

Il reste à montrer que Γ n'est pas un groupe plus gros que l'image de G. Puisque $[M : L] = [H : k]$, par transivité des degrés (ici droites ou gauches indistinctement, puisque l'extension M/H est galoisienne) on a que $[M : H] = [L : k]$. Le commutant de $H = H \otimes_k k$ dans $M = H \otimes_k L$ est égal à $k \otimes_k L = L = Z(M)$ (le commutant d'un produit tensoriel est égal au produit tensoriel des commutants, voir par exemple [Bla72, Proposition II-16]). Il résulte de ce dernier fait que l'extension M/H est extérieure et, en vertu des propriétés générales de la théorie de Galois des corps gauches rappelées dans le §1.1., on a donc

$$|\Gamma| = [M : H] = [L : k] = |G|$$

Puisque G se plonge dans Γ, on en déduit finalement que $\Gamma = G$.

□

On voit donc que réaliser G sur H revient juste à réaliser G par une extension de corps commutatifs L/k de sorte que $H \otimes_k L$ soit un corps. Par exemple, si l'on reprend l'algèbre de quaternions $\mathbb{H}_k$, alors la proposition 5 montre que $\mathbb{H}_k \otimes_k L$ est un corps, si et seulement si L est de niveau[3] $\nu(L) \geq 4$. En effet, dire que la forme $\mathcal{F}_{\mathbb{H}_k}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ possède un zéro non trivial sur L équivaut à dire que -1 est somme de trois carrés dans L. On voit, en particulier, que $\mathbb{H}_k \otimes_k L$ est un corps dès que L est ordonnable. Puisque $k = \mathbb{R}$ est un corps réel clos on en déduit que le corps des quaternion d'Hamilton $\mathbb{H} = \mathbb{H}_\mathbb{R}$ ne possède aucun extension galoisienne finie non triviale (en fait $\mathbb{H}$ ne possède aucune extension finie non triviale, voir [Des01]).

En application du corollaire 2 et des propositions 5 et 6, on déduit le

Théorème 7.— *Soient H un corps de dimension finie sur son centre k, $\mathcal{F}_H$ la forme associée à la norme réduite de H/k relativement au choix d'une k-base de H et G un groupe fini. Pour qu'il existe une extension galoisienne M/H de groupe G il faut et il suffit qu'il existe une extension galoisienne L/k de groupe G telle que $\mathcal{F}_H$ ne possède que le zéro trivial sur L. Dans ces conditions, on a alors $Z(M) = L$ et $M = H \otimes_k L$.*

d'où découle le théorème A énoncé dans l'introduction.

2.— Applications aux corps des fractions tordus.

On souhaite maintenant appliquer ce qui précède au cas des corps de fractions rationnelles tordus à indéterminée centrale et à coefficients dans H lorsque H est un corps de dimension finie sur son centre k. Ce cas rentre parfaitement dans le cadre d'étude du paragraphe 1 puisque, comme nous allons le voir plus bas, $H(t)$ est une $k(t)$-algèbre simple centrale. Etablissons préalablement un lemme utile pour la suite de ce texte :

Lemme 8.— *Soient k un corps commutatif et $\mathcal{F}$ une forme à coefficients dans k. Si $\mathcal{F}$ ne possède que le zéro trivial sur k, alors il en est de même sur le corps $k((t))$ des séries de Laurent à coefficients dans k.*

Preuve : Supposons que $\mathcal{F} \in k[x_1, \cdots, x_d]$ possède un zéro non trivial $(r_1(t), \dots, r_d(t)) \in k((t))^d$. Quitte à factoriser par la puissance de t correspondant à la plus petite des valuations des séries $r_i(t)$, on peut supposer que $(r_1(t), \dots, r_d(t)) \in k[[t]]^d$ et qu'au moins un des $r_i(t)$ est de valuation nulle. En posant $t = 0$, on voit que $(r_1(0), \dots, r_d(0)) \in k^d$ est alors un zéro non trivial de $\mathcal{F}$.

