

Stratégie de planification d'essais pour la caractérisation de contrainte admissible en fatigue des matériaux

Miranda Emilie, Michel Broniatowski, Maeva Biret

▶ **To cite this version:**

Miranda Emilie, Michel Broniatowski, Maeva Biret. Stratégie de planification d'essais pour la caractérisation de contrainte admissible en fatigue des matériaux. Congrès Lambda Mu 21, " Maîtrise des risques et transformation numérique : opportunités et menaces ", Oct 2018, Reims, France. hal-02064108

HAL Id: hal-02064108
https://hal.science/hal-02064108

Submitted on 11 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stratégie de planification d'essais pour la caractérisation de contrainte admissible en fatigue des matériaux

Sequential design of experiments for the characterization of minimal allowable fatigue stress

Miranda Emilie et Michel Broniatowski.
LPSM, Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75005 Paris

Maëva Biret
Safran Aircraft Engines
Rond-point René Ravaud, Réau
77550 Moissy-Cramayel

Résumé

L'objectif de cette étude est l'estimation d'un quantile extrême dans le cas de données dichotomiques de dépassement de seuil. La problématique est issue d'un cas industriel : l'étude de la résistance d'un matériau pour des probabilités de rupture cibles très faibles. La méthode proposée est séquentielle et consiste à décomposer la probabilité de l'évènement rare en un produit d'évènements conditionnels. Elle se fonde sur l'utilisation de résultats sur les lois limites de dépassements de seuil.

Summary

The objective of this study is the estimation of an extreme quantile based on a sample of dichotomic data corresponding to peaks over a threshold. It comes from an industrial case: what stress can be applied to a material to guarantee a long lifetime with high probability. The approach is sequential. It consists in decomposing the target probability level, which is very low, into a product of probabilities of conditional events of higher order.

Introduction

Au cours des différentes phases de vol, les pièces de turboréacteurs subissent de multiples sollicitations qui peuvent affecter leur durée de vie. Certaines pièces étant critiques, il est indispensable de maîtriser les risques de défaillances et de les quantifier précisément, d'autant que leur commercialisation est tributaire du respect d'un cahier des charges strict. Le constructeur doit donc être en mesure de caractériser aussi précisément que possible les propriétés et la durée de vie de la pièce. A cette fin, des études sont réalisées en amont de la construction des moteurs pour évaluer les propriétés de résistance des matériaux dans les conditions pouvant être rencontrées en cours de vol.

La robustesse d'une pièce est affectée par de nombreux paramètres liés aux méthodes et procédés de fabrication, ainsi qu'à ses conditions d'utilisation. En particulier, une question majeure en fiabilité est la résistance à différents types de sollicitations et d'endommagement. On s'intéresse ici à un processus d'endommagement spécifique subi en cours de vol : l'endommagement en fatigue.

1. Le phénomène de fatigue

Le phénomène de fatigue désigne l'usure progressive consécutive à l'application cyclique d'une force sur le matériau. Le niveau d'endommagement subi est fonction décroissante du niveau de chargement appliqué. On désigne en particulier trois régimes de fatigue :

- Le régime oligocyclique, dans lequel le niveau de sollicitation est élevé et la durée de vie très faible. La rupture est quasi-immédiate.
- La fatigue à grands nombres de cycles ou domaine d'endurance limitée correspond à l'application de niveaux de contraintes inférieurs à la limite d'élasticité. La durée de vie augmente à mesure que le chargement diminue.
- La fatigue à très grands nombres de cycles ou domaine d'endurance illimité intervient lorsque la durée de vie devient très grande, voire illimitée, soit parce qu'aucun défaut ne s'est amorcé, soit parce que les fissures cessent de se propager.

La tenue en fatigue d'un matériau est caractérisée en réalisant une campagne d'essais. Des échantillons calibrés de matériau (éprouvettes) sont sollicités à différents niveaux de contraintes jusqu'à rupture, ou date de fin d'essai. Les résultats de ces essais se représentent sous la forme de courbes de Wöhler (cf. figure 1), dans lesquelles le niveau de contrainte est représenté en fonction de la durée de vie, exprimée en nombre de cycles d'application.

Les études de caractérisation de la tenue en fatigue d'un matériau sont utilisées pour caractériser différentes grandeurs critiques :

- la durée de vie à niveau de chargement donné ;
- la contrainte admissible (ou quantile de défaillance) pour un nombre de cycles et un niveau de confiance donnés.

Ces deux approches sont complémentaires et sont utilisées pour dimensionner la pièce, en fixer le prix, fournir une durée d'utilisation et en contrôler la qualité.

On s'intéresse ici à la caractérisation d'un quantile de défaillance pour le régime à très grands nombres de cycles. L'objectif est de proposer une stratégie de planification de cette quantité dans le cas d'une probabilité de rupture très faible de 0,1%.

