Synchrosqueezing temporel d'ordre 2 de la transformée de Fourier à court terme

Dominique FOURER[1], François AUGER[2]

[1]IBISC, UEVE/Paris-Saclay
40, rue du Pelvoux, 91080 Courcourrones, France

[2]IREENA - CRTT
37, boulevard de l'université, 44600 Saint-Nazaire, France
dominique@fourer.fr, francois.auger@univ-nantes.fr

Résumé – Cet article a pour thématique la représentation des signaux non-stationaires et multicomposantes conjointement en temps et en fréquence. Dans ce but, nous introduisons une nouvelle méthode reposant sur le synchrosqueezing temporel qui permet de calculer des représentations inversibles plus précises pour des signaux impulsionnels ou fortement modulés en fréquence. Dans un premier temps, nous proposons un estimateur amélioré de retard de groupe pour lequel nous établissons des liens théoriques avec un estimateur de modulation linéaire de fréquence. Ensuite, nous illustrons par des représentations discrétisées en temps et en fréquence les améliorations apportées par notre méthode lorsqu'elle est appliquée sur des signaux synthétiques.

Abstract – This paper aims at efficiently representing non-stationary multicomponent signals jointly in time and frequency. To this end, we introduce a new method based on the time-reassigned synchrosqueezing which allows to compute reversible and sharpened representations of impulsive or strongly frequency-modulated signals. First, we propose an enhanced group-delay estimator for which we establish a theoretical link with a chirp rate estimator. Second, we illustrate with time- and frequency-discretized representations the improvement brought by our proposal when it is applied on synthetic signals.

1 Introduction

L'analyse temps-fréquence et temps-échelle [1, 2] vise à développer des outils efficaces permettant de traiter des signaux non-stationnaires et multicomposantes. La Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) et la Transformée en Ondelettes Continue (TOC) [3] comptent parmi les transformées linéaires les plus usuelles sur lesquelles reposent de nombreuses applications innovantes (audio, radar, sismique, etc.).

Hélas, ces outils sont limités par le principe d'incertitude d'Heisenberg-Gabor qui impose un compromis entre la précision d'analyse en temps et en fréquence. Par conséquent, les représentations obtenues sont souvent imprécises et nécessitent l'utilisation de post-traitements avec des méthodes telles que la réallocation [4] ou le synchrosqueezing [5, 6].

Le synchrosqueezing suscite aujourd'hui de nombreux travaux grâce à sa formule d'inversion permettant une infinité d'applications (contrairement à la réallocation) telles que la suppression du bruit [7] et l'extraction des composantes d'un signal [8–10]. Le synchrosqueezing classique avec ses extensions a été proposé pour améliorer la représentation des signaux sinusoïdaux en réallouant la transformée d'origine uniquement en fréquence (ou verticalement) [11–13]. Plus récemment, le synchrosqueezing temporel a été introduit [14] afin d'améliorer la localisation des signaux impulsionnels. Cependant, cette nouvelle méthode ne parvient pas à représenter efficacement les signaux sinusoïdaux ce qui pose un problème pour traiter des signaux naturels pouvant comporter plusieurs types de composantes (impulsives ou sinusoïdales).

Pour dépasser cette limitation, cet article introduit une nouvelle transformée appelée synchrosqueezing horizontal d'ordre 2, qui améliore la représentation d'un mélange de composantes tout en restant inversible. Dans ce but, nous proposons un estimateur amélioré de retard de groupe pour lequel nous établissons des liens théoriques avec nos précédents travaux développés dans [9, 12, 15].

Dans la suite du document, nous suivons l'organisation suivante : la Section 2 donne les définitions des outils utilisés ainsi que leurs propriétés. La Section 3 introduit le synchrosqueezing horizontal d'ordre 2 avec notre nouvel estimateur du retard de groupe. Nous présentons nos résultats numériques sur des signaux de synthèse dans la Section 4. Enfin, nous concluons cet article en proposant de nouvelles perspectives de recherche dans la Section 5.

