



La transformation de Lorentz, le temps et l'espace. Généralisation du facteur gamma en fonction de la direction du mouvement caché dans les horloges

Bernard Guy

► To cite this version:

Bernard Guy. La transformation de Lorentz, le temps et l'espace. Généralisation du facteur gamma en fonction de la direction du mouvement caché dans les horloges. 2019. hal-02068970

HAL Id: hal-02068970

<https://hal.science/hal-02068970>

Preprint submitted on 15 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La transformation de Lorentz, le temps et l'espace

**Généralisation du facteur γ en fonction de la direction
du mouvement caché dans les horloges**

Bernard GUY
Ecole des Mines de Saint-Etienne
Institut Mines Télécom
UMR CNRS n°5600 EVS (Environnement, Ville, Société)
LASCO (*) Idea Lab de l'Institut Mines-Télécom
(*) Laboratoire Sens et Compréhension du monde contemporain

guy@emse.fr

Mars 2019

Résumé

Notre propos est d'examiner l'articulation entre la transformation de Lorentz (théorie de la relativité) et la construction même du concept de temps. Ce dernier n'existe pas tout prêt, en attente d'être enrôlé dans les équations de la physique mathématique. Toutefois, lors de la dérivation de la transformation, l'existence du temps n'est pas contestée. Dans ces conditions, la notion d'horloge ne fait pas l'objet de discussion spéciale. Nous voulons critiquer cette démarche classique car, si l'on veut bien approfondir et contester cette existence même du temps, on est conduit à « ouvrir » *les horloges* et à regarder ce qui s'y passe... On s'aperçoit que l'on y transforme toujours un mouvement en temps (une horloge est un point de vue sur un mouvement). Dans ces conditions, il s'agit de reprendre de façon concrète, c'est à dire en regardant telle ou telle horloge particulière, ce qui se passe à propos du temps. Dans le cas d'une horloge atomique comme aujourd'hui, c'est d'un mouvement de lumière qu'il s'agit. Dans ce contexte, nous sommes amenés à comparer la relation d'un même photon à deux repères (au repos / mobile ; c'est ainsi que l'on définit les deux horloges) tout en lui attribuant la même vitesse (deuxième postulat de la relativité). La nouvelle démarche conduit à étudier l'écriture de la transformation en fonction de *l'orientation du mouvement* définissant le temps. On élargit le sens du facteur γ de la relativité, le faisant dépendre non seulement, comme dans le cas standard, du rapport $\beta = v/c$ des modules des vitesses (du mouvement relatif des repères et de la lumière), mais aussi de l'angle δ entre ces deux mouvements. Une relation générale $\gamma = \gamma(\beta, \delta)$ est proposée qui permet de retrouver dans un même cadre diverses transformations déjà connues, dont celle de Lorentz (l'intelligence du mot transformation est renouvelée dans le sens d'accommoder tel mouvement de lumière particulier, et non tous les mouvements possibles).

Mots clés : transformation de Lorentz ; horloge ; espace ; temps ; mouvement ; facteur γ ; facteur $\beta = v/c$; angle δ ; lumière ; horloge atomique ; horloge optique ; repère au repos ; repère mobile ; second postulat ; théorie de la relativité.

Lorentz transformation, time and space. Generalization of the gamma factor according to the direction of the movement hidden in the clocks

Abstract

Our purpose is to examine the link between the Lorentz transformation (relativity theory) and the very construction of the concept of time. The latter does not exist in advance, waiting to be enrolled in the equations of mathematical physics. However, in the derivation of the transformation, the existence of time is not disputed. In these circumstances, the notion of clock is not the subject of any special discussion. We want to criticize this classic approach because, if we want to deepen and challenge this very existence of time, we are led to "open" the clocks and to watch what happens there ... We realize that they always transform a movement into time (a clock is a point of view on a movement). In these conditions, the matter is that of taking up in a concrete way, that is to say by looking at this or that particular clock, what happens about time. In the case of an atomic (or optical) clock like today, it is a movement of light that is involved. In this context, we are led to compare the relation to two frames (at rest / mobile) of the same photon (this is the way we define the two clocks), while giving it the same speed (second postulate of relativity theory). The new approach leads to study the writing of the transformation according to the orientation of the movement defining time. The meaning of the gamma factor of relativity theory is extended, making it depend not only, as in the standard case, on the ratio $\beta = v / c$ of the moduli of the velocities (of the relative movement of the frames, and of light), but also on the angle δ between these two movements. A general relation $\gamma = \gamma(\beta, \delta)$ is proposed which makes it possible to find in the same framework various transformations already known, including that of Lorentz (the intelligence of the word transformation is renewed in the sense of accommodating such particular light movement, and not all possible movements).

Key words: Lorentz transformation; clock ; space ; time ; movement ; gamma factor; factor $\beta = v / c$; angle δ ; light; atomic clock; optical clock; rest frame; mobile frame; second postulate; theory of relativity.

1. Introduction

En théorie de la relativité, la transformation de Lorentz permet de passer d'une collection de variables d'espace et de temps (x, y, z, t) , évaluées dans un repère R dit au repos, à une autre collection (x', y', z', t') évaluée dans un repère R' mobile à une vitesse v par rapport au premier. Notre propos est ici d'examiner l'articulation entre cette transformation et la construction du concept de temps. Ce dernier en effet n'existe pas tout prêt, en attente d'être enrôlé dans les équations de la physique mathématique. Pourtant, lors de la dérivation de la transformation, l'existence du temps n'est pas contestée : il s'agit alors d'établir sa mesure et de comparer les valeurs estimées dans les deux repères en mouvement relatif, sous diverses contraintes, notamment celle d'une égale « vitesse »¹ c de la lumière dans chaque repère (la conséquence en est la relativité du temps). Dans ces conditions, la notion d'horloge ne fait pas l'objet de discussion spéciale : on suppose que l'on en dispose autant que de besoin. Situées aux différents lieux des repères, les horloges donnent le temps local ; on les suppose même ponctuelles pour le bon déroulement des raisonnements (après le processus dit de synchronisation, on peut se limiter à une horloge par repère).

Nous voulons critiquer cette démarche classique car, si l'on veut bien creuser un peu plus et contester cette existence même du temps, on est conduit à « ouvrir » *les horloges* et à regarder ce qui s'y passe... On s'aperçoit que l'on y transforme toujours un mouvement en temps (une horloge est un point de vue sur un mouvement). Dans le cas d'une horloge atomique (dite aussi optique) servant de référence comme aujourd'hui, c'est d'un mouvement de lumière qu'il s'agit. La question se pose alors de savoir comment ce mouvement de la lumière fait ou non bon ménage avec le mouvement de la lumière « externe » dont nous avons parlé à l'instant.

La réponse suppose que l'on fait les mêmes choix pour les deux ou trois (en comptant les deux horloges associées aux deux repères) lumières, qui n'en font plus qu'une du point de vue conceptuel. En effet, on est logiquement amené à faire pour les deux photons internes des deux horloges le même postulat « $c = \text{cte}$ » que pour le photon externe. Grâce à cela, les trois photons jouent le même rôle et un seul photon est alors nécessaire. Le même photon sert à la fois d'horloge, ou d'horloges au pluriel (chaque point de vue sur lui est une horloge ; on en a

¹ Nous utiliserons ici le mot vitesse (avec ou sans guillemets), bien que, pour la lumière, ce ne soit pas approprié (voir les discussions dans la littérature et dans nos travaux).

un pour chaque repère) et de support du postulat « $c = \text{cte}$ ». Il n'y a pas d'autre photon à considérer, pas plus il n'y a pas de temps qui coulerait de façon locale ici ou là, à mesurer ici ou là.

Du fait du déplacement relatif entre les deux repères, la direction des mouvements va alors intervenir : le mouvement dans R n'a pas la même orientation que dans R'. Auparavant, on ne s'intéressait pas à la direction du mouvement pour deux raisons qui se rajoutaient l'une à l'autre : - on n'ouvrait pas les horloges : un scalaire temps en sortait comme par magie ; - on s'intéressait à toutes les directions possibles pour le photon « externe » (dont on prenait la « vitesse » constante). L'orientation du déplacement relatif entre les deux repères intervenait pour le décalage des origines, mais non dans le facteur γ de distorsion.

C'est au final la compréhension *en termes de mouvement* du temps lui-même qui se présente à nous dans la transformation de Lorentz. Il n'y a plus le temps d'un côté (caché dans l'horloge) et la lumière de l'autre, c'est la même chose ; le temps étant marqué par le mouvement de la lumière. Cette affirmation particularise *ipso facto* la direction de la lumière dans l'« horloge » « réelle », et nous demande de ne pas accommoder tous les mouvements possibles (on donne dans la Figure 1 un récapitulatif de notre démarche).