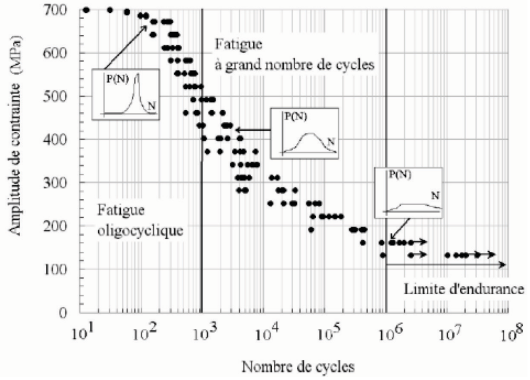


Figure 1: Schéma d'une courbe de Wölher

2. Contrainte admissible minimale

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à une quantité critique : la contrainte admissible en fatigue. Il s'agit d'un quantile de défaillance du matériau à une durée de vie n_0 fixée et pour un niveau de confiance α.

Dans la suite, on notera :
- *N* la durée de vie, exprimée en nombres de cycles ;
- *S* le niveau de contrainte exercé (en MPa).
- $R_{n_0} = R$ la variable aléatoire modélisant la résistance du matériau, définie comme le niveau de contrainte à partir duquel le matériau rompt avant n_0.

La contrainte admissible s_α à un nombre de cycles n_0 et un niveau de probabilité α fixés est le niveau de chargement pour lequel la probabilité de rompre avant n_0 vaut α. Elle s'exprime également comme le quantile d'ordre α de *R*.

$$s_\alpha = \text{argsup}_s\, P(N \le n_0 | S = s) \le \alpha = \text{argsup}_s\, P(R \le s) \quad \{1\}$$

Elle est d'autant plus difficile à estimer que l'horizon temporel n_0 est grand et que l'ordre du quantile considéré est extrême. Ici, on cherche à caractériser la contrainte admissible dite minimale, c'est-à-dire à α = 0,1% dans le domaine de la fatigue HCF (soit de l'ordre de 10^7 cycles).

L'estimation de cette quantité est imposée par contrainte légale : la pièce produite doit respecter un cahier des charges strict et ses propriétés doivent être transparentes pour les acheteurs.

Or, il n'existe pour l'heure pas de méthode adaptée à l'estimation de la contrainte admissible minimale. On se propose ici de développer une méthode de planification d'essais spécifiquement conçue pour répondre à cette problématique.

Son estimation pose plusieurs problèmes, relatifs à la qualité et la rareté de l'information. En effet, les essais sont coûteux, d'autant plus qu'on cherche à caractériser la résistance à très grands nombres de cycles. Le coût des essais tient d'une part à la fabrication et l'usinage des éprouvettes, et de l'autre à la mobilisation des machines de test. La stratégie de planification est donc fortement contrainte en termes de nombre d'essais. Le problème de caractérisation de s_α relève donc des valeurs extrêmes : $\alpha \ll 1/n$.

Enfin, les résultats d'essais sont des couples $(s_i, N_i)_i$. L'information pertinente concernant R pour un niveau de sollicitation *s* est donc $1_{N \le n_0} = 1_{R \le s}$, l'indicatrice de rupture avant n_0. L'information fournie par les essais sur *R* est donc très incomplète.

3. Pourquoi proposer une nouvelle méthodologie ?

La procédure actuellement utilisée par Safran Aircraft Engines pour caractériser la résistance à grands nombres de cycles est la méthode Staircase, développée par Dixon et Mood (1948). Elle propose une procédure d'essais séquentielle simple permettant d'estimer la loi de la résistance en peu d'essais.

Posons une hypothèse paramétrique sur R : $P(R \le s) = \Phi_\theta(s)$, où θ est un vecteur de paramètres. Le Staircase vise à estimer θ.

Le principe est le suivant : les éprouvettes sont testées une par une. Lorsque l'une rompt à un niveau de sollicitation, la suivante est testée à un niveau inférieur. A l'inverse, si elle résiste, la suivante est testée à un niveau supérieur.

On considère :
- Le niveau de contrainte initial S_{ini} ;
- Le pas δ entre deux niveaux de contrainte testés ;
- Le nombre d'essais à réaliser *n*.

