

Sur l'extensibilité d'une stratégie de calcul multiéchelle et parallèle avec homogénéisation en temps et en espace

Jean-Charles Passieux, Pierre Ladevèze, David Néron

► **To cite this version:**

Jean-Charles Passieux, Pierre Ladevèze, David Néron. Sur l'extensibilité d'une stratégie de calcul multiéchelle et parallèle avec homogénéisation en temps et en espace. CFM 2007 - 18e Congrès Français de Mécanique., 2007, Grenoble, France. hal-02025340

HAL Id: hal-02025340

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02025340>

Submitted on 6 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur l'extensibilité d'une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace

Jean-Charles Passieux, Pierre Ladevèze[†] et David Néron

LMT-Cachan (ENS de Cachan/CNRS UMR8535/Université Paris 6)
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX, France
{passieux, ladeveze, neron}@lmt.ens-cachan.fr

[†] Chaire de la Fondation EADS 'Advanced Computational Structural Mechanics'

Résumé :

Nous développons une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour la résolution de problèmes de structures fortement hétérogènes. Il s'agit d'une méthode mixte de décomposition de domaine en espace et en temps. Actuellement, l'extensibilité n'est que partielle en temps, l'objectif est de la rendre totale. Cet article s'intéresse à un point clé, l'utilisation d'une représentation adaptée des inconnues. Quelques exemples sont présentés pour illustrer cette technique.

Abstract :

This paper deals with a multiscale computational strategy with time and space homogenization for the resolution of highly heterogeneous structural problems with parallel computing. This strategy can be viewed as a mixed, multilevel domain decomposition method. For now, the strategy is only partially extensible in time, the aim is to have full extensibility. This paper focuses on a key point, the use of a well suited representation of unknowns. Some examples are provided to show the performances of the approach.

Mots-clefs :

LaTIn ; Approximation radiale ; Temps-espace

1 Introduction

La simulation du comportement des matériaux complexes à des échelles fines conduit à des problèmes dont le coût de calcul est généralement prohibitif avec les moyens de calculs actuels.

Dans [Ladevèze & Nouy (2003), Ladevèze *et al.* (2007)], une nouvelle stratégie de calcul multiéchelle a été proposée pour l'analyse de structures dont le comportement est décrit à une échelle fine, tant en temps qu'en espace. Cette stratégie s'inscrit dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine [Gosselet et Rey (2007)] mais avec un raccordement mixte. Cette stratégie inclut une procédure d'homogénéisation automatique, et ceci tant en espace qu'en temps. En effet, une telle stratégie devrait se substituer aux approches standard d'homogénéisation limitées aux domaines périodiques [Sanchez-Palencia (1974)]. C'est une stratégie itérative basée sur la LaTIn method [Ladevèze (1999)] qui conduit à la fois à des résolutions à l'échelle fine (dite *micro*) et à l'échelle homogénéisée (dite *macro*). Le choix du découplage spatial micro-macro confère en vertu du principe de Saint Venant la propriété recherchée d'extensibilité en espace.

L'objet du travail présenté ici est d'étendre cette propriété au cas multiéchelle en temps, ceci dans le but d'accroître la robustesse de la méthode. En effet, cette propriété n'est, dans la version actuelle, pas vérifiée dans certains cas. Dans cet article, nous mettons l'accent sur l'approximation radiale, qui est la clé de ce défaut d'extensibilité. Des résultats sur la pertinence de cette représentation sont présentés.

2 Problème de référence

Pour simplifier la présentation, on s'intéresse à l'évolution quasi-statique et isotherme d'une structure viscoélastique définie sur le domaine temps-espace $[0, T] \times \Omega$. Cette structure est soumise à des forces volumiques f_d , des forces surfaciques F_d sur une partie $\partial_2\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$ de Ω et un déplacement \underline{U}_d sur la partie complémentaire $\partial_1\Omega$ (cf. Fig. 1(a)). On note ε la déformation associée au champ de déplacement \underline{U} et σ la contrainte. La déformation se décompose en une partie élastique ε_e telle que $\sigma = \mathbf{K}\varepsilon_e$ (\mathbf{K} opérateur de Hooke), et une partie anélastique ε_p reliée à la contrainte, via un opérateur de viscosité \mathbf{B} éventuellement non linéaire, par la relation de comportement $\dot{\varepsilon}_p = \mathbf{B}(\sigma)$. Le champ de déplacement initial est noté \underline{U}_0 .