2 Synchrosqueezing temporel

2.1 Définitions et propriétés

La TFCT d'un signal x est une fonction du temps t et de la fréquence ω calculée en utilisant une fenêtre d'analyse h sup-

posée intégrable et dérivable :

$$F_x^h(t,\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t-\tau)^* \, \mathbf{e}^{-j\omega\tau} \, \mathrm{d}\tau \tag{1}$$

avec $j^2{=}{-}1$ et z^* le conjugué complexe de z. Une Représentation Temps-Fréquence (RTF) de x est fournie par son spectrogramme calculé par $|F_x^h(t,\omega)|^2$. La marginalisation de la TFCT par rapport à t induit le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} F_x^h(t,\omega)\, dt &= \iint_{\mathbb{R}^2} h(t-\tau)^* x(\tau)\, \mathbf{e}^{-j\omega\tau}\, dt d\tau && (2)\\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} h(u)^* x(\tau)\, \mathbf{e}^{-j\omega\tau} du d\tau && (3)\\
&= \int_{\mathbb{R}} h(u)^* du \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\, \mathbf{e}^{-j\omega\tau} d\tau && (4)\\
&= F_h(0)^* F_x(\omega) && (5)
\end{aligned}$$

avec $F_x(\omega){=}\int_{\mathbb{R}} x(t)\, \mathbf{e}^{-j\omega t}\, dt$ la transformée de Fourier de x.

En utilisant l'Eq. (5), on retrouve la transformée de Fourier du signal donnée par :

$$F_x(\omega) = \frac{1}{F_h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t,\omega)\, dt \tag{6}$$

qui conduit à la formule de reconstruction du signal suivante (en appliquant la transformée de Fourier inverse) :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi F_h(0)^*} \iint_{\mathbb{R}^2} F_x^h(\tau,\omega)\, \mathbf{e}^{j\omega t} d\tau d\omega. \tag{7}$$

2.2 Réallocation

La réallocation [4] est une technique permettant d'améliorer la concentration d'une représentation temps-fréquence d'un signal en déplaçant son énergie selon :

$$(t,\omega) \mapsto (\hat{t}_{x(t,\omega)}, \hat{\omega}_{x(t,\omega)}) \tag{8}$$

où $\hat{t}_x(t,\omega)$ est un estimateur de retard de groupe et $\hat{\omega}_x(t,\omega)$ est un estimateur de fréquence instantanée. Ces deux opérateurs peuvent se calculer simplement dans le cas de la TFCT [16, 17] par :

$$\hat{t}_{x(t,\omega)} = \mathrm{Re}\left(\tilde{t}_{x(t,\omega)}\right), \text{with} \quad \tilde{t}_{x(t,\omega)} = t - \frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t,\omega)}{F_x^h(t,\omega)} \tag{9}$$

$$\hat{\omega}_{x(t,\omega)} = \mathrm{Im}\left(\tilde{\omega}_{x(t,\omega)}\right), \text{with} \quad \tilde{\omega}_{x(t,\omega)} = j\omega + \frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t,\omega)}{F_x^h(t,\omega)} \tag{10}$$

où $\mathcal{T}h(t){=}th(t)$ et $\mathcal{D}h(t){=}\frac{dh}{dt}(t)$ sont des versions modifiées de la fenêtre d'analyse h. Ainsi, le spectrogramme réalloué est obtenu en calculant : $\mathrm{RF}_x^h(t,\omega) =$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |F_x^h(\tau,\Omega)|^2 \delta\left(t - \hat{t}_x(\tau,\Omega)\right) \delta\left(\omega - \hat{\omega}_x(\tau,\Omega)\right) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\Omega. \tag{11}$$

Le résultat obtenu correspond à une RTF dont l'énergie est plus concentrée et mieux localisée dans le plan temps fréquence. Cependant, cette RTF est non inversible en raison de la perte d'information sur la phase résultant de l'utilisation du module au carré de la transformée d'origine dans l'Eq. (11).