□

Proposition 9.— *L'algèbre $H \otimes_k k(t)$ est un corps, isomorphe au corps $H(t)$ des fractions rationnelles tordu à indéterminée centrale.*

Preuve : On reprend les notations du §1.2. L'algèbre $H \otimes_k k(t)$ est une $k(t)$-algèbre simple centrale et le lemme 4 assure que l'on a $\mathcal{F}_{H \otimes_k k(t)} = \mathcal{F}_H$. Puisque H est un corps, la forme $\mathcal{F}_H$ ne possède que le zéro trivial sur k et le lemme 8 prouve qu'il en est alors de même

[3] Rappelons que le niveau, $\nu(L)$, d'un corps commutatif L est, $+\infty$ si -1 n'est pas une somme de carrées dans L (la théorie d'Artin-Schreier montre que cette propriété équivaut au fait d'être ordonnable pour L, voir [Rib72]), et dans le cas contraire, le niveau est le plus petit entier n tel que -1 soit la somme de n carrés dans L.

sur $k(t)$. Il découle alors de la proposition 5 que l'algèbre $H \otimes_k k(t)$ est bien un corps.

Par propriété universelle du produit tensoriel, l'application

$$(a, r(t)) \in H \times k(t) \longmapsto a.r(t) \in H(t)$$

définit un morphisme de k-espaces vectoriels $\psi : H \otimes_k k(t) \longrightarrow H(t)$. Par définition, dans $H(t)$, on a $a.r(t) = r(t).a$ et l'on voit donc que ψ est un morphisme de k-algèbres. Ce dernier est alors injectif puisque $H \otimes_k k(t)$ est un corps. Il est clair que ψ identifie les anneaux $H \otimes_k k[t]$ et $H[t]$. Comme déjà rappelé dans l'introduction, les éléments de $H(t)$ s'écrivent sous la forme $p(t)q(t)^{-1}$ avec $p(t), q(t) \in H[t]$. Puisque $H \otimes_k k(t)$ est un corps, on en déduit finalement que ψ est aussi surjectif.

□

Avec les notations précédentes, on a donc $\mathcal{F}_{H(t)} = \mathcal{F}_H$ et, par application du théorème A, on en déduit que $\mathrm{PIG}\mathcal{F}_H\mathrm{C}_{k(t)} \Longleftrightarrow \mathrm{PIG}_{H(t)}$. Le lemme 8 montre que, pour toute k-forme $\mathcal{F}$ ne possédant que le zéro trivial sur k, on a l'implication

$$(1) \quad \mathrm{PIGFR}_k \Longrightarrow \mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_{k(t)}$$

où PIGFR_k désigne la variante du $\mathrm{PIG}_{k(t)}$ suivante :

PIGFR_k (Problème Inverse de Galois Fortement Régulier) : *tout groupe fini G est-il groupe de Galois d'une extension galoisienne $L/k(t)$ telle que L se plonge dans le corps $k((t))$?*

D'un point de vue géométrique, le PIGFR_k équivaut à savoir si, pour tout groupe fini G, il existe un revêtement galoisien $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de groupe G, défini sur k et tel que la courbe X soit géométriquement irréductible et possède un point k-rationnel non ramifié. Lorsque k est ample, pour $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ donné, l'existence d'un point k-rationnel non ramifié est en fait équivalente à l'existence d'au moins un point k-rationnel. Si l'on retire à cette formulation géométrique du PIGFR_k l'hypothèse d'existence d'un point k-rationnel, on retombe sur le classique

PIGR_k (Problème Inverse de Galois Régulier) : *tout groupe fini est-il groupe de Galois d'une extension galoisienne $L/k(t)$ telle que $L \cap \overline{k} = k$?*

et l'on a donc l'implication

$$(2) \quad \mathrm{PIGFR}_k \Longrightarrow \mathrm{PIGR}_k$$

ce qui justifie la terminologie "fortement régulier" pour le PIGFR. Il est conjecturé que le PIGR admet une réponse positive pour tout corps mais personne ne s'est encore aventuré à conjecturer qu'il en était de même pour le PIGFR. La littérature ne contient, à l'heure actuelle, aucun exemple de corps commutatif ayant une réponse négative à ce problème.

Proposition 10.— *Pour toute extension de corps commutatifs L/k, on a l'implication*

$$\mathrm{PIGFR}_k \Longrightarrow \mathrm{PIGFR}_L$$

En particulier, si le corps k contient un corps ample alors le PIGFR_k *admet une réponse positive.*

Preuve : Fixons un groupe fini G et un élément transcendant t sur L. Par hypothèse, il existe une extension galoisienne $M/k(t)$ de groupe G telle que M se plonge dans $k((t)) \subset L((t))$. Cette dernière condition entraîne $M \cap \overline{k} = k$. L'extension galoisienne $ML/L(t)$ est alors galoisienne de groupe G, même si L/k n'est pas nécessairement algébrique (voir, par exemple, [FJ08, Lemma 16.2.1] ou [Dèb09, Proposition 2.3.2]), et l'on a $ML \subseteq L((t))$.