La structure Ω est décomposée en un assemblage de composants élémentaires, appelés sous-structures et interfaces (Fig. 1(b)). L'interface entre une sous-structure Ω_E ¹ et une sous-structure $\Omega_{E'}$ est notée $\Phi_{EE'}$ (Fig. 1(c)). Chaque sous-structure et chaque interface possède ses propres variables et ses propres équations (d'admissibilité, d'équilibre ou de comportement) régissant son évolution.

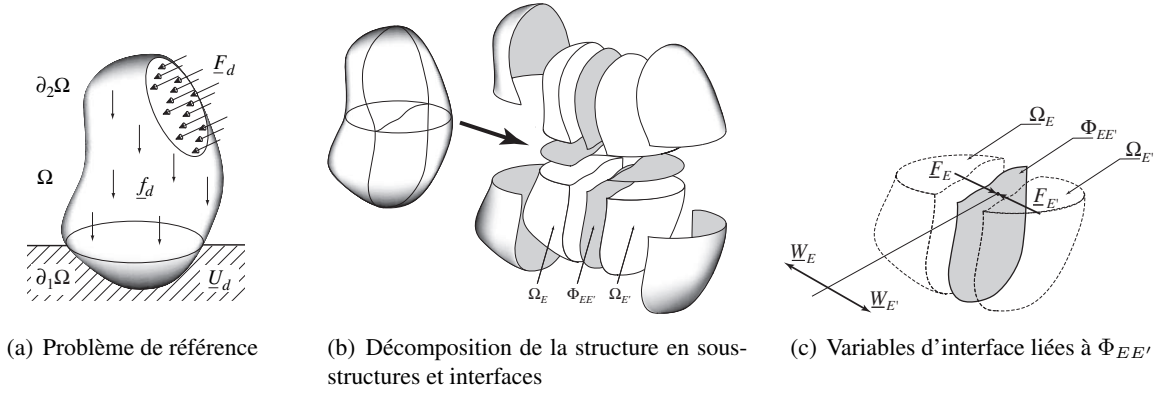


FIG. 1 – Décomposition du domaine Ω

On note $\mathbf{s}_E = (\dot{\varepsilon}_{pE}, \dot{W}_E, \sigma_E, F_E)$ l'ensemble de champs qui décrivent l'état de la sous-structure Ω_E et de sa frontière $\partial\Omega_E$ et on désigne par \mathbf{E}_E , \mathcal{W}_E , \mathbf{F}_E et \mathcal{F}_E les espaces correspondant.

On introduit les espaces suivants, ainsi que les espaces homogènes associés (notés \square^*) :

– l'espace \mathcal{E}_E des champs cinématiquement admissibles (ε_E, W_E) :

$$(\varepsilon_E, W_E) \in \mathcal{E}_E \iff \exists \underline{U}_E \text{ tq.}, \quad \underline{U}_E|_{\partial\Omega_E} = W_E, \quad \underline{U}_E|_{t=0} = \underline{U}_{E0}, \quad \varepsilon_E = \nabla_{sym} \underline{U}_E \quad (1)$$

– l'espace \mathcal{S}_E des champs statiquement admissibles (σ_E, F_E) :

$$\begin{aligned} (\sigma_E, F_E) \in \mathcal{S}_E &\iff \forall (\underline{U}_E^*, W_E^*) \in \mathcal{E}_E^*, \\ & - \int_{[0,T] \times \Omega_E} \sigma_E : \varepsilon(\dot{\underline{U}}_E^*) d\Omega dt + \int_{[0,T] \times \Omega_E} f_d \cdot \dot{\underline{U}}_E^* d\Omega dt + \int_{[0,T] \times \partial\Omega_E} F_E \cdot \dot{W}_E^* dS dt = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

– l'espace \mathbf{A}_{dE} des champs E -admissibles \mathbf{s}_E :

$$\mathbf{s}_E = (\dot{\varepsilon}_{pE}, \dot{W}_E, \sigma_E, F_E) \in \mathbf{A}_{dE} \iff (\mathbf{K}^{-1} \sigma_E + \dot{\varepsilon}_{pE}, \dot{W}_E) \in \mathcal{E}_E \text{ et } (\sigma_E, F_E) \in \mathcal{S}_E$$