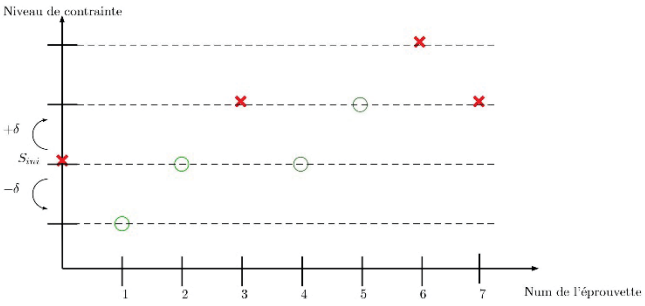


Figure 2 : Procédure Staircase

Une fois les n essais réalisés, l'estimation de θ est effectuée par maximum de vraisemblance.

En pratique la méthode se stabilise après un faible nombre d'essais (une trentaine).

Mais elle a plusieurs inconvénients majeurs. En effet, sa convergence repose sur des hypothèses fortes :
- S_{ini} doit être proche de la valeur de la moyenne de la distribution de R ;
- Le pas δ doit être de l'ordre d'1/2 à 2 fois la valeur de l'écart-type de la distribution d'intérêt.

Ces deux hypothèses supposent une connaissance a priori assez précise de la distribution de R, ce qui n'est pas le cas en pratique.

Historiquement, cette méthode vise à estimer la tendance centrale de la loi. Elle est, dans ce cadre, efficace et peu coûteuse. En revanche, elle ne permet d'obtenir que des estimations des dispersions très imprécises et qui rendent l'extrapolation sur la loi à partir des paramètres estimés très hasardeuse. C'est pourquoi le Staircase n'est généralement pas adapté à la caractérisation de quantiles de défaillance, en particulier d'ordre extrême. Selon le type de loi utilisée pour Φ_θ, l'erreur relative sur la contrainte admissible est comprise entre 200 et 600%.

Ces insuffisances, mises en parallèle avec enjeux associés à l'estimation des contraintes admissibles, justifient le développement d'une nouvelle procédure orientée vers la caractérisation de quantiles.

4. Méthodologie d'estimation d'un quantile extrême

La principale difficulté consiste à étudier la survenue d'un évènement qui n'est pas observé dans des conditions standards, ce qui oblige à extrapoler à partir de la loi estimée, et seulement à partir d'une information partielle. L'approche envisagée dans la suite des travaux de thèse a consisté à décomposer le problème initial en une séquence de problèmes moins complexes.

Une probabilité de niveau très faible peut se réécrire comme le produit de probabilités de niveaux plus élevés, qui sont plus facilement évaluables à partir d'un nombre limité d'observations. Formellement, le problème peut se réécrire de la façon suivante :

Notons P_0 la loi de R.

On peut exprimer l'évènement $R \leq s_\alpha$ comme l'intersection d'évènements conditionnels. Pour cela, on considère une série de m évènements inclusifs :

$$\{R \leq s_\alpha\} = \{R \leq s_m\} \subset \cdots \subset \{R \leq s_1\},$$

$$\text{avec } s_\alpha = s_m < s_{m-1} < \cdots < s_1$$

On peut alors décomposer la probabilité de rupture sous s_α en produit de probabilités d'évènements conditionnels :

$$P_0(R \leq s_\alpha) = P_0(R \leq s_1) \prod_{j=1}^{m-1} P_0\left(R \leq s_{j+1} \mid R \leq s_j\right) \qquad \{2\}$$

Les seuils $(s_j)_{j=1,\dots,m}$ sont à déterminer de manière à ce que $\left(P_0\left(R \leq s_{j+1} \mid R \leq s_j\right)\right)_{j=1,\dots,m}$ soit de l'ordre de 20 ou 30%. L'idée étant de viser des niveaux suffisamment élevés pour pouvoir observer l'évènement considéré, mais suffisamment bas pour permettre la reconstitution de α en un faible nombre d'itérations.

La décomposition purement formelle de l'équation {2} fait apparaître une méthode séquentielle de détermination de s_α.

On fixe
- Le nombre m de niveaux à tester ;
- Le niveau p des probabilités conditionnelles ;
- Le seuil de test initial s_1

} $p^m = \alpha$

Première étape :

- n essais $Y_1^{(1)}, \dots, Y_n^{(1)} \sim B\left(P(R \leq s_1)\right)$, où $B(.)$ désigne une loi de Bernoulli.
- Détermination de s_2, le quantile d'ordre p de la loi de $R \mid R \leq s_1$

Pour $j = 2, \dots, m$

- n essais

$$Y_1^{(j)}, \dots, Y_n^{(j)} \sim B\left(P\left(R \leq s_j \mid R \leq s_{j-1}\right)\right)$$

- Détermination de s_{j+1}, le quantile d'ordre p de la loi de $R \mid R \leq s_j$

Le dernier niveau s_m est l'estimateur de s_α

L'une des principales problématiques liées à la méthodologie proposée est que cette dernière suppose d'échantillonner des éprouvettes de plus en plus fragiles au cours des essais successifs. Cela suppose en pratique de disposer d'une information a priori sur la durée de vie des éprouvettes à un niveau de stress donné.