Dans le contexte des horloges optiques d'aujourd'hui, exprimer l'identité des propriétés de propagation de la lumière dans les deux repères revient à envisager deux points de vue (celui de R et celui de R') sur un photon auquel on attribue la même vitesse, dans un raisonnement où le contenu géométrique implicite des équations importe autant que le contenu algébrique explicite. La nouvelle démarche conduit donc à étudier l'écriture de la transformation en fonction de *l'orientation du mouvement* du photon définissant le temps ; diverses transformations sont alors envisageables suivant les directions des axes des repères relativement aux déplacements en jeu (repères, lumière). Ce faisant, la compréhension du mot transformation est renouvelé dans le sens, comme nous l'avons remarqué, d'accommoder un mouvement de lumière singulier et non tous les mouvements imaginables.

Voici quel sera notre plan. Nous commencerons par quelques brefs rappels sur les transformations de Lorentz standard (horloges fermées), section 2. Nous centrerons ensuite notre propos sur le facteur γ de la transformation (c'est lui qui en retient l'originalité), en présentant une formulation nouvelle : celle-ci tiendra compte d'un mouvement temporel de

direction quelconque, à la fois par rapport aux axes de coordonnées et à la direction du mouvement relatif des repères (section 3). Nous regarderons ensuite quelques cas particuliers remarquables (section 4), avant de faire des propositions de transformations générales complètes explicitant les décalages des origines des repères, en plus du facteur d'échelle γ (section 5). Nous serons alors en mesure d'évoquer certains problèmes portant sur la composition de transformations de Lorentz non colinéaires (section 6), avant de conclure et discuter brièvement ce que la présente approche apporte pour l'abord des phénomènes naturels (section 7). Certains emprunts à des textes plus anciens seront signalés, le présent ensemble apportant des formulations et des éclairages conceptuels nouveaux. La référence (Guy, 2016) donne accès à un grand nombre de nos travaux (voir aussi Guy, 2019).

2. Quelques rappels sur la transformation de Lorentz

Il n'est pas question de proposer un panorama, même partiel, de tout ce qui a été écrit sur la transformation de Lorentz. Nous nous contenterons de la commenter rapidement à travers les points délicats déjà discutés par nous : ceux-ci concernent d'une part la composition de transformations non colinéaires avec la question reliée des rotations additionnelles (Guy, 2010), et d'autre part le paradoxe des jumeaux, la relativité du temps et les écarts temporels attendus (Guy, 2015), les références précédentes donnant accès à une littérature déjà abondante.

Regardons en premier lieu la situation classique où la question des horloges n'est pas encore posée. La transformation de Lorentz est d'abord présentée pour un déplacement relatif des repères parallèle à un axe de coordonnées. On est ramené à étudier la transformation d'un couple (x, t) dans le repère au repos, en le couple (x', t') dans le repère mobile se déplaçant à la vitesse v par rapport au premier. Les autres coordonnées ne sont pas modifiées ($y = y'$; $z = z'$). La contrainte de vitesse constante de la lumière, rappelée plus haut, est écrite le long de l'axe des x (si $x = \pm ct$, alors $x' = \pm ct'$). Le vecteur $\mathbf{v}$ est parallèle à l'axe des x ; on obtient les formules bien connues

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (1)$$

Le facteur γ

La transformation précédente montre le produit de deux termes différents : - l'un exprime le décalage des origines entre les deux repères (dans le terme spatial $(x - vt)$ et son correspondant temporel $(t - vx/c^2)$), - l'autre une distorsion d'échelle dans le facteur γ ; celui-ci ne dépend que du rapport des vitesses $\beta = v/c$. Cette séparation en deux termes résulte des différentes contraintes imposées à la structure des équations de la relativité (homogénéité, linéarité etc.) et détaillées dans les articles originaux et les traités (signalons par exemple : Lorentz, 1904 ; Poincaré, 1905 ; Einstein, 1905 ; Lévy-Leblond, 1976 ; Rougé, 2002). Comme nous l'avons déjà avancé, c'est le facteur γ , discuté dans la section suivante, qui donne toute son originalité à la transformation de Lorentz.

Dans la première dérivation proposée ci-dessus, on observe une parfaite symétrie entre les deux variables x et t (x' et t'), déjà notée par Poincaré et bien visible en prenant $c = 1$. Les transformations correspondantes sont appelées transformations spéciales ou « boost ». Elles définissent un groupe ; c'est-à-dire que la composition de deux transformations de vitesses respectives v_1 et v_2 est une transformation du même type de vitesse v_3 , fonction de v_1 et v_2 (on écrit $v_3 = v_1 \oplus v_2$).

L'étape naturelle suivante est d'étendre le résultat précédent à des déplacements relatifs entre repères quelconques, c'est-à-dire tels que la vitesse v n'est pas parallèle aux axes de coordonnées. La démarche consiste à effectuer une première rotation du repère au repos pour positionner son axe des x le long de la vitesse v . On effectue alors une transformation spéciale de Lorentz comme à l'instant. On revient ensuite aux directions initiales des repères par une rotation inverse de la précédente. Il se trouve que ce procédé conduit à une série de difficultés : dans notre analyse, elles tiennent à ce que l'on n'a plus la symétrie entre variables d'espace et variable temporelle que l'on avait pour le couple (x, t) de la transformation spéciale ; la structure de groupe est perdue. La solution proposée dans la littérature consiste à relâcher la contrainte de propagation de la lumière à vitesse constante le long d'une seule direction (l'axe des x contenant la vitesse v dans les boosts) et à l'écrire dans toutes les directions; cela se fait via la conservation de la forme quadratique $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$. On rajoute alors parmi les opérations géométriques permises par les contraintes, en plus des translations, des rotations *a priori* des axes. En ce qui concerne la composition de

plusieurs transformations de Lorentz non colinéaires, on retrouve une cohérence mathématique (structure de groupe), en rajoutant encore de nouvelles rotations (en plus des précédentes) dépendant des vitesses des différents déplacements à composer (elles sont appelées rotations de Thomas, cf. Guy, 2010). Cette démarche, longuement analysée dans la littérature, pose de nombreuses questions, en particulier quant à la nature physique de ce qui est écrit².

3. Nouvelle approche. Proposition d'un facteur γ tenant compte de la direction de propagation de la lumière

Nous ne reprenons pas notre contribution à cette discussion à laquelle le lecteur est invité à se reporter. Nous ne sommes pas encouragés à retenir les diverses rotations dont nous venons de parler, dans la mesure même où une reprise de la transformation de Lorentz nous paraît nécessaire. Celle-ci doit se faire à l'occasion d'une « ouverture » des horloges et de la considération que le temps est associé à un mouvement ; comme nous l'avons dit, c'est aujourd'hui celui d'un photon dans une horloge atomique. La position de ce photon est décrite par trois coordonnées d'espace, t_x , t_y et t_z , et le scalaire temps correspond, au moins momentanément et localement, à la norme $t = (t_x^2 + t_y^2 + t_z^2)^{1/2}$. Une façon un peu différente de comprendre les trois paramètres utiles pour définir le temps est de les voir comme définissant la direction du mouvement du photon (voir plus loin). Nous nous restreignons ainsi à une horloge particulière, c'est-à-dire au mouvement de la lumière qui y chemine (l'horloge est ici le point de vue sur le photon étalon). Nous pouvons préciser en plus dans quel repère nous repérons la direction du mouvement étalon (l'orientation dans l'autre repère en dérive, compte-tenu du mouvement relatif). Nous l'envisagerons ici dans le repère mobile R' , et regarderons aussi le mouvement du photon depuis le repère au repos R , tout en le décrétant conserver la vitesse c dans les deux repères (inverser les points de vue ne revient pas seulement à changer v en $-v$ mais à changer le repère où l'on commence à désigner une *direction* de la lumière – nous l'avons fait ici dans R' ; en inversant les points de vue, c'est dans R qu'il faut désigner la direction de la vitesse de la lumière – ; voir aussi Guy, 2015). Au

² Notre second point de vue annoncé sur la transformation de Lorentz, du côté du paradoxe des jumeaux, sera évoqué plus loin.

total, il ne s'agit plus de postuler la conservation de la « vitesse » de la lumière dans toutes les directions³.