– l'espace \mathbf{A}_d des champs admissibles $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_E)_{\Omega_E \subset \Omega}$: $\mathbf{A}_d = \bigotimes_{\Omega_E \subset \Omega} \mathbf{A}_{dE}$

¹La notation \square_E sera utilisée pour désigner la restriction d'une quantité \square à la sous-structure Ω_E

L'interface est caractérisée par la restriction à $\Phi_{EE'}$ des champs des déplacements $(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'})$ et des champs d'efforts $(\underline{F}_E, \underline{F}_{E'})$. Ces restrictions sont notées $(\underline{W}_{EE'}, \underline{W}_{E'E})$ et $(\underline{F}_{EE'}, \underline{F}_{E'E})$: Nous définissons une relation entre ces quantités qui caractérise le comportement $\mathbf{b}_{EE'}$ de l'interface.

$$\mathbf{b}_{EE'} \left(\dot{\underline{W}}_{EE'}, \dot{\underline{W}}_{E'E}, \underline{F}_{EE'}, \underline{F}_{E'E} \right) = 0 \quad (3)$$

Par exemple, pour une interface parfaite : $\dot{\underline{W}}_{EE'} = \dot{\underline{W}}_{E'E}$ et $\underline{F}_{EE'} + \underline{F}_{E'E} = \underline{0}$. Dans ces conditions, il est très simple de prendre en compte des comportements non linéaires tels que des interfaces cohésives ou du contact avec ou sans frottement, avec ou sans jeu initial [Champany (2004)].

On définit maintenant l'espace Γ des champs qui vérifient le comportement des interfaces et celui des sous-structures $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_E)_{\Omega_E \subset \Omega}$:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{s}_E)_{\Omega_E \subset \Omega} \in \Gamma \iff \forall \Omega_E \subset \Omega, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}_E) \quad \text{et} \\ \forall \Omega_E \subset \Omega, \forall \Omega_{E'} \in \Omega_E, \quad \mathbf{b}_{EE'} \left(\dot{\underline{W}}_{EE'}, \dot{\underline{W}}_{E'E}, \underline{F}_{EE'}, \underline{F}_{E'E} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\text{Le problème à résoudre consiste donc à trouver :} \quad \mathbf{s}_{\text{ex}} = (\mathbf{s}_E)_{\Omega_E \subset \Omega} \in \mathbf{A}_d \cap \Gamma \quad (5)$$

Il faut noter que \mathbf{A}_d est un ensemble de solutions de problèmes qui sont linéaires globaux, mais indépendants entre les sous-structures, tandis que Γ est un ensemble de solutions d'équations locales, éventuellement non linéaires. Un tel choix de partitionnement des équations permet d'avoir des propriétés de parallélisation particulièrement intéressantes pour proposer une stratégie de résolution.

3 Présentation de la stratégie de calcul multiéchelle

On utilise la méthode LaTIn pour résoudre le problème précédent. Cette méthode est fondée sur l'idée de séparer les difficultés, en reformulant le problème comme cela a été fait dans la Section précédente, puis à générer la solution en utilisant un schéma itératif (cf. Fig. 2) dont il est possible de prouver la convergence sous certaines conditions peu restrictives [Ladevèze (1999)]. Une itération se compose des deux étapes, appelées « étape locale » et « étape linéaire ».

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d \xrightarrow{\text{étape locale}} \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma \xrightarrow{\text{étape linéaire}} \mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d \longrightarrow \hat{\mathbf{s}}_{n+3/2} \in \Gamma \longrightarrow \cdots \mathbf{s}_{\text{ex}}$$

itération $n + 1$

FIG. 2 – Les étapes locale et linéaire de la méthode LATIN

L'étape locale consiste à trouver $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$ connaissant $\mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d$ et en utilisant une direction de montée \mathbf{E}^+ . Cette direction est définie par :

$$\mathbf{E}^+ \quad \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) + \mathbf{H}^+(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) = 0 \\ (\dot{\underline{W}} - \dot{\underline{W}}) - \mathbf{h}^+(\underline{\hat{F}} - \underline{F}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{indice } E \text{ omis}) \quad (6)$$

À cette étape, les problèmes sont locaux en espace (pour peu que \mathbf{B} le soit). Leur calcul offre un degré de parallélisme optimum.