En effet, la méthodologie proposée suppose l'échantillonnage dans les parties à faible densité de la loi de la résistance (donc de travailler sur des éprouvettes « fragiles »), modélisées comme appartenant à un régime plus élevé de la loi conditionnelle de la résistance.

La méthode séquentielle est appliquée sur des éprouvettes appartenant à une partie de plus en restreinte de la densité :

- À la première étape, on considère des points échantillonnés sur l'ensemble du support de la distribution de R_{n_0} ;
- À l'étape suivante, on considère des éprouvettes dont la résistance se situe jusqu'à la zone jaune, puis orange, puis rouge ;
- À la dernière étape, les éprouvettes testées ont une probabilité de rompre à n_0 très faible (zone rouge située dans la queue de distribution – éprouvettes très fragiles).

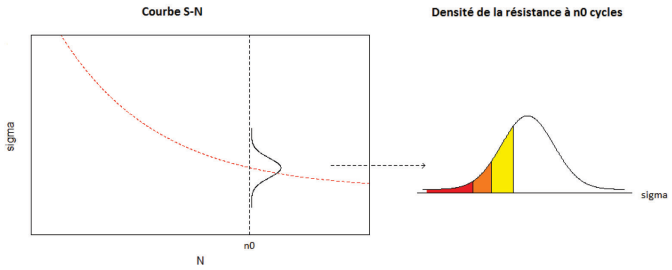


Figure 3 : Courbe S-N et résistance à n_0 cycles

Le bon déroulement de la procédure est dépendant de la possibilité d'échantillonner des éprouvettes sur toute la queue de distribution de la résistance du matériau. Établir des groupes d'éprouvettes sera d'autant plus aisé que la dispersion de la résistance sera grande.

L'approche retenue pour permettre le passage à la phase expérimentale consiste à incorporer des défauts pilotés dans les éprouvettes. La taille des défauts doit faire figure

d'indicateur de tenue en fatigue, étant entendu que plus elle est grande, plus l'éprouvette va casser rapidement. On suppose ici qu'il existe ∀j une taille de défaut θ_j telle que la loi de la résistance du matériau avec défaut soit représentative de celle de la sous-population du matériau dont la résistance est inférieure à s_j :

$$\mathcal{L}\left(R_{\theta_j}\right) \approx \mathcal{L}\left(R \mid R \leq s_j\right)$$

Des essais sur certaines tailles de défaut inclus ont été menés. Si leur nombre limité ne permet pas de valider l'hypothèse d'identité des lois avec certitude, les résultats obtenus semblent néanmoins attester que l'inclusion d'un défaut ne modifie pas la forme de la distribution de la résistance.

La campagne d'essais test est actuellement en cours de lacement. Elle utilisera 5 tailles de défauts différentes parmi celles présentées sur la figure 4. Chaque taille de défaut est associée à un seuil de conditionnement qui sera déterminé en phase préléminaire.

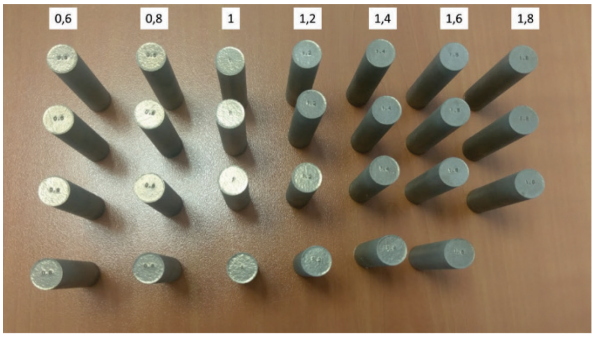


Figure 4: Eprouvettes non usinées avec défauts

5. Modélisation de la résistance en fatigue

La résistance est une variable non observée en pratique, et sur laquelle peu d'information est disponible, en particulier à grands nombres de cycles. Les hypothèses paramétriques sont donc difficilement vérifiables. Historiquement, les études sur le sujet se sont concentrées sur l'estimation de la moyenne ou tendance centrale de la loi, et supposaient la loi gaussienne. Cette hypothèse semble en revanche bien moins justifiable pour l'étude d'un quantile extrême.

Dans la mesure où les évènements considérés sont de probabilité de plus en plus faible, il est légitime de s'intéresser au régime limite de la loi de R. En particulier, l'équation {2} peut être réécrite via un changement de variable sur R comme un produit de probabilités conditionnelles.