Notations

Fixons les notations qui nous serviront par la suite. Nous allons faire intervenir, en plus du vecteur $\mathbf{v}$ de la transformation de Lorentz standard, un vecteur $\mathbf{c}'$ pour le mouvement de la lumière dans R' , correspondant à un vecteur $\mathbf{c}$ dans R . L'orientation de la vitesse $\mathbf{v}$ est définie par les cosinus directeurs⁴, ou rapports, α_i tels que $v_x = \alpha_x \cdot v$, $v_y = \alpha_y \cdot v$, $v_z = \alpha_z \cdot v$. Les coordonnées v_x , v_y et v_z permettent de définir le module v (nous ne distinguerons que rarement vecteur et module par des notations différentes, le contexte permettant de comprendre). Les deux vecteurs $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}'$ ont même norme (c'est l'expression du second postulat d'Einstein), mais des directions *a priori* différentes. Les temps t et t' en correspondance sont les scalaires graduant la progression du photon le long des directions $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}'$. Les vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t}'$ associés sont portés par les vecteurs $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}'$ respectivement dans les deux repères. Le lien entre eux s'écrit

$$\vec{t} = \frac{1}{c} \vec{c} t \quad \text{et} \quad \vec{t}' = \frac{1}{c} \vec{c}' t'$$

où il est important là pour la bonne compréhension de distinguer les vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{t}$ des scalaires c et t (modules des vecteurs), de même pour $\vec{c}'$ et $\vec{t}'$ par rapport à $c' = c$ et t' . L'orientation des vecteurs $\mathbf{c}$ ou $\mathbf{t}$, d'une part, $\mathbf{c}'$ ou $\mathbf{t}'$ d'autre part est définie par les cosinus directeurs ω_i et ω'_i respectivement. Ces rapports vérifient : $t_x = \omega_x \cdot t$, $t_y = \omega_y \cdot t$, $t_z = \omega_z \cdot t$ (repère au repos) ; $t'_x = \omega'_x \cdot t'$, $t'_y = \omega'_y \cdot t'$, $t'_z = \omega'_z \cdot t'$ (repère mobile) ; ou encore, en multipliant ces relations par la constante c , $(ct)_x = c t_x = \omega_x \cdot ct$ et de même pour les autres composantes et dans les deux repères.

Les dernières relations peuvent encore s'écrire $c_x = \omega_x \cdot c$, $c_y = \omega_y \cdot c$, $c_z = \omega_z \cdot c$ pour le vecteur $\mathbf{c}$, et de même avec les rapports ω'_x , ω'_y et ω'_z pour le vecteur $\mathbf{c}'$. Dans la perspective de formuler les transformations de Lorentz pour le vecteur $\mathbf{t}$ (t_x , t_y , t_z), en association avec le

³ On peut continuer d'utiliser l'intervalle ds^2 en rajoutant des contraintes ; on n'envisage plus alors une multiplicité de mouvements de la lumière, avec un temps « à côté », « désincarné », mais un seul mouvement pour définir un temps qui respecte la « logique » d'une horloge !

⁴ Les cosinus directeurs α_i définissent l'orientation d'un vecteur unitaire porté par $\mathbf{v}$ et vérifient $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$.

vecteur position (x, y, z), nous raisonnerons par la suite sur les vecteurs t et t' plutôt que sur les vecteurs c et c'.

Cas de deux dimensions d'espace

Pour simplifier les calculs, nous raisonnerons dans le cas de deux dimensions d'espace x et y comme sur la Figure 2. Dans ce cas, les notations ω , ω' et α désignent des angles tels que : $\omega_x = \cos\omega$, $\omega_y = \sin\omega$; $\alpha_x = \cos\alpha$, $\alpha_y = \sin\alpha$ dans le repère au repos ; et $\omega'_x = \cos\omega'$, $\omega'_y = \sin\omega'$ dans le repère mobile. Le vecteur v est vu dans R sous l'angle α et sous le même angle $\alpha' = \alpha$ dans R' (nous utiliserons α pour les deux). Ni la direction z ni les variables et paramètres associés à cette direction n'interviennent. Il est utile de définir l'angle $\delta = \omega' - \alpha$ entre les vecteurs c' et v (nous n'utiliserons pas la notation équivalente $\delta' = \omega' - \alpha'$), c'est à dire entre le déplacement relatif des repères et le mouvement du photon marquant le temps dans le repère mobile (nous avons dit que nous repérons ce mouvement en premier lieu). Nous avons là deux facteurs exprimant les relations entre deux mouvements : le rapport β des deux modules, l'angle δ entre eux. Les trois angles ω , ω' , α (α') et le paramètre $\beta = v/c$ sont liés entre eux par la relation (A1) : $\omega = \omega' - \text{Arcsin}\{\beta \sin\delta\}$ (voir Annexe 1).

Expression du second postulat pour une horloge optique

C'est donc pour le mouvement d'un photon P marquant le temps, autre nom d'une horloge, que nous allons formuler le second postulat. Regardant le photon depuis O, le temps dans R est repéré par $OP = ct$; le regardant depuis O', le temps dans R' est repéré par $O'P = ct'$ (démarche relationnelle et non substantielle). Dans les deux cas, le facteur c est le même, c'est cela l'expression du second postulat. Le décalage des origines est marqué par $OO' = vt$. On se reportera à la Figure 2.

En comparant les deux temps t et t' dans le ratio γ (comme dans la relativité classique), nous pourrions simplement dire que le ratio est inférieur ou supérieur à un. Evitant une mauvaise compréhension, du fait des réflexes acquis par les transformations de Lorentz standard⁵, nous ne nous demanderons pas ce qui est vu déformé ou non dans un repère ou un autre, pensant en termes de dilatation et de contraction des temps et des longueurs : il n'y a nul temps ni espace substantiels, en attente d'être dilaté ou contracté ; nulle influence d'un mouvement sur

⁵ Quelle que soit l'interprétation donnée, la convergence des deux démarches (la démarche classique / la nôtre) vers des équations identiques pour des cas particuliers constitue une certaine assurance que nous ne nous égarons pas ; le fonctionnement des équations a un sens par lui-même.

l'écoulement du temps (qui n'existe pas). Nous ne voyons que des mouvements comparés les uns aux autres (il n'y a plus à proprement parler d'horloges d'un côté et de règles de l'autre, de positions d'un côté et de temps de l'autre ; cf. Guy, 2013). Cherchant une base stable de comparaison, nous sommes entraînés dans une régression à l'infini, stoppée « provisoirement » en arrêtant simultanément la construction d'un repère et l'adoption d'un signal étalon en son sein (le photon).

Cette discussion renvoie à celle du débat entre Bergson et Einstein sur l'interprétation de l'« écoulement » du temps, et ses changements comparés entre deux repères (cf. le paradoxe des jumeaux). Sans reprendre en détail les positions de l'un et l'autre savants (voir quelques éléments dans Guy, 2015), nous osons dire que ces deux auteurs avaient tous deux tort dans leur croyance en un temps substantiel (que le premier considérait unique, le second multiple). Bergson avait en quelque sorte raison en parlant d'un effet de parallaxe ou de perspective pour expliquer les différences exprimées par le facteur γ ; il y a bien changement selon le point de vue (OP et O'P sont différents) mais la parallaxe est originale car l'effet n'est pas forcément symétrique (voir plus haut et Guy, op. cit.). Et il avait tort en déniaient toute réalité à un temps dans le repère en mouvement (il parlait de son caractère fictif, imaginaire, fantasmatique, voire fantôme !) : il y a bien quelque chose que l'on peut attribuer en propre au repère R'. Sur ce point, Einstein avait raison : l'éloignement du photon de son origine, soit le temps dans ce repère, n'est pas illusoire (en le redisant avec nos propres mots).

Dérivation du facteur γ

Pour relier t et t', dans le facteur γ , le théorème de Pythagore nous donne : $OP^2 = OH^2 + HP^2 = (OK + KH)^2 + (PH' + H'H)^2$, ce qui s'écrit :

$$c^2t^2 = (vt\cos\alpha + ct'\cos\omega')^2 + (vt\sin\alpha + ct'\sin\omega')^2$$

$$c^2t^2 = v^2t^2\cos^2\alpha + c^2t'^2\cos^2\omega' + 2vctt'\cos\alpha\cos\omega' + v^2t^2\sin^2\alpha + c^2t'^2\sin^2\omega' + 2vctt'\sin\alpha\sin\omega'$$

$$c^2t^2 = v^2t^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + c^2t'^2(\cos^2\omega' + \sin^2\omega') + 2vctt'(\cos\alpha\cos\omega' + \sin\alpha\sin\omega')$$

$$c^2 t^2 = v^2 t'^2 + c^2 t'^2 + 2vct't' \cos(\omega' - \alpha)$$

$$(c^2 - v^2)t^2 - 2vct't' \cos(\omega' - \alpha) - c^2 t'^2 = 0$$

Où l'on a utilisé des relations trigonométriques classiques. On obtient une équation du second degré de t en fonction de t' et des paramètres v , c , et de l'angle $(\omega' - \alpha)$. Le déterminant réduit Δ' est égal à :

$$\begin{aligned} \Delta' &= v^2 c^2 t'^2 \cos^2(\omega' - \alpha) + (c^2 - v^2) c^2 t'^2 = c^2 t'^2 (v^2 \cos^2(\omega' - \alpha) + c^2 - v^2) \\ &= c^2 t'^2 (c^2 - v^2 \sin^2(\omega' - \alpha)) \end{aligned}$$