L'étape linéaire consiste à trouver $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ connaissant $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$ et en utilisant une direction de descente \mathbf{E}^- . Cette direction est définie par :

$$\mathbf{E}^- \quad \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p) - \mathbf{H}^-(\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = 0 \\ (\dot{\underline{W}} - \dot{\underline{\hat{W}}}) + \mathbf{h}^-(\underline{F} - \underline{\hat{F}}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{indice } E \text{ omis}) \quad (7)$$

où \mathbf{H}^+ , \mathbf{H}^- , \mathbf{h}^+ et \mathbf{h}^- sont des opérateurs symétriques, définis, positifs qui sont des paramètres de la méthode.

La prise en compte des aspects multiéchelles est réalisée en séparant les quantités d'interfaces en une partie macro (caractérisée par la taille de chaque interface en espace et par la durée des intervalles macro en temps) et son complément micro. Pour une quantité $\dot{\underline{W}}_E \in \mathcal{W}_E$, les parties macro $\dot{\underline{W}}_E^M$ et micro $\dot{\underline{W}}_E^m$ sont définies par :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_E^M, \quad \int_{[0,T] \times \partial\Omega_E} (\dot{\underline{W}}_E^M - \dot{\underline{W}}_E) \cdot \underline{F}^* dS dt = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\underline{W}}_E^m = \dot{\underline{W}}_E - \dot{\underline{W}}_E^M \quad (8)$$

Où l'espace \mathcal{F}_E^M est défini par les résultantes et moments des efforts sur l'interface ainsi que leur partie quadratique en temps.

Afin de propager les informations dans toute la structure et de conférer l'aspect multiéchelle à la méthode, on impose aux efforts macro $\underline{F}^M = (\underline{F}_E^M)_{\Omega_E \subset \Omega}$ de vérifier systématiquement les conditions de continuité aux interfaces et les conditions aux limites. Ceci conduit à ajouter à la résolution classique du problème fin (dit micro) de l'étape linéaire, la résolution d'un problème macro posé sur la partie macro des inconnues d'interface [Ladevèze & Nouy (2003)].

4 Approximation radiale de l'étape linéaire

Ce point fait partie intégrante de la méthode LaTin décrite dans [Ladevèze (1999)] et consiste à rechercher les inconnues sous la forme d'un « chargement radial » c'est-à-dire, comme une somme de fonctions découplées en temps et en espace [Nouy et Ladevèze (2004)].

4.1 Problème de minimisation sur un espace vectoriel

On reformule l'étape linéaire sur la correction de la solution $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n$ à l'itération n de la LaTin. On notera $\Delta \hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n$.

$$\mathbf{E}^- \quad \begin{cases} \mathbf{H}^- (\Delta \underline{\sigma} - \bar{\underline{\sigma}}) - (\Delta \dot{\underline{\epsilon}}_p - \bar{\dot{\underline{\epsilon}}}_p) = 0 \\ \mathbf{h}^- (\Delta \underline{F} - \bar{\underline{F}}) + (\Delta \dot{\underline{W}} - \bar{\dot{\underline{W}}}) = 0 \end{cases} \quad (\text{indice } E \text{ omis}) \quad (9)$$

Les quantités $\bar{\square}$ sont connues à cette étape et dépendent notamment de $\Delta \hat{\mathbf{s}}$.

Nous formulons à présent le problème précédent comme un problème de minimisation, sur l'espace vectoriel \mathbf{A}_{dE}^* , du résidu associé à la vérification de la direction de recherche (9). Le problème est donc de trouver $\Delta \mathbf{s} \in \mathbf{A}_{dE}^*$ minimisant l'erreur de direction de recherche :

$$e_{RdC}^2(\Delta \mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) = \|\|\| \mathbf{H}^- (\Delta \underline{\sigma} - \bar{\underline{\sigma}}) - (\Delta \dot{\underline{\epsilon}}_p - \bar{\dot{\underline{\epsilon}}}_p) \|\|_1^2 + \|\|\| \mathbf{h}^- (\Delta \underline{F} - \bar{\underline{F}}) + (\Delta \dot{\underline{W}} - \bar{\dot{\underline{W}}}) \|\|_2^2$$

avec $\|\|\| \square \|\|_1^2 = \int_{[0,T] \times \Omega_E} \square \cdot \mathbf{M}(t) \square d\Omega dt$ et $\|\|\| \square \|\|_2^2 = \int_{[0,T] \times \partial\Omega_E} \square \cdot \mathbf{m}(t) \square dS dt$ (10)

Où \mathbf{M} et \mathbf{m} sont des opérateurs symétriques définis positifs.