On note $\widetilde{R} = u(R)$, avec u positive et décroissante monotone, telle que $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$

$$\lim_{s\to 0, x<s} P(R < x \mid R < s) = \lim_{u(s)\to\infty, u(x)>u(s)} P\left(\widetilde{R} > u(x) \,\middle|\, \widetilde{R} > u(s)\right)$$

On utilise ensuite le théorème de Balkema et De Haan (1974) énonçant que la limite des excès renormalisés d'une variable aléatoire positive est une loi de Pareto Généralisée :

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\widetilde{R} > \frac{x+s}{a(s)} \mid \widetilde{R} > s\right) = G(x)$$

où G est définie par

$$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{x/a_0} & \text{pour } c = 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{cx}{a_0}\right)^{-1/c_0} & \text{pour } c \neq 0 \end{cases}$$

Avec $a > 0$ et $c \in R$.

La résistance est modélisée comme l'inverse d'une loi de Pareto Généralisée. Cette dernière présente l'avantage d'être indiquée pour l'étude des queues de distribution et de garantir une adéquation croissante aux données à mesure qu'on avance dans la procédure de splitting. Elle possède également une propriété de stabilité par seuillage qui la rend particulièrement intéressante dans le cadre de la formule de splitting.

En effet, si $\widetilde{R} \sim GDP(c, a_0)$ alors $\widetilde{R} - s \mid \widetilde{R} > s \sim GPD(c, a_0 + cs)$

D'où la réécriture de la formule {2} suivante :

$$P_0\left(\widetilde{R} > \widetilde{s_m}\right) = P\left(\widetilde{R} > \widetilde{s_1}\right) \prod_{j=1}^{m-1} P_0\left(\widetilde{R} - \widetilde{s_j} > \widetilde{s_{j+1}} - s_j \mid \widetilde{R} > \widetilde{s_j}\right)$$

$$= \overline{G}(\widetilde{s_1}) \prod_{j=1}^{m-1} \overline{G_{\widetilde{s_j}}}\left(\widetilde{s_{j+1}} - \widetilde{s_j}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{c\widetilde{s_1}}{a_0}\right)^{-1/c} \prod_{j=1}^{m-1} \left(1 + \frac{c\left(\widetilde{s_{j+1}} - \widetilde{s_j}\right)}{a_j}\right)^{-1/c} \qquad \{3\}$$

où $a_j = a_0 + c\widetilde{s_j}$

Une propriété remarquable est que le modèle est entièrement déterminé par les paramètres de la loi de $\widetilde{R}$, c'est-à-dire a_0 et c.
Le protocole d'essai décrit précédemment devient :

À l'étape j=1,

- n essais $Y_1^{(1)}, \ldots, Y_n^{(1)} \sim \mathcal{B}\left(\overline{G}(\widetilde{s_0})\right)$

- Détermination de $\widetilde{s_2}$, le niveau de stress qui vérifie :

$$\widetilde{s_2} - \widetilde{s_1} = G^{-1}(1-p)$$

À chaque étape $j = 2, \ldots, m$,

- On souhaite échantillonner sous la loi conditionnelle de $\widetilde{R} \mid \widetilde{R} > \widetilde{s_{j-1}}$, c'est-à-dire se placer dans le cas où les éprouvettes considérées ont une résistance inférieure à s_{j-1} (soit $\widetilde{R} > \widetilde{s_{j-1}}$) avec probabilité 1.

On sait que $\widetilde{R} - \widetilde{s_{j-1}} \mid \widetilde{R} > \widetilde{s_{j-1}} \sim GPD\left(c_0, a_0 + c_0 s_{j-1}\right)$.
n essais sont réalisés au niveau de contrainte courant

s_j, dont les résultats sont les indicatrices de rupture : $Y_1^{(1)}, \dots, Y_n^{(1)}$. La probabilité de rupture est $P(\tilde{R} > s_j \mid \tilde{R} > s_{j-1}) = \overline{G_{s_{j-1}}}(s_j - s_{j-1})$.

- Détermination de $\tilde{s_j}$, le niveau de stress qui vérifie : $s_{j+1} - s_j = G^{-1}(1-p)$

Le dernier niveau s_m est l'estimateur de s_α.

6. Méthode d'estimation

L'estimation du quantile d'ordre α de $\tilde{R}$ par la procédure décrite dans les parties précédentes repose sur l'estimation successive des quantiles intermédiaires, elle-même dépendante de la qualité des estimations des paramètres de la loi. Les lois conditionnelles étant fonction des mêmes paramètres que la loi de départ, les données issues de chaque série d'essais permettent de mettre à jour les estimations de c et a_0.

Cependant, l'estimation par les méthodes usuelles (maximum de vraisemblance ou minimum de divergence) est rendue difficile par la censure des données, rendant les paramètres de la loi de Pareto non identifiables. En effet, lorsque l'ajustement se fait sur la minimisation de la distance entre la proportion observée de dépassements et la proportion théorique, il existe tout un ensemble de couples de paramètres minimisant de manière équivalente cette distance.