2.3 Synchrosqueezing temporel de la TFCT

Le synchrosqueezing est une variante de la réallocation qui admet une formule de reconstruction du signal d'origine. Cela est rendu possible en réallouant la transformée du signal plutôt que son énergie afin de préserver l'information sur la phase.

Le synchrosqueezing temporel de la TFCT peut être défini par [14] :

$$S_x^h(t,\omega) = \int_{\mathbb{R}} F_x^h(\tau,\omega) \delta\left(t - \hat{t}_x(\tau,\omega)\right)\, d\tau \tag{12}$$

avec $\hat{t}_x(t,\omega)$ l'opérateur de réallocation temporel donné par l'Eq. (9). La marginalisation par rapport à t de $S_x^h(t,\omega)$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} S_x^h(t,\omega) dt &= \iint_{\mathbb{R}^2} F_x^h(\tau,\omega) \delta\left(t - \hat{t}_x(\tau,\omega)\right)\, dt d\tau && (13)\\
&= \int_{\mathbb{R}} F_x^h(\tau,\omega) d\tau = F_h(0)^* F_x(\omega). && (14)
\end{aligned}$$

Ainsi, une formule de reconstruction exacte du synchrosqueezing de la TFCT peut être déduite de l'Eq. (14) :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi F_h(0)^*} \iint_{\mathbb{R}^2} S_x^h(\tau,\omega)\, \mathbf{e}^{j\omega t}\, d\tau d\omega. \tag{15}$$

Cette formule de reconstruction exacte montre un avantage du synchrosqueezing temporel par rapport au synchrosqueezing classique qui utilise une approximation. Cependant, cette reconstruction a une complexité calculatoire plus importante liée à la double intégration de l'Eq. (14) mais permet l'usage de l'algorithme de transformée de Fourier inverse rapide.

3 Synchrosqueezing d'ordre 2

3.1 Estimateur amélioré de retard de groupe

Nous considérons pour la suite le modèle d'un chirp linéaire donné par :

$$x(t) = \mathbf{e}^{\lambda_x(t) + j\phi_x(t)} \tag{16}$$

$$\text{avec} \quad \lambda_x(t) = l_x + \mu_x t + \nu_x \frac{t^2}{2} \tag{17}$$

$$\text{et} \quad \phi_x(t) = \varphi_x + \omega_x t + \alpha_x \frac{t^2}{2} \tag{18}$$

avec $\lambda_x(t)$ la log-amplitude et $\phi_x(t)$ la phase. Nous définissons $q_x = \nu_x + j\alpha_x$ et $p_x = \mu_x + j\omega_x$. Ce signal vérifie [12] : $p_x = \tilde{\omega}_{x(t,\omega)} - q_x \tilde{t}_{x(t,\omega)}$, permettant d'écrire :

$$\omega_x = \mathrm{Im}(\tilde{\omega}_{x(t,\omega)} - q_x \tilde{t}_{x(t,\omega)}) = \hat{\omega}_{x(t,\omega)} - \mathrm{Im}(q_x \tilde{t}_{x(t,\omega)}). \tag{19}$$

Le synchrosqueezing horizontal d'ordre 2 consiste à déplacer $F_x^{h}{}_{(t,\omega)}$ selon : $(t,\omega) \mapsto (t_x^{(2)},\omega)$ localisé sur la courbe de fréquence instantanée (*i.e.* tel que $\dot{\phi}(t_x^{(2)}) = \frac{d\phi_x}{dt}(t_x^{(2)}) = \omega_x + \alpha_x t_x^{(2)} = \omega$). Ainsi, nous pouvons déduire :

$$t_x^{(2)} = \frac{\omega - \omega_x}{\alpha_x} = \hat{t}_{x(t,\omega)} + \frac{\omega - \hat{\omega}_{x(t,\omega)}}{\alpha_x} + \frac{\nu_x}{\alpha_x} \mathrm{Im}(\tilde{t}_{x(t,\omega)}) \tag{20}$$