L'approximation $\Delta \check{\mathbf{s}}_E$ d'ordre m du champs $\Delta \mathbf{s}_E \in \mathbf{A}_{dE}^*$ s'écrit :

$$(\Delta \check{\underline{\sigma}}, \Delta \check{\underline{F}}) = \sum_{i=1}^m c_i(t) (\mathbf{C}_i, \underline{G}_i)(x) \quad (11)$$

$$(\Delta \check{\dot{\underline{\epsilon}}}, \Delta \check{\dot{\underline{W}}}) = \sum_{i=1}^{m'} \dot{c}_i(t) (\mathbf{E}_i, \underline{Z}_i)(x) \quad (12)$$

Où les fonctions spatiales $(\mathbf{C}_i, \underline{G}_i)$, $(\mathbf{E}_i, \underline{Z}_i)$ ainsi que celles temporelles c_i , e_i sont **inconnues**.

4.2 Approximation à 1 couple

La meilleure approximation radiale $\Delta\check{s}_E$ d'ordre 1 ($m = m' = 1$) sera donc simplement définie par les couples $(c, e) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ et $((\mathbf{C}, \underline{G}), (\mathbf{E}, \underline{Z})) \in \mathcal{S}^* \times \mathcal{U}^*$ minimisant l'erreur de direction de recherche $e_{RdC}(\Delta s - \bar{s})$:

$$e_{RdC}^2(\Delta\check{s} - \bar{s}) = \|\|\mathbf{K}^{-1}\dot{c}\mathbf{C} + \mathbf{H}^{-1}c\mathbf{C} - \dot{e}\mathbf{E} - \bar{\Delta}\|_1^2 + \|\|c\mathbf{h}^{-1}\underline{G} + \dot{e}\underline{Z} - \bar{\delta}\|_2^2 \quad ,$$

avec $\bar{\Delta} = \mathbf{H}^{-1}\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}^p$ et $\bar{\delta} = \bar{W} + \mathbf{h}^{-1}\bar{F}$ (13)

Pour résoudre ce problème, on utilise un processus itératif qui consiste à séparer la minimisation sur les fonctions temporelles $(c, e) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ de celle sur les fonctions spatiales $((\mathbf{C}, \underline{G}), (\mathbf{E}, \underline{Z})) \in \mathcal{S}^* \times \mathcal{U}^*$. S'étant donné une initialisation des fonctions temporelles c, e , on itère entre un problème **spatial** (c, e étant fixés, on cherche $((\mathbf{C}, \underline{G}), (\mathbf{E}, \underline{Z})) \in \mathcal{S}^* \times \mathcal{U}^*$ minimisant e_{RdC}) et un problème dit **temporel** ($((\mathbf{C}, \underline{G}), (\mathbf{E}, \underline{Z}))$ étant fixés, on cherche $(c, e) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ minimisant e_{RdC}). L'arrêt de l'algorithme est assuré par un critère basé sur l'erreur en relation de comportement e_{RdC} .

Le **problème spatial** peut être soit résolu de manière globale, conduisant à un problème deux fois plus gros qu'un problème élément finis standard, soit par un point fixe entre la contrainte \mathbf{C} et la déformation \mathbf{E} , dont la convergence est très rapide (Fig. 3).

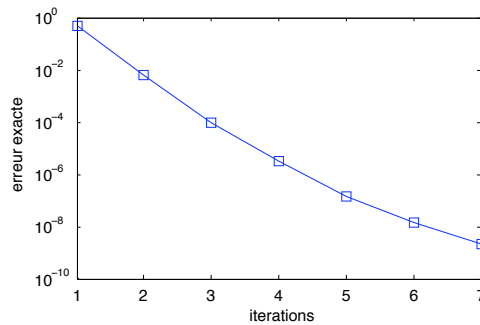


FIG. 3 – Convergence du problème spatial.

Le **problème temporel** quant à lui fait apparaître un système d'équations différentielles du second ordre avec conditions initiales et finales dont la résolution doit être menée de manière adaptée afin d'éviter les problèmes numériques dus à la présence de termes exponentiels.