Afin de palier à ces difficultés, l'approche adoptée consiste à combiner deux critères d'estimation. On conserve le critère de maximum de vraisemblance. Mais à celui-ci est ajouté un critère de discrimination portant sur la stabilité des estimations des quantiles successifs. Ce dernier est pleinement justifié par la finalité de l'étude, qui est l'estimation d'un quantile, alors que le critère de maximum de vraisemblance se concentre sur la tendance centrale de la distribution.

La méthode retenue est la suivante : à chaque étape j, une série de n essais est réalisée au seuil en cours s_j. A partir de la proportion de dépassements observés (ruptures) $\widehat{p_j} = \frac{1}{n}\sum_i Y_i$, on construit un intervalle de confiance d'ordre γ, noté I_γ :

$$I_\gamma = \left[\hat{p}_j - q_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{n-1}}; \hat{p}_j + q_{1-\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{n-1}}\right]$$

où $q_{1-\gamma/2}$ est le quantile d'ordre $1-\gamma/2$ d'une loi normale standard.

L'ensemble des paramètres assurant que la proportion théorique, définie par le modèle de Pareto, appartient à I_α est obtenu en utilisant l'algorithme d'optimisation ensembliste SAFIP développé par M. Biret et M. Broniatowski :

$$\mathcal{S}_j = \{(\widehat{c_k}, \widehat{a_k})_k : p_{j,k} = \overline{G_{\widehat{c_k},\widehat{a_k}}} \in I_\alpha\}$$

Parmi $\mathcal{S}_j$, le couple de paramètres retenu est celui qui satisfait au mieux un critère de stabilité sur les quantiles précédents. L'objectif est de minimiser la distance entre la proportion de rupture observée aux étapes précédentes et la probabilité théorique correspondante. Pour un critère portant sur la dernière itération, on s'intéresse à

$$\left|P(\tilde{R} > \widetilde{s_{j-1}} \mid \tilde{R} > \widetilde{s_{j-2}}) - \widehat{p_{j-1}}\right| =$$

$$\left|\overline{G_{\widetilde{s_{j-2}}}}(\widetilde{s_{j-1}} - \widetilde{s_{j-2}}) - \widehat{p_{j-1}}\right|$$

ou, de manière équivalente à

$$\left|(\widetilde{s_{j-1}} - \widetilde{s_{j-2}}) - G^{-1}_{\widetilde{s_{j-2}}}(1-\widehat{p_{j-1}})\right|$$

D'où l'estimateur retenu :

$$(\widehat{c^*}, \widehat{a^*}) = \mathrm{argmin}_k \left|\widehat{G^{-1}_{\widetilde{s_{j-2}},k}}(1-\widehat{p_{j-1}}) - (\widetilde{s_{j-1}} - \widetilde{s_{j-2}})\right|$$

où $\widehat{G^{-1}_{\widetilde{s_{j-2}},k}}$ est la fonction quantile associée à la loi $GPD(\widehat{c_k}, \widehat{a_k} + \widehat{c_k}\widetilde{s_{j-2}})$

On peut également utiliser un critère prenant en compte tous les résultats obtenus au cours des étapes précédentes :

$$(\widehat{c^*}, \widehat{a^*}) = \mathrm{argmin}_k \sum_{l=2}^{j-1} \lambda_l \left|\widehat{G^{-1}_{\tilde{s}_l,k}}(1-\hat{p}_l) - (s_l - s_{l-1})\right|$$

avec $\sum_{l=2}^{j-1}\lambda_l = 1$.

7. Résultats numériques

En amont du lancement de la campagne d'essais réelle, la procédure itérative proposée a été testée sur données simulées.

La procédure a été utilisée pour estimer les quantiles d'ordre α pour trois jeux de paramètres correspondant à des lois à queues plus ou moins lourdes :