Ce déterminant est toujours positif et le problème a deux solutions. La racine carrée du déterminant est $ct'(c^2 - v^2 \sin^2(\omega' - \alpha))^{1/2}$, et les solutions sont

$$t = \frac{vct' \cos(\omega' - \alpha) \pm ct' \sqrt{c^2 - v^2 \sin^2(\omega' - \alpha)}}{c^2 - v^2}$$

Que l'on peut écrire $t = \gamma t'$ avec

$$\gamma = \frac{\frac{v}{c} \cos(\omega' - \alpha) \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2(\omega' - \alpha)}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Où γ est une fonction de v , c , et $\omega' - \alpha$. En utilisant les notations relatives $v/c = \beta$ et $\delta = \omega' - \alpha$ on écrit :

$$\gamma = \frac{\beta \cos \delta \pm \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \delta}}{1 - \beta^2} \quad (2)$$

Cette relation fondamentale (2) $\gamma = \gamma(\beta, \delta)$ est une fonction du rapport des modules de v (mouvement relatif des repères) et c (mouvement de la lumière définissant le temps), et de l'angle entre ces mouvements ; γ ne dépend pas de α qui jouera par contre dans les termes de

décalage entre les origines. Nous considérons pour l'instant que nous avons bien là le facteur γ d'une transformation de Lorentz (dans un sens modifié comme expliqué plus haut), bien que nous n'ayons pas dérivé cette dernière de façon complète. A cela deux arguments : - celui de la similitude de démarche avec celle tirée de la transformation standard (en matière de « dilatation » du temps), - celui du raccord avec l'expression standard (voir ci-dessous). Ces points pourront être développés dans l'avenir.

Discussion du signe $\pm$ dans l'expression de γ

Quel sens pouvons-nous donner au choix de signe dans la relation (2) ? Le second terme du numérateur, et le dénominateur ayant un signe constant positif, nous devons à première vue faire porter un changement éventuel de signe sur le premier terme du numérateur, soit $\beta \cos \delta$. Ecrivons le facteur γ sous la forme $\gamma = a \pm b$. Si on prend le signe +, on a $\gamma = a + b$. Si on prend le signe -, on a $\gamma = a - b$, que nous écrivons $\gamma = -(-a + b)$. Sous cette forme, on voit que, en gardant le même signe pour le deuxième terme b du numérateur, l'on peut faire changer le signe, non seulement du premier facteur a , mais aussi de l'ensemble de l'expression de γ . Nous interprétons cela de la façon suivante : a) le changement de signe de l'ensemble de l'expression de $\gamma = t/t'$ revient à changer d'orientation l'un des deux t ou t' ; b) le changement de signe du premier terme $a = \beta \cos \delta$ est obtenu soit en changeant v en $-v$, soit en changeant δ en $\delta + \pi$ (le cosinus change alors de signe). Au total, nous considérerons que le choix du signe dans l'expression de γ renvoie à des questions d'orientation des axes portant v , t et t' , ainsi que de l'angle δ . Nous pouvons choisir un signe pour un γ à partir duquel on en trouve d'autres pour d'autres choix d'orientations.

Calcul à trois dimensions

Notre raisonnement précédent a porté sur deux dimensions d'espace x et y . Le calcul à trois dimensions x , y et z ne présente pas de difficulté de principe. Il n'apporte rien de nouveau du point de vue de la relation fondamentale (2) que nous avons démontrée. En effet, ce qui joue, c'est d'une part le rapport des modules de v et c , et d'autre part l'angle δ entre les vecteurs c' et v . Dans la mesure où les trois vecteurs v , c et c' , ou encore OO' , OP et $O'P'$ sont *coplanaires* par construction (on suit le trajet du même photon P), le calcul utile peut se faire à deux dimensions dans un plan, même si ce plan est plongé dans un espace à trois dimensions. Dans ce cas, la valeur de l'angle δ en fonction des cosinus directeurs des vecteurs c' et v est donnée dans l'Annexe 2, relation (A2).

4. Etude de quelques cas particuliers ($\delta = 0, \delta = \pi/2$)

Nous n'allons pas faire pour l'instant d'étude générale de la fonction $\gamma(\delta)$ à β donné (relation (2)). Une première façon d'évaluer la pertinence de notre expression fondamentale est d'y reporter des valeurs particulières de l'angle δ .

Mouvement parallèle

Dans le cas d'un mouvement de la lumière parallèle au vecteur v , on a $\delta = 0$, c'est à dire $\alpha = \omega'$, (on aura aussi $\omega = \omega'$) ; on a alors $\cos\delta = 1$ et $\sin\delta = 0$. Ces résultats sont également valables pour les deux angles α et ω' simultanément nuls. Il reste

$$\gamma = \frac{\beta \pm 1}{1 - \beta^2} \quad (3)$$

En prenant le signe +, nous avons

$$\gamma = (1 - \beta)^{-1} = (1 - v/c)^{-1} \quad (4)$$

C'est la valeur déjà trouvée pour le transport parallèle dans Guy (2015), correspondant à Elbaz (1984) ; les formulations données par ces deux auteurs participent des transformations au sens renouvelé annoncé dans notre introduction.

Si on prend le signe -, on a $\gamma = -(1 + \beta)^{-1} = -(1 + v/c)^{-1}$ en changeant v en $-v$ et t ou t' en $-t$ ou $-t'$ dans l'expression précédente (valeur également proposée par les auteurs précédents).

Mouvement perpendiculaire

Dans le cas d'un mouvement de la lumière perpendiculaire à la direction v du mouvement relatif des repères, on a $\delta = \omega' - \alpha = \pi/2$. Alors $\cos\delta = 0$ et $\sin\delta = 1$, et :

$$\gamma = \frac{\pm \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} \quad (5)$$

Ou encore

$$\gamma = \pm (1 - \beta^2)^{-1/2} = \pm (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (6)$$

Le signe $\pm$ renvoyant au choix d'orientation des axes t ou t' . Cette valeur correspond à celle donnée dans Guy (2015) pour le transport perpendiculaire, avec ou sans aller et retour⁶. C'est aussi la valeur classique de la transformation de Lorentz (1904)⁷. Il y a alors coïncidence, pour la formulation de γ , entre le choix d'un chemin particulier pour la lumière (notre point de vue) et celui d'accommoder toutes les directions (point de vue classique). Il arrive à divers auteurs (e.g. Hoffman, 1980 ; Rougé, 2002) de choisir ce trajet perpendiculaire particulier, lorsqu'ils veulent trouver un moyen pédagogique de faire comprendre la transformation de Lorentz standard. Ils identifient alors sans le dire l'« écoulement du temps » au mouvement du photon. On serait tenté de demander à ces auteurs pourquoi ils n'ont pas choisi le transport parallèle (qui lui, ne redonne pas l'expression standard) ?! Dans une démarche intellectuelle voisine, des mesures effectives sur une horloge optique déplacée perpendiculairement au mouvement de la lumière redonnent de façon très intéressante le facteur γ standard (Chou et al., 2010)⁸.

Il nous est précieux de retrouver le facteur γ de la formule classique de Lorentz, aussi bien que celui d'Elbaz ou de nos propres travaux, comme cas particuliers d'une formule plus générale où figure maintenant l'angle entre les directions des mouvements d'intérêt du problème. On donne dans le Tableau 1 divers cas de facteurs γ qui nous paraissent tous pouvoir être retrouvés par l'utilisation de la formule fondamentale (2)⁹.

⁶ Nous parlons d'aller et retour lorsque le mouvement du photon n'est pas indéfiniment rectiligne mais est par exemple réfléchi sur une paroi.

⁷ On pourra se demander pourquoi la transformation standard correspond à cette configuration géométrique ?

⁸ A notre connaissance, ce type d'expérience n'a pas été faite sur un déplacement parallèle ?

⁹ L'article de McCarthy cité discute le cas général de phénomènes physiques de propagation, jaugés par des horloges reposant sur le même phénomène de propagation ; dit brutalement, le but de l'auteur est de disqualifier la théorie de la relativité. Nous n'irons pas jusque là, le problème sous-jacent de récursivité, posé par toutes les mesures, étant inévitable du fait de notre situation à l'intérieur du monde (il n'y a pas d'horloge indépendante des phénomènes...) : la relativité est une façon de l'affronter.