qui peut être estimé par :

$$\hat{t}_x^{(2)}{}_{(t,\omega)} = \begin{cases} \frac{\omega - \hat{\omega}_x(t,\omega) + \mathrm{Im}(\hat{q}_x(t,\omega)\,\tilde{t}_x(t,\omega))}{\hat{\alpha}_x(t,\omega)} & \text{si } \hat{\alpha}_x(t,\omega) \neq 0 \\ \hat{t}_x(t,\omega) & \text{sinon} \end{cases} \quad (21)$$

avec $\hat{q}_{x\,(t,\omega)} = \hat{\nu}_{x\,(t,\omega)} + j\hat{\alpha}_{x\,(t,\omega)}$ un estimateur non biaisé.

Cette expression peut être comparée à l'estimateur de retard de groupe ci-dessous qui se déduit de l'estimateur de fréquence instantannée proposé par Oberlin *et al.* [11] :

$$\hat{t}_x^{(2b)}{}_{(t,\omega)} = \begin{cases} \hat{t}_x(t,\omega) + \frac{\omega - \hat{\omega}_x(t,\omega)}{\hat{\alpha}_x(t,\omega)} & \text{si } \hat{\alpha}_{x\,(t,\omega)} \neq 0 \\ \hat{t}_x(t,\omega) & \text{sinon} \end{cases}. \quad (22)$$

En utilisant l'Eq. (20), on montre aisément que cet estimateur est biaisé quand $\nu_x = \frac{d^2\lambda_x}{dt^2}(t) \neq 0$. Ainsi, un nouveau synchrosqueezing temporel d'ordre 2 de la TFCT est obtenu à partir de l'Eq. (12) en remplaçant l'estimateur de retard de groupe $\hat{t}(t,\omega)$ par notre estimateur amélioré $\hat{t}_x^{(2)}(t,\omega)$ donné par l'Eq. (21).

3.2 Considérations théoriques et implémentation

Dans [10, 12], nous avons introduit deux familles d'estimateurs non biaisés permettant d'estimer q_x. Nous appelons ces estimateurs (tn) et (ωn) car ils impliquent les dérivées d'ordre $n \geq 2$ par rapport au temps et à la fréquence du signal qui permettent de calculer les Eqs. (21) et (22) :

$$\hat{q}_x^{(tn)}(t,\omega) = \frac{F_x^{\mathcal{D}^n h} F_x^h - F_x^{\mathcal{D}^{n-1}h} F_x^{\mathcal{D}h}}{F_x^{\mathcal{T}h} F_x^{\mathcal{D}^{n-1}h} - F_x^{\mathcal{T}\mathcal{D}^{n-1}h} F_x^h} \quad (23)$$

$$\hat{q}_x^{(\omega n)}(t,\omega) = \frac{(F_x^{\mathcal{T}^{n-1}\mathcal{D}h} + (n-1)F_x^{\mathcal{T}^{n-2}h})F_x^h - F_x^{\mathcal{T}^{n-1}h} F_x^{\mathcal{D}h}}{F_x^{\mathcal{T}^{n-1}h} F_x^{\mathcal{T}h} - F_x^{\mathcal{T}^n h} F_x^h} \quad (24)$$

avec $\mathcal{D}^n h(t) = \frac{d^n h}{dt^n}(t)$ et $\mathcal{T}^n h(t) = t^n h(t)$. Dans nos premières expérimentations [10], nous montrons que $(\omega 2)$ obtient en pratique de meilleurs résultats sur des signaux naturels bruités en comparaison aux ordres supérieurs $n \geq 3$ et aux estimateurs $(tn), \forall n \geq 2$.