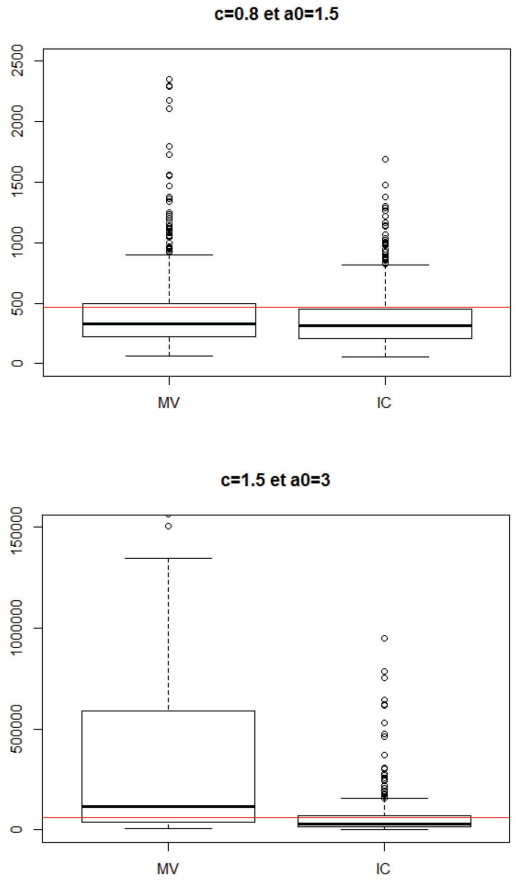
- **Modèle 1** : situation de référence : $(c, a_0) = (1.5, 1.5)$;
- **Modèle 2** : une loi à queue moins lourde : $(c, a_0) = (0.8, 1.5)$;
- **Modèle 3** : une distribution ayant le même indice de queue ($c = 1.5$), mais un paramètre de dispersion plus élevé ($a_0 = 3$).

Le tableau 1 fait apparaître une dépendance entre les résultats de la méthode et la forme de la loi étudiée. En effet, les estimations sur les lois à queues plus lourdes sont en moyenne plus éloignées de la valeur cible et plus dispersées.

Table 1 : Moyenne et écart-type des erreurs relatives sur le quantile d'ordre α de lois de Pareto calculés sur 400 répliques de la procédure itérative

Paramètres	**Erreur relative sur s_α**	
	Moyenne	**Ecart-type**
$\mathbf{c = 0.8 \quad a_0 = 1.5}$ et $\mathbf{s_\alpha = 469.103}$	-0.222	0.554
$\mathbf{c = 1.5, a_0 = 1.5}$ et $\mathbf{s_\alpha = 31621.777}$	-0.504	0.720
$\mathbf{c = 1.5, a_0 = 3}$ et $\mathbf{s_\alpha = 63243.550}$	0.310	0.590

Dans chaque cas, la simulation est réalisée pour 5 séries d'essais, afin d'approcher au mieux les conditions réelles. En effet, le nombre m de seuils testés (et donc d'itérations dans la procédure) doit être le plus faible possible pour des raisons budgétaires, tout en permettant de viser des niveaux de probabilités conditionnelles suffisamment élevé. Le compromis retenu consiste à conserver 5 niveaux de test.



La vraie valeur s_α est représentée par la ligne rouge sur les boites à moustache.

Figure 5: Estimation du quantile d'ordre α pour deux jeux de paramètres par la procédure par MV et par la procédure sur deux critères.

Deux méthodes d'estimation ont été comparées : l'une utilisant le maximum de vraisemblance pour mettre à jour les estimations des paramètres à chaque itération (notée MV sur les graphiques suivants) et l'autre utilisant le double critère d'estimation présenté dans la section précédente (notée IC). Les résultats numériques ne sont pas ici comparés à la méthode Staircase, celle-ci donnant des résultats dans le cadre du modèle de Pareto avec une erreur relative sur le quantile de l'ordre de 600%.

On observe une très nette amélioration de la qualité de l'estimation par rapport au cas où l'optimisation est effectuée par maximum de vraisemblance à chaque itération lorsque les lois sont à queues lourdes. En effet, la méthode est beaucoup plus robuste au changement de paramètres (cf. figure 5), mais aussi au nombre d'essais n réalisés à chaque itération (cf. figure 6).

Quelle que soit la méthode utilisée, les estimations sur une loi à queue plus lourde se dégradent. La différence est cependant nettement moins importante pour la procédure intégrant un critère de stabilité sur le quantile. Ainsi, lorsqu'on passe du modèle 2 au 3 , l'écart-type de l'erreur