Positionnement du mouvement associé au temps par rapport au mouvement relatif des repères Valeur de l'angle δ	Facteur γ de la Transformation de Lorentz Avec $\beta = v/c$	Références bibliographiques
Déplacement parallèle dans le même sens $\delta = 0$	$(1 - \beta)^{-1}$	Elbaz (1984)
Déplacement parallèle en sens contraire $\delta = 0$	$(1 + \beta)^{-1}$	Elbaz (1984)
Aller et retour parallèle $\delta = 0$	$(1 - \beta^2)^{-1}$	McCarthy (1999)
Aller et retour parallèle Double ($x = \pm ct, x' = \pm ct'$) $\delta = 0$ Toutes les directions (3D)	$(1 - \beta^2)^{-1/2}$	Lorentz (1904)
Déplacement perpendiculaire (avec ou sans aller et retour) $\delta = \pi/2$	$(1 - \beta^2)^{-1/2}$	Hoffman (1980), Rougé (2002), Guy (2015)

Tableau 1

Quelques cas particuliers du facteur γ en fonction de l'angle δ et du type de mouvement de lumière choisi (simple, multiple, avec ou sans aller et retour). Chaque facteur β et γ peut être changé de signe suivant les choix d'orientation discutés dans le texte.

Les facteurs γ peuvent également prendre les valeurs inverses de celles annoncées dans la deuxième colonne du Tableau 1 si, lors de l'échange entre v et $-v$, on continue d'imposer l'angle ω' dans le même repère R' , sans alors offrir cette possibilité à l'angle ω du repère R . On trouvera dans Guy (2015) une discussion sur le caractère symétrique ou dissymétrique des deux points de vue des deux repères.

Structure de groupe

Nous discuterons plus loin la question de la structure de groupe de la transformation complète qui intègre le facteur γ et le terme de décalage des origines. La composition de plusieurs décalages se pose de façon spéciale lorsque les différentes directions de mouvements relatifs ne sont pas parallèles. Si l'on s'en tient au facteur γ qui est un scalaire, on n'a pas à son

niveau strict de problème de composition ; on vérifie que l'on a la structure de groupe, c'est-à-dire qu'il est possible de trouver un v_3 tel que $\gamma(v_3) = \gamma(v_1 \oplus v_2)$, où $\oplus$ est la loi d'addition relativiste des vitesses de modules v_i . On vérifiera sur divers exemples que $\gamma(v_3) = \gamma(v_1 \oplus v_2) = \gamma(v_1) \cdot \gamma(v_2) (1 + v_1 v_2)$, en particulier pour le transport parallèle et le transport perpendiculaire définis ci-dessus¹⁰.

5. L'écriture de la transformation de Lorentz dans le cas le plus général

Nous ne reprenons pas ici la démonstration de la dérivation complète de la transformation de Lorentz dans le cas général, ni n'examinons son bon fonctionnement dans le cadre de notre nouvelle proposition, repoussant cet examen nécessaire à un travail ultérieur. Nous nous contentons de proposer pour l'instant des expressions cohérentes avec les choix « géométriques » faits et avec l'ensemble de la démarche. Ce faisant, nous suivons un sens de raisonnement inverse du sens habituel où le facteur γ apparaît comme une conséquence de la dérivation complète. Nous avons ici proposé un facteur γ avant tout. Muni de ce facteur, exprimant les distorsions entre durées (ou longueurs), les transformations de Lorentz complètes font intervenir, en plus, des décalages d'origines pour les coordonnées d'espace et de temps elles-mêmes, dans le mouvement relatif des repères à la vitesse v . Cette démarche dans le sens facteur $\gamma \rightarrow$ transformation de Lorentz a été exposée dans Guy (2004). Elle conduit à une transformation portant d'une part sur les coordonnées d'espace x , y et z , et d'autre part sur les coordonnées du photon utile pour la définition du temps, à savoir t_x , t_y et t_z . En définitive on est conduit à manipuler un vecteur à 6 composantes (x, y, z, t_x, t_y, t_z) . Pour les coordonnées d'espace, les transformations s'écrivent :

$$\vec{r}' = \gamma(\vec{r} - \vec{v}t) \quad (7)$$

Ce qui se développe en :

$$x' = \gamma(x - v_x t) \quad y' = \gamma(y - v_y t) \quad z' = \gamma(z - v_z t) \quad (8)$$

¹⁰ Lorsque l'on exprime une vitesse v_2 sous la forme dx'/dt' dans le repère mobile à la vitesse v_1 (où x' et t' sont donnés par une transformation de Lorentz habituelle) l'expression de la composition des vitesses est indépendante du facteur γ .

Dans (7), c'est bien le module ou scalaire t qui mesure le déplacement de R' par rapport à R dans le vecteur vt , ou v est le vecteur.

Pour les coordonnées de temps, il faut tenir compte des directions différentes de t et t' (intervention des ω_i et ω'_i), mais aussi de l'orientation de v par rapport à t' et t (intervention des ω'_i et des α_i). On a alors les équations suivantes, où v est un scalaire :

$$\begin{aligned} t'_x &= \frac{\omega'_x}{\omega_x} \gamma \left(t_x - \frac{vx}{c^2} \frac{\omega_x}{\alpha_x} \right) \\ t'_y &= \frac{\omega'_y}{\omega_y} \gamma \left(t_y - \frac{vy}{c^2} \frac{\omega_y}{\alpha_y} \right) \\ t'_z &= \frac{\omega'_z}{\omega_z} \gamma \left(t_z - \frac{vz}{c^2} \frac{\omega_z}{\alpha_z} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Pour lesquelles on n'a pas d'expression vectorielle synthétique : on pourrait écrire

$$\vec{t'} = \gamma \left(Proj(t, t') \vec{t} - \frac{v}{c^2} Proj(v, t') \vec{r} \right) \quad (10)$$

sous réserve de définir deux opérateurs de projection de t sur t' et de v sur t' , soit $Proj(t, t')$, fonction des ω_i et des ω'_i , et $Proj(v, t')$, fonction des ω'_i et des α_i (comme on le discute dans la section suivante).

Dans le cas simplifié à deux dimensions d'espace (x, y), déjà discuté, les transformations précédentes s'écrivent en remplaçant ω_x, ω_y , par $\cos\omega$ et $\sin\omega$, et α_x et α_y par $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, soient pour t'_x et t'_y en fonction de t_x, x , et t_y et y :

$$\begin{aligned} t'_x &= \frac{\cos\omega'}{\cos\omega} \gamma \left(t_x - \frac{vx}{c^2} \frac{\cos\omega}{\cos\alpha} \right) \\ t'_y &= \frac{\sin\omega'}{\sin\omega} \gamma \left(t_y - \frac{vy}{c^2} \frac{\sin\omega}{\sin\alpha} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Dans le cas où $\alpha = \omega$ et où donc $\omega = \omega'$, on retrouve les formules déjà données dans Guy (2010, 2015), que nous avons notées :

$$\vec{t}' = \gamma \left(\vec{t} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \vec{r} \right) \quad (12)$$

développé en :

$$t'_x = \gamma \left(t_x - \frac{v}{c^2} x \right) \quad t'_y = \gamma \left(t_y - \frac{v}{c^2} y \right) \quad t'_z = \gamma \left(t_z - \frac{v}{c^2} z \right) \quad (13)$$

Avec $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ de module v . Le scalaire temps se construit par $t^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$ et peut être enrôlé dans un vecteur à quatre composantes (x, y, z, t) , à partir du vecteur à six composantes (x, y, z, t_x, t_y, t_z) .

Commentaire

Dans toutes les équations précédentes, l'expression du facteur γ est donnée par la formule générale (2). Etablie dans notre raisonnement en deux dimensions d'espace, cette relation est valable pour trois dimensions comme nous l'avons dit. L'angle δ est alors défini dans le plan $(\mathbf{v}, \mathbf{c}')$ et sa valeur à partir des directions des vecteurs dans l'espace à trois dimensions est donnée dans l'Annexe 2 comme rappelé ci-dessus.

Les formulations données dans Guy (2010, 2015) méritent discussion. Pour les coordonnées d'espace, nous y avons écrit des termes vectoriels en $\mathbf{v}\mathbf{t}$, où le vecteur est $\mathbf{t}$ et le scalaire v , au contraire de ce que nous avons dit à l'instant dans la relation (7). Cela s'écrit vt_x, vt_y, vt_z dans les expressions développées. Ces dernières sont justes parce que, dans nos travaux passés, nous avons demandé le parallélisme entre les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}'$, ou entre $\mathbf{v}$, $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t}'$; cela conduit à $v_x t = vt_x$, $v_y t = vt_y$, $v_z t = vt_z$. Mais les relations anciennes ne sont pas valables en toute généralité : il faut bien écrire $v_x t$ et non vt_x , car t est le paramètre qui compte (et non tel ou tel t_x) pour se déplacer le long de $\mathbf{v}$, que l'on projette en $v_x t$ etc. Cette explication permet de réconcilier les deux points de vue (comparer à d'autres auteurs qui ont utilisé un paramètre tridimensionnel pour définir le temps : Franco, 2006 ; Tsabary & Censor, 2005).