Le fait que le PIGFR_k admette alors une réponse positive lorsque k est ample fut démontré par Pop dans [Pop96] (voir aussi [HJ98, Theorem C]). Ce résultat prouve la fin de la proposition.

□

Le théorème B de l'introduction découle finalement de tous ces résultats : si le corps k contient un corps ample, alors la proposition 10 assure que le PIGFR_k admet une réponse positive et l'implication (1) montre qu'il en est de même du $\mathrm{PIG}\mathcal{F}_H\mathrm{C}_{k(t)}$. Le théorème A permet alors de conclure.

Pour compléter les liens implicatifs que nous avons établis, notons le résultat suivant (qui est trivial dans le cas des corps commutatifs) :

Proposition 11.— *Si H désigne un corps gauche de dimension finie sur son centre k alors* $\mathrm{PIG}_H \Longrightarrow \mathrm{PIG}_{H(t)}$.

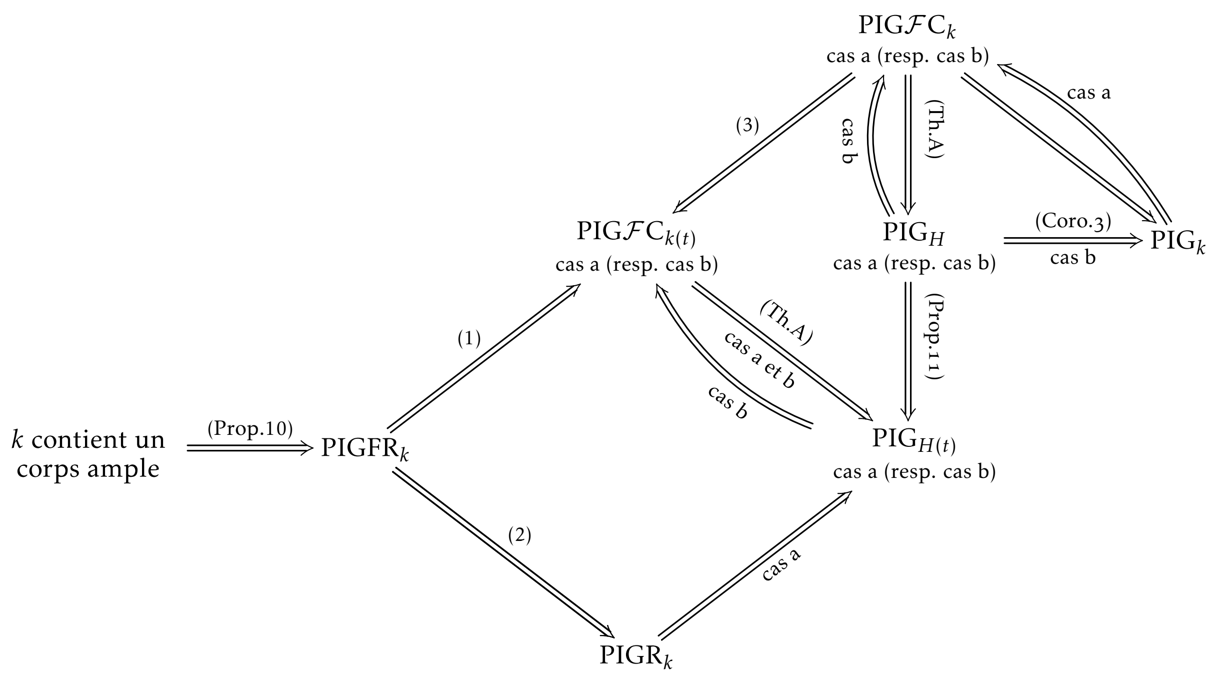
Preuve : Considérons une k-forme $\mathcal{F}$ ne possédant que le zéro trivial sur k et un groupe fini G. S'il existe une extension galoisienne L/k de groupe G telle que $\mathcal{F}$ ne possède que le zéro trivial sur L alors l'extension $L(t)/k(t)$ est galoisienne de groupe G et le lemme 8 montre que $\mathcal{F}$ ne possède que le zéro trivial sur $L(t)$. On a donc l'implication

$$(3) \quad \mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_k \Longrightarrow \mathrm{PIG}\mathcal{F}\mathrm{C}_{k(t)}$$

La proposition découle alors du théorème A en exploitant l'implication ci-dessus pour le choix de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_H = \mathcal{F}_{H(t)}$.