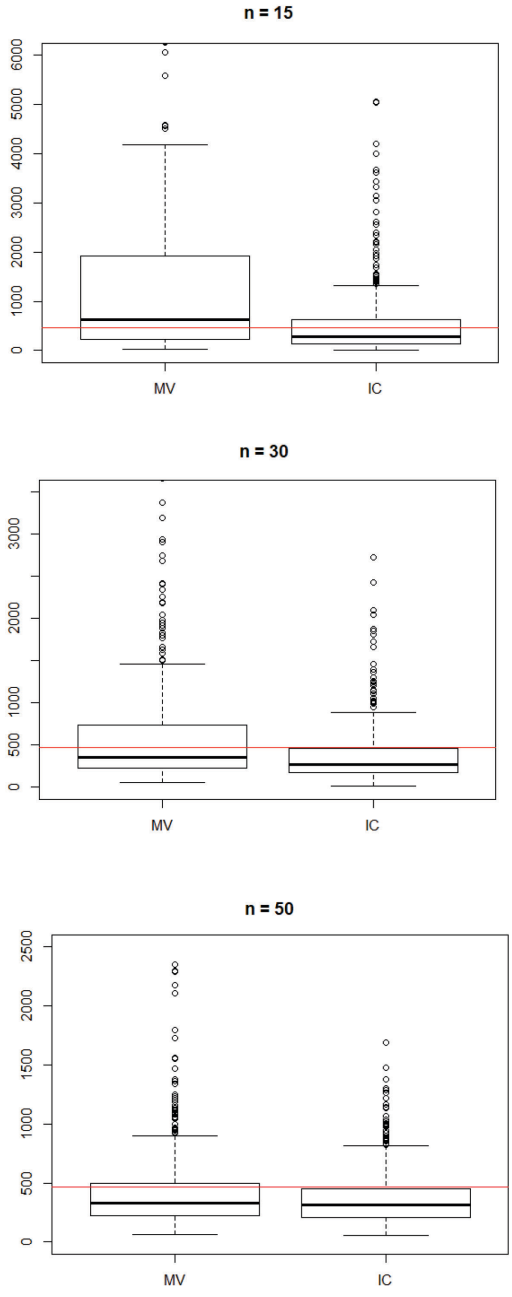


Figure 6 : Estimation du quantile d'ordre α pour $(c, a_0) = (0.8,1.5)$ par la procédure par MV et par la procédure sur deux critères pour différentes valeurs de n

d'estimation sur s_α est multiplié par 3.5×10^4 pour la procédure par maximum de vraisemblance, mais seulement par 7 pour la seconde.

La dispersion des résultats obtenus par maximum de vraisemblance augmente énormément lorsque la taille d'échantillon décroit (figure 6). Elle est multipliée par 1.5×10^5 lorsque le nombre d'observations par itération passe de 50 à 15. La procédure intégrant un critère de stabilité sur les quantiles évite cet écueil : les résultats restent plutôt stables lorsque n décroit.

Les résultats numériques obtenus sur données simulées mettent en évidence la supériorité de l'estimation par double critère sur celle par maximum de vraisemblance. En effet, l'ajout de la condition de minimisation de la distance entre quantiles théoriques et empiriques des étapes précédentes permet à la fois d'intégrer toute l'information disponible sur la loi, et de cibler, à l'intérieur de la plage de valeurs équivalentes du point de vue de la vraisemblance, la zone la plus compatible avec les essais précédents. Par comparaison, la seule maximisation de la vraisemblance ne
permet pas de réduire suffisamment l'ensemble de couples de paramètres admissibles pour stabiliser les estimations.

Il est à noter que les résultats obtenus se fondent sur des échantillons d'entre 75 et 250 essais au total. Cela est largement supérieur aux campagnes d'essais Staircase, mais est un coût que l'entreprise est prête à payer pour garantir un gain en précision et robustesse conséquent.

Conclusion

Cette étude a pour origine un vide méthodologique concernant une problématique industrielle spécifique. L'estimation de contrainte admissible en fatigue des matériaux est à la fois un enjeu économique pour le constructeur de moteur, et un enjeu statistique. La procédure de planification proposée permet de tirer au mieux parti de la faible quantité et de la nature dégradée de l'information fournie par les essais de fatigue. Elle fournit un cadre général pouvant permettre de répondre aux problématiques du même type qui peuvent être rencontrées dans d'autres domaines de l'industrie ou dans le cadre des études cliniques. Les résultats obtenus par simulation sont prometteurs. Une campagne d'essais est en cours de lancement et permettra de valider cette procédure.

Remerciements

Cette étude est le fruit d'une collaboration entre Safran Aircraft Engines et le laboratoire de Probabilités, Statistiques et Modélisation de l'Université Pierre et Marie Curie. Nous remercions l'ensemble des ingénieurs et collaborateurs qui se sont investis dans le développement de la stratégie d'essais et sa réalisation.

Références

Balkema A. A. and De Haan L., Residual Life Time at Great Age, *Ann. Prob.*, vol 2 (5), pages 762-804, 1974

Dixon W.J., The up-and-down method for small samples. *Journal of the American Statistical Association*, 60 :967–978, 1965.

Dixon W. J. and Mood A. M., A Method for Obtaining and Analyzing Sensitivity Data, *Journal of the American Statistical Association*, vol 43, pages 109-126, 1948

Glasserman P. et *al.*. Multilevel splitting for estimating rare event probabilities. *Oper. Res.,* 7(4):585-600, 1999.

Pickands J., Statistical Inference using extreme order statistics, *Ann. Stat.*, vol 3 (1), pages 119-131, 1975