6. Composition de transformations de Lorentz non colinéaires

Que pouvons-nous dire maintenant sur la composition de plusieurs déplacements des repères ? Il faut désormais concevoir cette composition de façon générale, dans le cadre d'un *temps compris lui-même comme un déplacement*, et en faisant intervenir *ses projections selon les diverses directions utiles*. En composant des déplacements de vitesses quelconques, nous allons devoir corrélérer des changements d'étalons orientés et associés aux changements des directions des vitesses. Nous pouvons découper le problème en deux sous-problèmes.

Le premier est posé par les directions sous lesquelles le photon horloge est vu depuis les différents repères ; on suppose que l'on a fait au préalable le choix du repère où on impose cette direction, les autres directions s'en déduisant, compte-tenu des vitesses de déplacements relatifs des repères. Ce problème a été traité dans le cas de deux repères, et l'on a mis en évidence les projections utiles pour raccorder les étalons, dans la relation (10). Les angles α , ω et ω' apparaissant dans les relations développées (9) manifestent les diverses projections à faire sur les axes de coordonnées pour se rapporter à des termes comparables, tenant compte des orientations différentes des vecteurs concernant temps et déplacements.

Le second sous-problème concerne la composition proprement dite des déplacements des repères à des vitesses v , v' , v'' etc. Les deux problèmes s'imbriquent, mais pour ne pas compliquer les choses et nous restreindre à la composition des déplacements, nous décidons de négliger le premier problème, ou, plus exactement de supposer qu'il ne se pose pas ; autre façon de dire que l'on a pris les différents δ égaux à zéro, ou que l'on a déjà fait les projections annoncées dans une relation telle que (10). Sinon, ces projections devront se rajouter à celles que nous allons voir dans la suite. Appelons (C) ce choix (les $\delta = 0$). Si on se limite à la composition des scalaires γ , on a vu plus haut que la structure de groupe était acquise (la difficulté se pose pour les décalages des origines mêlant espace et temps « vectoriels » de différentes directions).

Cherchons donc comment on peut composer deux transformations de Lorentz (au sens de la section précédente) le long de deux directions v et v' quelconques, sachant que les vecteurs t et t' du premier et du deuxième repère sont parallèles à v , et que le vecteur t'' du troisième

repère est parallèle à v' , selon le choix (C)¹¹. Les relations que nous avons données peuvent s'écrire dans un espace six-dimensionnel pour les vecteurs

$$m = (r, t) = (x, y, z, t_x, t_y, t_z)^T \quad \text{avec} \quad t = (t_x^2 + t_y^2 + t_z^2)^{1/2}$$

et m' d'expression analogue en fonction de r' et t' (l'exposant « T » signifie que l'on effectue une transposition). La transformation s'écrit :

$$m' = L(v).m$$

en continuant d'utiliser la notation $L(v)$. On traite en réalité un seul et même espace de dimension trois compté deux fois, r et t (r' et t') y appartenant tous deux. Dans le premier repère, le temps est défini par la propagation d'un signal le long d'une certaine direction t , qui permet aussi de définir la règle servant à mesurer les distances ; t et v ont même direction (choix (C)). Si on change la direction v et que l'on envisage des déplacements le long d'une nouvelle direction v' , il faut envisager des étalons de longueur et de temps (marqués par le mouvement du mobile marquant le temps) le long de cette nouvelle direction ; il faut ainsi projeter tous les vecteurs utiles (ayant une signification temporelle comme spatiale) sur la nouvelle direction, avant d'écrire la transformation de Lorentz reliant les deux systèmes de référence. Désignons par $m_v (r_v, t_v)$ les vecteurs envisagés selon la direction v et par $m_{v'} (r_{v'}, t_{v'})$ leurs projections selon v' (toutes les composantes de m sont soumises à l'opération de projection). Appelons $\text{Proj}(v, v')$ la matrice donnant la projection d'un vecteur envisagé le long de la direction v sur la direction v' . C'est une matrice diagonale dont les coefficients sont des rapports de cosinus directeurs des directions v et v' . Sans changement de notation, on considère que $\text{Proj}(v, v')$ peut s'écrire dans un espace à deux fois trois dimensions, en répétant une seconde fois les coefficients pour avoir une matrice à 6 dimensions. On vérifie que ces matrices de projection commutent avec les matrices L . Ainsi en passant de v à v' nous écrivons :

$$m_{v'} = \text{Proj}(v, v')m_v$$

¹¹ Le texte qui suit, jusqu'à la section 7 exclue, est tiré de Guy (2010), avec quelques modifications.

La transformation de Lorentz concerne deux vecteurs m et m' , où les composantes sont mesurées en utilisant la même direction des étalons ; pour la première transformation on a donc :

$$m'_v = L(v).m_v$$

Pour composer avec une nouvelle transformation de Lorentz selon v' , on doit d'abord exprimer la relation précédente le long de cette nouvelle direction :

$$m'_{v'} = \text{Proj}(v, v').L(v).m_v$$

avant d'exprimer la nouvelle transformation par:

$$m''_{v'} = L(v')m'_{v'}$$

En projetant le tout sur la direction initiale v par

$$m''_v = \text{Proj}(v', v).m''_{v'}$$

il vient finalement

$$m''_v = L(v').L(v).m_v$$

où l'on a utilisé la propriété que les matrices L et Proj commutent, ainsi que l'identité $\text{Proj}(v', v).\text{Proj}(v, v') = 1$. On voit au total que, par composition, on a :

$$L(v'') = L(v').L(v) \quad (13)$$

en écriture vectorielle. On peut donc projeter sur la direction qu'on veut. On peut composer les relations vectorielles donnant r' et t' en fonction de r et t puis r'' et t'' en fonction de r' et t' . A chaque fois que v et v' interviennent en multiplication d'un vecteur, ce sont les modules qui sont écrits. La loi de composition des vitesses est alors :

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{v}' \oplus \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}'}{1 + \frac{|\mathbf{v}| |\mathbf{v}'|}{c^2}} \quad (14)$$

où $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ sont des vecteurs de modules $|\mathbf{v}|$ et $|\mathbf{v}'|$. Chaque composante se comporte comme un scalaire et en projetant sur les axes de coordonnées (compte-tenu des remarques données plus haut et selon lesquelles $t.v_x = t_x.v$ etc. – choix (C)) on obtient, par exemple pour la composante selon l'axe des x :

$$v''_x = \frac{v_x + v'_x}{1 + \frac{|\mathbf{v}| |\mathbf{v}'|}{c^2}} \quad (15)$$

et ainsi de suite pour les autres composantes.

Ces nouvelles relations, grâce à une meilleure symétrie entre le temps « vectoriel » et la position, nous permettent de retrouver une loi de composition interne, et une structure de groupe abélien. Il n'est pas besoin de rajouter de rotation après-coup. Les formules de transformations des coordonnées et de composition des vitesses proposées ne posent pas les problèmes posés par les compositions de vitesses non colinéaires et par la rotation de Thomas. On vérifiera que, au total, les transformations proposées et leurs compositions ne présentent aucune des difficultés discutées dans Guy (2010).

7. Et les phénomènes naturels ? Conclusions

Quel rapport entre le formalisme précédent et la réalité physique ? Tout système physique porte sa propre horloge, façon de parler du repérage permis par les mouvements de particules et de photons qui interviennent en son sein. On a accès au « rythme » propre de cette horloge par les mesures faites sur le système « au repos » que l'observateur a devant lui. Si maintenant le système est en déplacement par rapport à l'observateur, on comprendra après les calculs précédents que les temps associés au système de départ sont vus modifiés, « dilatés » ou non. On peut imaginer une grande variété de mouvements, autant pour le jeu des phénomènes internes au système que pour les déplacements relatifs du système par rapport à l'observateur.

Sans doute les mouvements compliqués à l'intérieur du système qui nous intéresse sont-ils difficilement réductibles à un seul paramètre ω' , qui représente plutôt une sorte de moyenne de différents mouvements (de même la transformation de Lorentz standard rend-elle compte d'un comportement moyen ?).

Les valeurs quantitatives des distorsions temporelles, calculables par un facteur tel que γ , sont alors variées : il n'y a pas de généralité et un travail est à faire dans chaque cas. Nous n'avons donné qu'une nouvelle façon de poser les problèmes à partir de laquelle il faut examiner à nouveaux frais les interprétations déjà données dans la littérature (et parfois sujettes à débats) : depuis l'examen des muons relativistes (dont la durée de vie est vue plus longue dans leur déplacement que celle au repos) jusqu'à celui des horloges embarquées dans des avions et pour lesquelles la distorsion temporelle semble varier suivant le sens de rotation autour du globe. Nous devons également regarder ce que l'on tire de la forme mathématique du facteur γ sur la structure d'autres relations physiques (portant sur l'énergie par exemple) : a-t-on besoin d'une représentation plus fine de γ fonction de ce que l'on connaît du système ? C'est parce que nous avons spatialisé le temps, c'est-à-dire étroitement associé à un mouvement, que nous avons pu faire les propositions contenues dans ce texte. Un certain nombre de points, détaillés au cours de la rédaction, méritent d'être encore approfondis.