Notre implémentation logicielle [1] s'appuie sur les reformulations à temps discret des expressions mathématiques précédentes combinées avec la méthode d'approximation des rectangles et l'algorithme de transformée de Fourier rapide. Ainsi, $F_x^h[k,m] \approx F_x^h(\frac{k}{F_e}, 2\pi\frac{mF_e}{M})$, avec F_e la fréquence d'échantillonnage, $k \in \mathbb{Z}$ l'indice de l'échantillon temporel et $m \in \mathcal{M}$ l'indice de fréquence discrète. Le nombre d'indices fréquentiels M est choisi comme un nombre pair tel que $\mathcal{M} = [-M/2+1; M/2]$. Ainsi, notre méthode a la même complexité calculatoire que le synchrosqueezing vertical du second ordre sauf pour la formule de reconstruction qui est plus coûteuse. Bien que nos expressions soient valides pour n'importe quelle fenêtre d'analyse h, notre implémentation de la TFCT utilise une fenêtre gaussienne $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}T}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2T^2}}$ et correspond à la transformée de Gabor. Le paramètre T (exprimé en secondes) lié à $L = TF_e$, permet de régler la largeur temporelle de la fenêtre d'analyse.

1. code MATLAB disponible sur : `http://www.fourer.fr`

4 Résultats numériques

Dans cette expérience on considère un signal réel synthétique de 500 échantillons contenant deux impulsions, une sinusoïdes, un chirp linéaire et une sinusoïde modulée sinusoïdalement en fréquence. La Fig. 1 compare les RTF suivantes : spectrogramme, spectrogramme réalloué, synchrosqueezing classique (fréquentiel), synchrosqueezing vertical d'ordre 2 (fréquentiel), synchrosqueezing temporel et synchrosqueezing horizontal d'ordre 2 (temporel).

Nos calculs utilisent $M = 600$, $L = 8$ et un rapport signal-sur-bruit (SNR) de 25 dB obtenu par l'ajout d'un bruit blanc gaussien. Le même estimateur $\hat{q}_x^{(\omega 2)}$ est utilisé pour les deux synchrosqueezing d'ordre 2 (horizontal et vertical). Nos calculs des RTF de l'état de l'art utilisent l'*ASTRES toolbox* [17]. Les résultats montrent clairement une amélioration apportée par le synchrosqueezing temporel d'ordre 2 par rapport au synchrosqueezing temporel pour représenter tout le signal. En comparaison au synchrosqueezing fréquentiel, notre méthode permet de localiser parfaitement les deux impulsions tout en fournissant une représentation plus précise des composantes sinusoïdales. Seule la sinusoïde (non modulée) n'est pas correctement représentée par les méthodes de synchrosqueezing temporel.