□

Le diagramme d'implications suivant résume les résultats établis dans ce texte :



Cas a (resp. Cas b) : H est un corps commutatif (resp. gauche) de dimension finie sur k (resp. sur son centre k) et $\mathcal{F}$ désigne la forme associée à la norme (resp. la norme réduite) de H/k relativement au choix d'une k-base de H.

Nous donnons enfin quelques exemples de groupes finis se réalisant comme groupes de Galois sur $H(t)$ sans supposer que le centre de H ne contienne de corps ample :

Proposition 12.— *Soient G un groupe fini et H un corps de dimension finie sur son centre k. Dans chacun des cas suivants, G est le groupe de Galois d'une extension galoisienne de $H(t)$:*

1/ G est abélien,

2/ $G = S_n$ ($n \geq 3$) et k est infini,

3/ $G = A_n$ ($n \geq 4$) et k est de caractéristique nulle,

4/ G est résoluble et k est de caractéristique strictement positive.

Preuve : Il suffit, dans chaque cas, de trouver un sous-corps k_0 de k et une extension galoisienne $L/k_0(t)$ de groupe G telle que L se plonge dans le corps $k_0((t))$. L'extension $Lk/k(t)$ est alors une galoisienne de groupe G qui se plonge dans $k((t))$. Ccette hypothèse de plongement permet alors, grâce au lemme 8, d'appliquer le théorème 7 au corps $H(t)$.

1/ Si G est abélien, cette propriété est vraie sur le corps k, en tant que conséquence bien connue du *twisting lemma* (voir [Dèb99a] et [Dèb09, Proposition 3.2.4]) et de l'existence d'une extension galoisienne $L/k(t)$ de groupe G telle que l'idéal $\langle t \rangle$ de $\overline{k}[t]$ ne se ramifie pas dans l'extension $L\overline{k}/\overline{k}(t)$ (voir [Dèb99b]).

2/ Puisque k est infini, il possède un sous-corps k_0 qui est soit ample, soit hilbertien. En effet, si k est de caractéristique nulle, on peut prendre $k_0 = \mathbb{Q}$. Si k est de caractéristique $p > 0$ il est alors, soit extension algébrique infinie du corps $\mathbb{F}_p$ et donc $k_0 = k$ est un corps PAC (voir [FJ08, Corollary 11.2.4]), soit une extension du corps de fractions rationnelles $k_0 = \mathbb{F}_p(x)$ qui est hilbertien. Le cas ample ayant déjà été traité de manière plus générale, on suppose désormais que k_0 est hilbertien. On se donne alors un polynôme unitaire séparable $P_0(x) \in k_0[x]$ de degré n et dont toutes les racines sont dans k_0, et un polynôme unitaire $P_1(x) \in k_0[x]$ de degré n et de groupe de Galois S_n sur k_0 (un tel polynôme existe par [FJ08, Corollary 16.2.7]). Par interpolation polynomiale, il existe un polynôme unitaire $P(t,x) \in k_0[t][x]$ de degré n tel que $P(0,x) = P_0(x)$ et $P(1,x) = P_1(x)$. Notons L le corps de décomposition sur $k_0(t)$ de $P(t,x)$. Puisque $P(0,x)$ est séparable et a toutes ses racines dans k_0, le corps L se plonge dans $k_0((t))$. Enfin, puisque $P(1,x)$ possède S_n comme groupe de Galois sur k_0, le groupe de Galois de $L/k_0(t)$ vaut également S_n.

3/ Ici $k = k_0$ convient. En effet, fixons un polynôme unitaire séparable $P(x) \in k[x]$ de degré n et dont toutes les racines sont dans k. Par [KM01, Theorem 3], il existe un polynôme unitaire $P(t,x) \in k[t][x]$ tel que, si L est le corps de décomposition sur $k(t)$ de $P(t,x)$, alors $\mathrm{Gal}(L/k(t)) = A_n$ et le corps de décomposition sur k de $P(0,x)$ est égal à celui de $P(x)$, c'est-à-dire à k. Comme $P(x)$ est séparable, cela entraîne que L se plonge dans $k((t))$.

4/ La propriété est vraie pour k_0 égal au sous-corps premier de k, en tant que conséquence de [NSW08, p. 597, Exercise (a)].