Remerciements

Nous remercions Guy Tsabary (Israël ; co-auteur de l'article de Tsabary et Censor cité) pour sa stimulation à écrire ce texte.

Références

C.W. Chou, D.B. Hume, T. Rosenband, D.J. Wineland (2010), Optical clocks and relativity, *Science*, 329, 1630-1633
Einstein A. (1905) Sur l'électrodynamique des corps en mouvement, *Annalen der Physik*, XVII, 891-921.

- Elbaz (1984) L'onde stationnaire et la transformation de Lorentz, C. R. Acad. Sc. Paris, 298, II, 13, 543-546.
- Franco J.A. (2006) Vectorial Lorentz transformations, Electronic Journal of Theoretical Physics, 9, 35-64.
- Guy B. (2004) L'éclair et le tonnerre. Promenades entre l'espace et le temps. Editions EPU, Paris, 224 p.
- Guy B. (2010) Les relations de Lorentz et le temps : proposition d'utilisation d'un paramètre tri-dimensionnel défini par un déplacement. La question du temps en physique.
<http://archive.org/details/LesRelationsDeLorentzEtLeTempspropositionDutilisationDun>
- Guy B. (2013) Sur la « vitesse » de la lumière et sa mesure : disparition des étalons d'espace et de temps ; l'étalon de mouvement ; <hal-00814874>; et communication au 22^e Congrès général de la société française de physique, Marseille, Juillet 2013 (P082).
- Guy B. (2015) Sur l'âge et le vieillissement comparés de deux jumeaux (théorie de la relativité), <hal-01196320>.
- Guy B. (2016) Relier la mécanique quantique et la relativité générale ? Réflexions et propositions, <hal-00872968>.
- Guy B. (2019) Espace = Temps. Dialogue sur le système du monde, en préparation.
- Hoffman B. (1980) Histoire d'une grande idée, la relativité, Belin, Paris, 190 p.
- Lévy-Leblond J.M. (1976) One more derivation of the Lorentz transformation, Am. J. Phys. 44, 3, 271-277.
- Lorentz H.A. (1904) Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light, Proceedings Acad. Sci. Amsterdam, t. VI, 809-831.
- McCarthy (1999) The classical / newtonian derivation of Lorentzian equations for sound and other media processes, J.New Energy, 3, 4, 54-61.
- Poincaré H. (1905) Sur la dynamique de l'électron, C. R. Acad. Sc. Paris, 140, 1504-1508.
- Rougé A. (2002) Introduction à la relativité, Les éditions de l'Ecole polytechnique, 180 p.
- Tsabary & Censor (2005) An alternative mathematical model for special relativity, Nuovo Cimento B, 120, 2, 179-196.

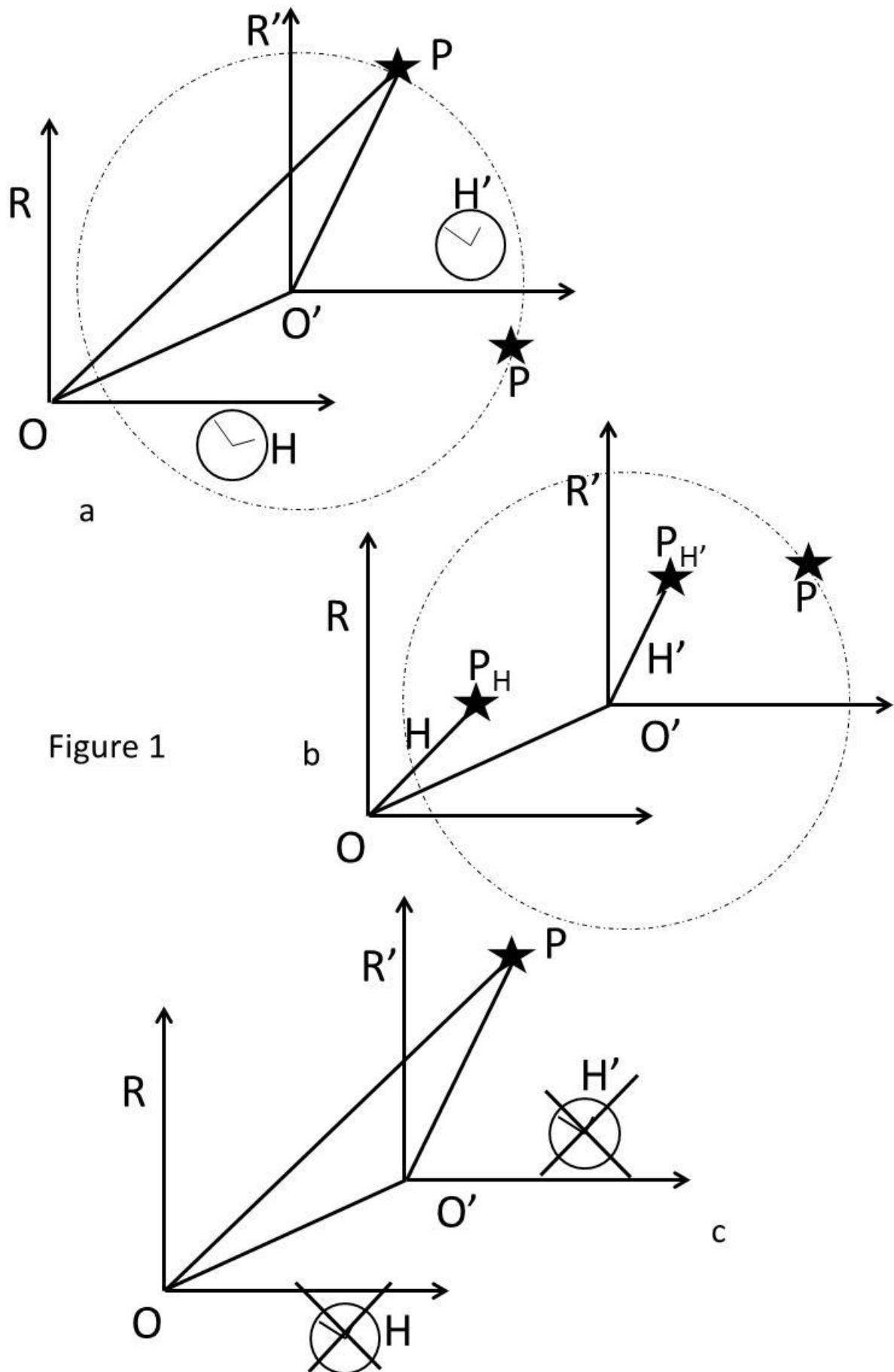


Figure 1

Figure 1

Illustration des étapes de notre proposition

En 1a, on représenté la situation décrite par la démarche classique. Deux repères R et R' d'origines O et O' sont en déplacement relatif à la vitesse v ($OO' = vt$). Chacun des deux repères est muni d'une horloge, soient H et H' . On envisage le déplacement d'un photon P et l'on postule que sa vitesse de déplacement est la même vue depuis R et vue depuis R' . Ce photon peut se déplacer dans toutes les directions : on a figuré cette possibilité par la surface d'onde centrée sur O' , soit un cercle en deux dimensions (sur laquelle on a reporté deux photons P , on pourrait en disposer autant qu'on veut).

En 1b, on a ouvert les horloges H et H' et constaté que chacune utilise le mouvement d'un photon, soient P_H et $P_{H'}$. On a maintenant trois photons, P_H , $P_{H'}$ et P , comptant ce dernier comme une infinité dans les différentes directions.

En 1c, on a unifié la démarche, étant conduit à postuler un même comportement pour les différents photons qui n'en font plus qu'un au niveau conceptuel. Pour avoir des horloges dont on a besoin pour « mesurer le temps » dans les deux repères, on est ainsi conduit à particulariser un photon qui va servir à la fois pour le temps dans R et dans R' (tout en « incarnant » le second postulat). Les deux horloges H et H' au sens de la figure 1a sont détruites (ou oubliées, elles étaient des fictions).

Au total, cette proposition vient rendre cohérente la démarche relativiste : on pouvait se demander (dans la compréhension 1a) par quel mystère les horloges offraient un temps qui se décalait d'un repère à l'autre, pour satisfaire les propriétés d'un photon dont le voyage leur était extérieur, temps qui était variable avec le mouvement relatif des repères¹².

¹² Les incohérences de la démarche relativiste ont été analysées par les physiciens critiques, mais, à notre sens, sans proposition nouvelle.