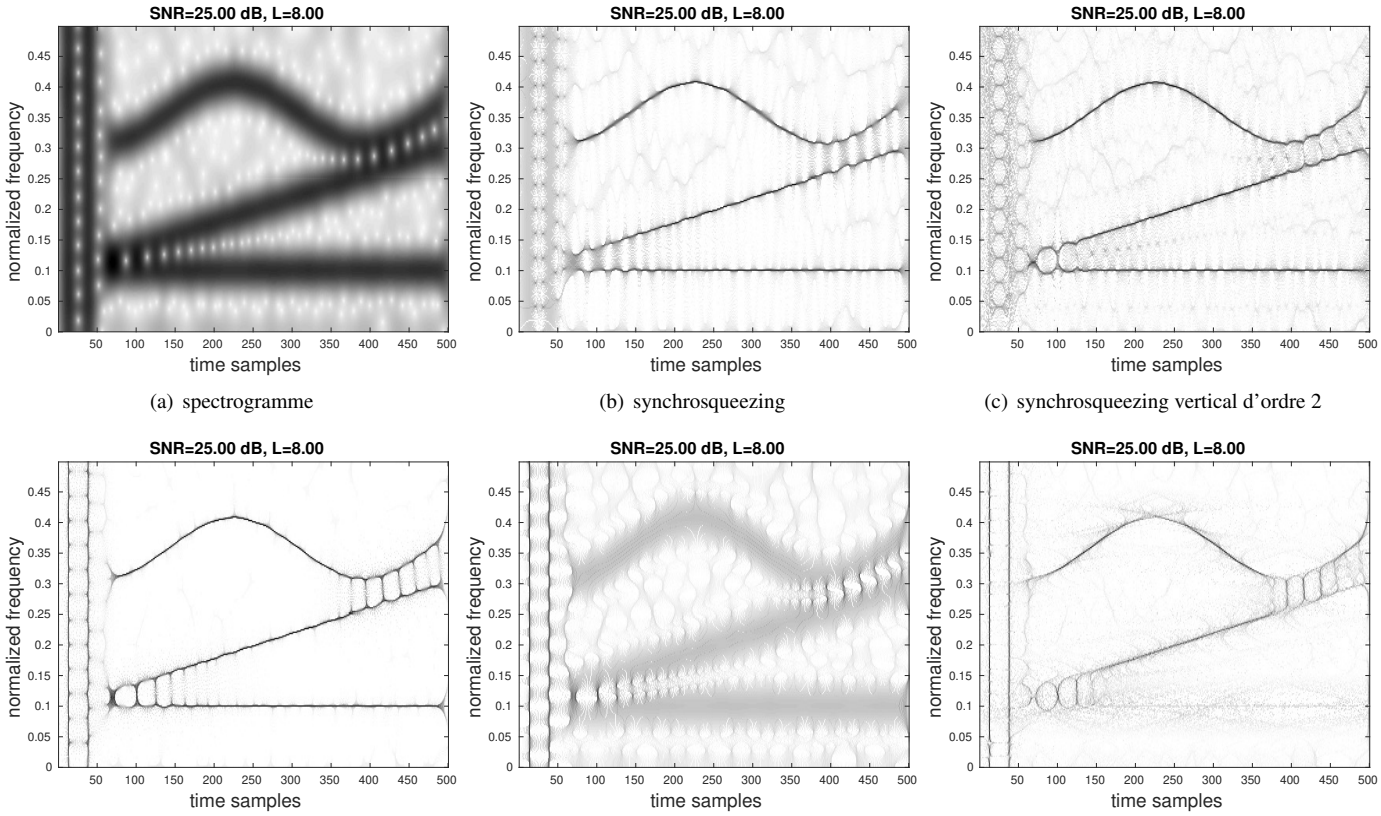
Pour évaluer la capacité de reconstruction, la Table 1 compare les facteurs de qualité de reconstruction (RQF) de chaque RTF calculés par [18] : $\mathrm{RQF} = 10\log_{10}\left(\frac{\sum_k |x[k]|^2}{\sum_k |x[k]-\hat{x}[k]|^2}\right)$. Nos résultats montrent l'avantage par rapport au synchrosqueezing classique du synchrosqueezing temporel qui obtient grâce à sa formule de reconstruction exacte de meilleurs scores (si M est choisi au moins aussi grand que la durée du signal).

TABLE 1 – Qualité de reconstruction des RTF inversibles présentées dans la Fig. 1.

Méthode	RQF (dB)
TFCT	269.27
synchrosqueezing classique	35.89
synchrosqueezing vertical d'ordre 2	23.80
synchrosqueezing temporel	116.67
synchrosqueezing horizontal d'ordre 2	116.67

5 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une nouvelle extension du synchrosqueezing temporel baptisée synchrosqueezing temporel horizontal d'ordre 2 de la TFCT. Cette méthode permet d'améliorer significativement la représentation temps-fréquence de signaux impulsionnels ou fortement modulés qui ne pouvaient pas être traités par le synchrosqueezing classique. Cette nouvelle méthode permet désormais de travailler sur des mélanges de signaux contenant des composantes sinusoïdales que ne parvenait pas à localiser correctement le synchrosqueezing temporel dans sa version initiale. Nos travaux futurs viseront à approfondir l'étude théorique de notre nouvel estimateur de retard de groupe et à proposer de nouvelles applications du synchrosqueezing horizontal d'ordre 2 sur des signaux naturels.