□

Pour conclure cet article, soulignons que si PIG est tout à fait légitime pour les corps gauches, le problème régulier et toutes les autres variantes que nous avons introduites dans ce texte n'ont pas de sens *a priori*. Il faut avoir à l'esprit que les notions d'éléments algébriques et de clôture algébrique n'ont rien de naturel pour un corps gauche. Ce point rend beaucoup plus délicat l'approche au cas non commutatif de la théorie de Galois. A titre d'exemple, il est ainsi montré dans [Des01] que les extensions finies d'un corps algébriquement clos $\overline{k}$ de caractéristique 0 sont toutes de degré 2 et qu'il en existe une infinité non isomorphes deux à deux. Dans cette situation, si l'on plonge deux telles extensions dans un corps, alors le compositum est nécessairement de degré infini sur $\overline{k}$.

Bibliographie

[Bla72] André Blanchard. *Les corps non commutatifs. (French)*. Collection Sup : Le Mathématicien, No. 9. Presses Universitaires de France, Vendôme, 1972. 135 pp.

[Bou12] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples. (French)*. Springer, Berlin, 2012. x+489 pp. Second revised version of the 1958 edition.

[BSF13] Lior Bary-Soroker and Arno Fehm. Open problems in the theory of ample fields. In *Geometric and differential Galois theories*, volume 27 of *Sémin. Congr.*, pages 1–11. Soc. Math. France, Paris, 2013.

[Coh95] Paul Moritz Cohn. *Skew fields. Theory of general division rings*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 57. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi + 500 pp.

[DD97] Pierre Dèbes and Bruno Deschamps. The regular inverse Galois problem over large fields. In *Geometric Galois actions, 2*, volume 243 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 119–138. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[Dèb99a] Pierre Dèbes. Galois covers with prescribed fibers: the Beckmann-Black problem. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 28(2):273–286, 1999.

[Dèb99b] Pierre Dèbes. Regular realization of abelian groups with controlled ramification. In *Applications of curves over finite fields (Seattle, WA, 1997)*, volume 245 of *Contemp. Math.*, pages 109–115. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Dèb09] Pierre Dèbes. *Arithmétique des revêtements de la droite*. Lecture notes, 2009. At http://math.univ-lille1.fr/~pde/ens.html.

[Des01] Bruno Deschamps. A propos d'un théorème de Frobenius. (French). *Ann. Math. Blaise Pascal*, 8(2):61–66, 2001.

[Des18] Bruno Deschamps. Des extensions plus petites que leurs groupes de Galois. (French). *Comm. Algebra*, 46(10):4555–4560, 2018.

[FHV93] Michael D. Fried, Dan Haran, and Helmut Völklein. Absolute Galois group of the totally real numbers. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317(11):995–999, 1993.

[FJ08] Michael D. Fried and Moshe Jarden. *Field arithmetic*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 11. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2008. Revised by Jarden. xxiv + 792 pp.

[GJ02] Wulf-Dieter Geyer and Moshe Jarden. PSC Galois extensions of Hilbertian fields. *Math. Nachr.*, 236:119–160, 2002.

[HJ98] Dan Haran and Moshe Jarden. Regular split embeddings problems over complete valued fields. *Forum Math.*, 10(3):329–351, 1998.

[KM01] Jürgen Klüners and Gunter Malle. A database for field extensions of the rationals. *LMS J. Comput. Math.*, 4:182–196, 2001.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008. xvi+825 pp.

[Ore33] Oystein Ore. Theory of non-commutative polynomials. *Ann. of Math. (2)*, 34(3):480–508, 1933.

[Pop96] Florian Pop. Embedding problems over large fields. *Ann. of Math. (2)*, 144(1):1–34, 1996.

[Pop14] Florian Pop. Little survey on large fields - old & new. In *Valuation theory in interaction*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 432–463. Eur. Math. Soc., Zürich, 2014.

[Rib72] Paulo Ribenboim. *L'arithmétique des corps. (French)*. Hermann, Paris, 1972. 245 pp.

Bruno Deschamps
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139
Université de Caen - Normandie
BP 5186, 14032 Caen Cedex - France

Département de Mathématiques — Le Mans Université
Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9 - France
E-mail : Bruno.Deschamps@univ-lemans.fr

François Legrand
Institut für Algebra, Fachrichtung Mathematik
TU Dresden, 01062 Dresden, Germany
E-mail : francois.legrand@tu-dresden.de