4.3 Approximation à m couples

Pour construire une approximation à m couples, on construit les couples les uns après les autres. En effet, une fois les $m - 1$ premiers couples créés, on recherche la solution sous la forme de m couples, les $m - 1$ premiers étant fixés, et ceci en suivant la même procédure que pour un seul couple.

Ainsi, assez rapidement, on construit une base orthonormée de fonctions spatiales (dont le calcul est le plus coûteux). À chaque itération de la méthode LaTIn, on commence par réaliser une étape d'actualisation des fonctions temporelles, appelée *étape préliminaire*, qui consiste à trouver l'ensemble des fonctions spatiales $c_k(t)_{1 \leq k \leq m}$, $e_k(t)_{1 \leq k \leq m'}$ minimisant e_{RdC} , les fonctions de l'espace étant fixées $\mathbf{C}_{k, 1 \leq k \leq m}$, $\mathbf{E}_{k, 1 \leq k \leq m'}$.

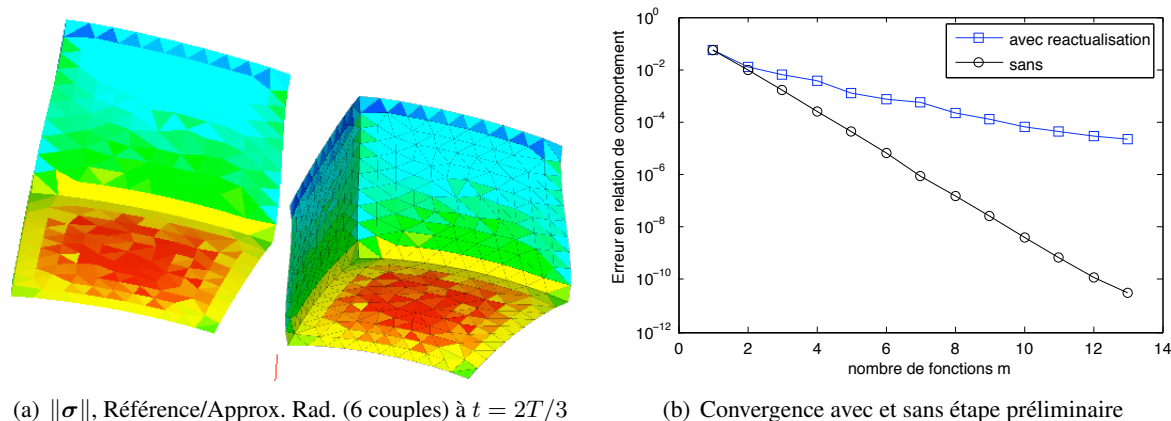


FIG. 4 – Performances de l'approximation

Peu de couples suffisent pour obtenir une solution très précise ($e_{RadC}(m = 6) < 1\%$, cf. Fig. 4(a)). On note que l'ajout de l'étape préliminaire accroît les performances de cette résolution (Fig. 4(b)).

5 Conclusions

Nous avons présenté la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace. Cette stratégie a été implantée dans une plate-forme Python/C++ développée au LMT-Cachan et permet la simulation de problèmes viscoélastiques d'évolution 2D et 3D. L'utilisation de l'approximation radiale a été détaillée et ses performances mises en évidence. Des travaux sont actuellement menés sur une nouvelle formulation de cette approximation, qui permettra d'offrir les propriétés recherchées d'extensibilité numérique au niveau temporel.

Références

- Ladevèze, P. et Nouy, A.. 2003. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **192** 3061-3087.
- Ladevèze, P., Néron, D. et Gosselet, P. 2007. On a mixed and multiscale domain decomposition method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **196(8)** 1526-1540.
- Gosselet, P. and Rey, C.. 2007. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics *Archives of computational methods in engineering.* **13(4)** 515-572.
- Ladevèze, P.. 1999. Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. *Springer Verlag.*
- Sanchez-Palencia, E.. 1974. Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *International Journal of Engineering Science.* **12(4)** 331-351.
- Nouy, A. et Ladevèze, P. 2004. Multiscale computational strategy with time and space homogenization : a radial-type approximation technique for solving microproblems. *Int. Jal for Multiscale Computational Engineering.* **2(4)** 557-574.
- Champaney, L. 2004. Outils de conception et d'analyse pour les assemblages de structures complexes. *Thèse d'habilitation à diriger des recherches (LEMA-UVSQ).*