(a) spectrogramme (b) synchrosqueezing (c) synchrosqueezing vertical d'ordre 2

(d) spectrogramme réalloué (e) synchrosqueezing temporel (f) synchrosqueezing horizontal d'ordre 2

FIGURE 1 – Comparaison des représentations obtenues pour un signal de mélange synthétique et bruité. Les RTF obtenues utilisant les méthodes de synchrosqueezing (b),(c), (e) et (f) correspondent au module au carré de la transformée.

Références

[1] P. Flandrin, *Time-Frequency/Time-Scale analysis*. Acad. Press, 1998.

[2] ——, *Explorations in Time-Frequency Analysis*. Cambridge University Press, 2018.

[3] A. Grosssmann and J. Morlet, "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape," *IAM Journal of Mathematical Analysis*, vol. 15, no. 4, pp. 723–736, 1984.

[4] F. Auger and P. Flandrin, "Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 5, pp. 1068–1089, May 1995.

[5] I. Daubechies, J. Lu, and H.-T. Wu, "Synchrosqueezed wavelet transforms : An empirical mode decomposition-like tool," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 30, no. 2, pp. 243–261, 2011.

[6] F. Auger, P. Flandrin, Y. Lin, S. McLaughlin, S. Meignen, T. Oberlin, and H. Wu, "TF reassignment and synchrosqueezing : An overview," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 30, no. 6, pp. 32–41, Nov. 2013.

[7] D.-H. Pham and S. Meignen, "A novel thresholding technique for the denoising of multicomponent signals," 2018.

[8] P. Flandrin, "Time–frequency filtering based on spectrogram zeros," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 11, pp. 2137–2141, 2015.

[9] D. Fourer and G. Peeters, "Fast and adaptive blind audio source separation using recursive levenberg-marquardt synchrosqueezing," in *Proc. IEEE ICASSP*, Calgary, Canada, Apr. 2018.

[10] D. Fourer, F. Auger, and G. Peeters, "Local AM/FM parameters estimation : application to sinusoidal modeling and blind audio source separation," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 25, pp. 1600–1604, Oct. 2018.

[11] T. Oberlin, S. Meignen, and V. Perrier, "Second-order synchrosqueezing transform or invertible reassignment ? Towards ideal time-frequency representations," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 63, no. 5, pp. 1335–1344, Mar. 2015.

[12] D. Fourer, F. Auger, K. Czarnecki, S. Meignen, and P. Flandrin, "Chirp rate and instantaneous frequency estimation : application to recursive vertical synchrosqueezing," *IEEE Signal Process. Lett.*, 2017.

[13] D. H. Pham and S. Meignen, "High-order synchrosqueezing transform for multicomponent signals analysis-with an application to gravitational-wave signal." *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 65, no. 12, pp. 3168–3178, 2017.

[14] D. He, H. Cao, S. Wang, and X. Chen, "Time-reassigned synchrosqueezing transform : The algorithm and its applications in mechanical signal processing," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 117, pp. 255–279, 2019.

[15] D. Fourer, F. Auger, and G. Peeters, "Estimation locale des modulations AM/FM : applications à la modélisation sinusoïdale audio et à la séparation de sources aveugle," in *Proc. GRETSI'17*, Juan-les-Pins, France, Aug. 2017.

[16] R. Behera, S. Meignen, and T. Oberlin, "Theoretical analysis of the second-order synchrosqueezing transform," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Nov. 2016.

[17] D. Fourer, J. Harmouche, J. Schmitt, T. Oberlin, S. Meignen, F. Auger, and P. Flandrin, "The ASTRES toolbox for mode extraction of non-stationary multicomponent signals," in *Proc. EUSIPCO 2017*, Kos Island, Greece, Aug. 2017, pp. 1170–1174.

[18] D. Fourer, F. Auger, and P. Flandrin, "Recursive versions of the Levenberg-Marquardt reassigned spectrogram and of the synchrosqueezed STFT," in *Proc. IEEE ICASSP*, Mar. 2016, pp. 4880–4884.