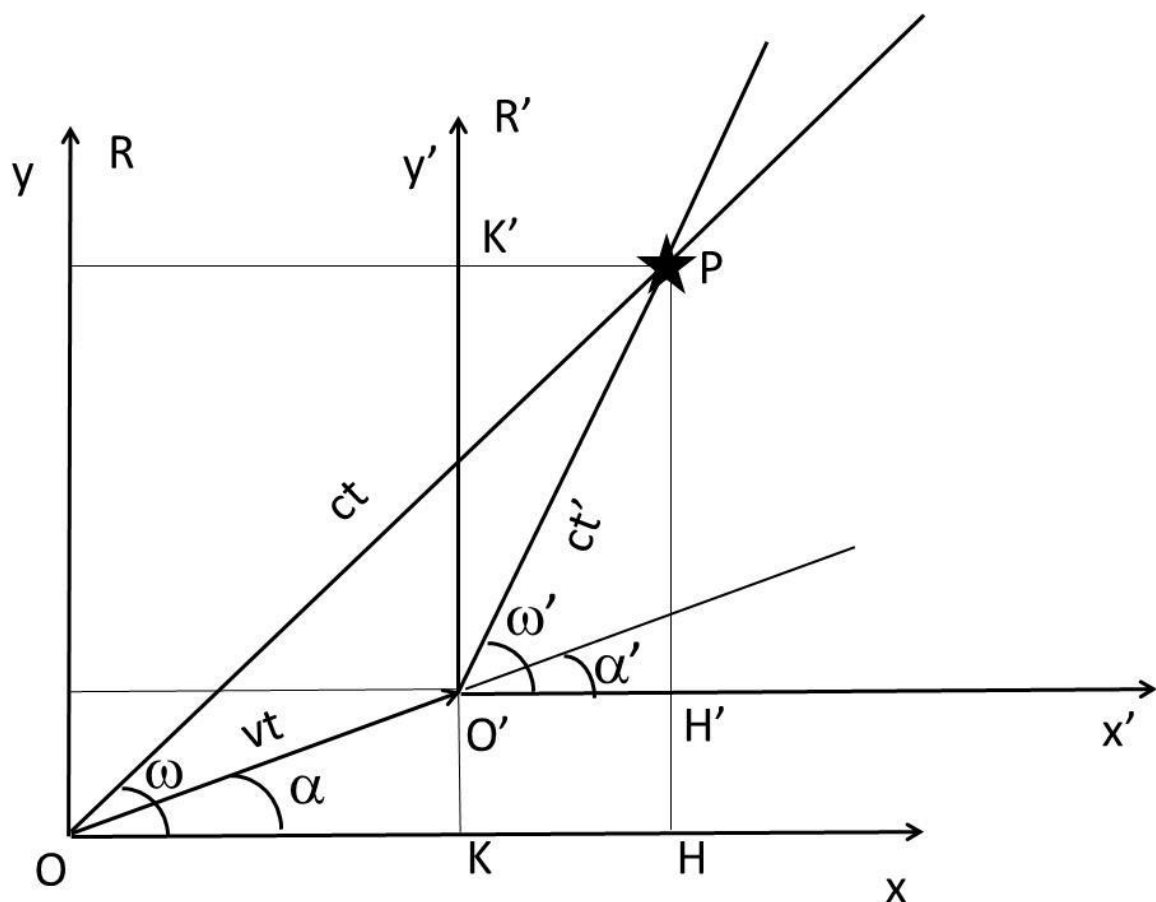


Figure 2

Deux repères R et R' sont représentés en deux dimensions d'espace, en mouvement relatif à la vitesse v faisant un angle α par rapport à la direction Ox Ox' . Dans R' le mouvement du photon horloge P se fait dans la direction d'angle ω' ; depuis le repère R, ce mouvement est vu avec l'angle ω , compte tenu du mouvement relatif entre les repères. Pendant l'« intervalle de temps » t (mesuré par un morceau de mouvement), le repère R' s'est déplacé suivant OO' , le photon P selon $O'P$ dans R' et selon OP dans R. On décide / postule que le photon est vu se déplaçant à la même « vitesse » dans les deux repères. On a donc $OP = ct$, et $OP' = ct'$, avec le même facteur c ; ce dernier étant beaucoup plus grand que v , les longueurs OP , OP' sont beaucoup plus grandes que OO' de longueur vt , ce qui n'a pas été respecté pour la lisibilité de la figure.

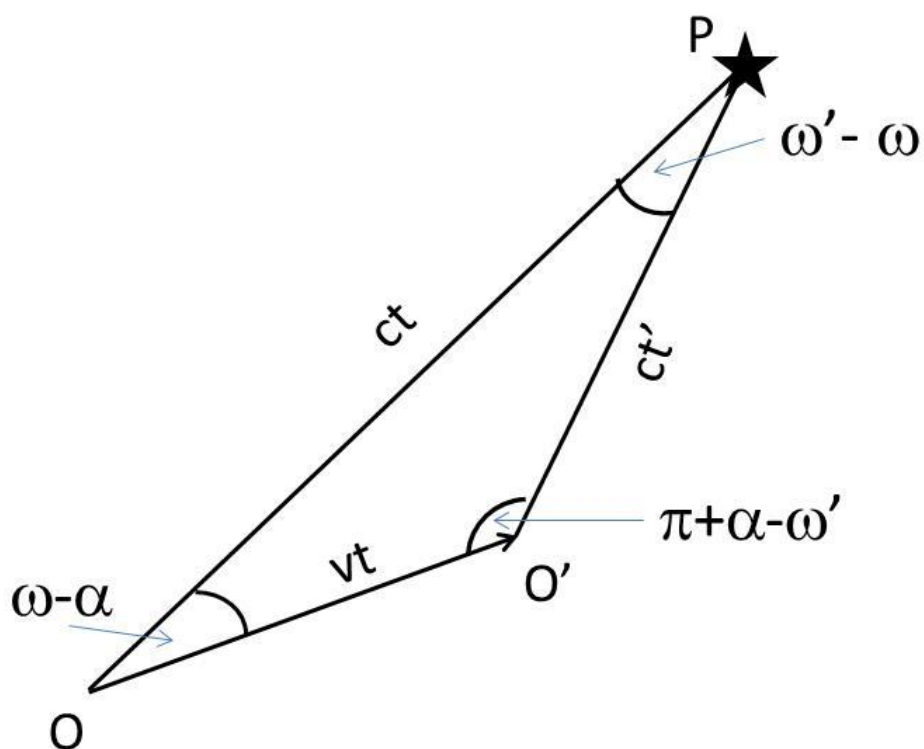


Figure 3

Mesures des angles et côtés du triangle OO'P

Ces mesures permettent de déterminer l'angle ω' à partir des angles ω et α , et du rapport $\beta = v/c$. Les angles du triangle OO'P sont déterminés à partir des définitions de α , ω' et ω données dans la Figure 2.

Annexe 1 Relation entre les angles ω , ω' et α

Les trois angles ω , ω' , α , et le rapport $\beta = v/c$ sont liés entre eux. Les relations trigonométriques dans un triangle quelconque sont appliquées ici au triangle POO' (cf. Fig. 2). Les angles et les longueurs des côtés sont indiqués sur la Figure 3 et les relations s'écrivent :

$$\frac{ct'}{\sin(\omega - \alpha)} = \frac{vt}{\sin(\omega' - \omega)} = \frac{ct}{\sin(\pi + \alpha - \omega')}$$

On se donne ω' et α , et on veut connaître ω . On tire de l'égalité des deuxième et troisième termes :

$$\sin(\omega' - \omega) = v/c \sin(\pi + \alpha - \omega') = v/c \sin(\omega' - \alpha)$$

D'où

$$\omega' - \omega = \text{Arcsin}\{v/c \sin(\omega' - \alpha)\}$$

D'où

$$\omega = \omega' - \text{Arcsin}\{v/c \sin(\omega' - \alpha)\}$$

Que nous pouvons aussi noter (compte tenu des définitions de β et de δ) :

$$\omega = \omega' - \text{Arcsin}\{\beta \sin \delta\} \tag{A1}$$

Annexe 2. Calcul de l'angle δ en fonction des cosinus directeurs des vecteurs v et c' (cas de trois dimensions d'espace).

Soient α_x , α_y , et α_z , les cosinus directeurs du vecteur v , et ω'_x , ω'_y et ω'_z , ceux du vecteur c' . Le cosinus de l'angle δ cherché est égal au produit scalaire des vecteurs v et c' divisé par le produit de leurs modules vc . Nous en tirons δ par la relation :

$$\delta = \text{Arc cos} \sqrt{\alpha_x \omega'_x + \alpha_y \omega'_y + \alpha_z \omega'_z} \quad (\text{A2})$$