Approche micromécanique du comportement d'un milieu mésofissuré non saturé

Xavier Chateau, Luc Dormieux, Yue Xu

► To cite this version:

Xavier Chateau, Luc Dormieux, Yue Xu. Approche micromécanique du comportement d'un milieu mésofissuré non saturé. *Mécanique et Industries*, 2003, 4 (4), pp.435-442. 10.1016/s1296-2139(03)00071-x . hal-01983154

HAL Id: hal-01983154

<https://hal.science/hal-01983154>

Submitted on 17 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approche micromécanique du comportement d'un milieu mésofissuré non saturé

Micromechanical approach of behaviour of a meso-cracked unsaturated medium

Xavier Chateau *, Luc Dormieux, Yue Xu

Laboratoire des matériaux et des structures du génie civil, (UMR113 LCPC-ENPC-CNRS), 2, allée Kepler, 77420 Champs sur Marne, France

Reçu le 28 avril 2003 ; accepté le 2 juin 2003

Résumé

Le comportement d'un milieu poreux non saturé dont la phase solide est constituée d'un matériau élastique linéaire et dont l'espace poreux est constitué de fissures interconnectées entre elles est étudié par une méthode d'homogénéisation. L'originalité de l'approche réside dans la prise en compte des non linéarités géométriques dues à la variation d'ouverture des fissures lors d'une variation de la saturation. Les résultats obtenus montrent en particulier que lorsque le rapport ouverture sur largeur des fissures devient petit, la prise en compte de cette non linéarité dans le changement d'échelle modifie substantiellement le comportement prédit par rapport à une approche où ce couplage est négligé.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The behaviour of an elastic medium containing unsaturated mesocracks is studied in the framework of micromechanics. The cracks are filled by two immiscible fluids, namely a liquid and a gas, separated by a capillary interface. Furthermore, it is assumed that the set of cracks constitutes a connected network which implies the capillary pressure is uniform over a representative elementary volume. Estimates for macroscopic strains induced by drying are derived with the tools of homogenization for disordered media. The case of an isotropic orientation of cracks in the framework of the dilute approximation is considered. When the aspect ratio is small enough, the macroscopic behavior accounting for crack opening change during drying differs significantly from the results of the linear approach.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Poreux non saturé ; Micromécanique ; Non-linéarité ; Fissures ; Capillarité

Keywords: Unsaturated porous media; Micromechanics; Non-linearity; Cracks; Capillarity

1. Introduction

On étudie le comportement d'un matériau mésofissuré non saturé par une méthode de changement d'échelle. Pour commencer, on rappelle brièvement comment estimer le tenseur d'élasticité homogénéisé d'un solide fissuré à partir des caractéristiques élastiques du matériau constitutif de la matrice solide et des propriétés morphologiques de l'espace poreux constitué des fissures.

On donne ensuite les éléments permettant d'étendre la démarche aux cas où les fissures sont saturées par deux fluides immiscibles. Pour cela on expose tout d'abord les principaux éléments de modélisation permettant de rendre compte des efforts liés à la présence des fluides dans les fissures puis on généralise la démarche développée pour la situation saturée dans le cas linéaire dans [1] au cas non saturé. Pour mettre en œuvre ces résultats, il est nécessaire de déterminer la répartition des fluides au sein d'une fissure ellipsoïdale de révolution et de calculer les efforts intérieurs pour ce problème. On résout donc complètement ce problème avant d'utiliser cette solution pour modéliser les déformations de séchage d'un matériau particulier. Pour

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : chateau@lcp.fr (X. Chateau).

finir, on propose une modélisation visant à prendre en compte les couplages entre déformations de la matrice solide et répartition des phases fluides au sein des fissures.

Les résultats de cette approche peuvent être appliqués pour traiter du comportement de différents matériaux comme les bétons [2] et les roches réservoirs [3].

2. Estimation du comportement du matériau fissuré sec

On considère un volume élémentaire représentatif de matériau solide fissuré occupant le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. La phase solide constituée d'un matériau élastique linéaire, occupe le domaine Ω_s tandis que les fissures occupent le domaine Ω_p , complémentaire de Ω_s dans Ω . Pour simplifier, on suppose que la frontière du domaine Ω est uniquement constituée de particules solides et que le matériau constitutif de la phase solide est homogène de tenseur d'élasticité $\mathbb{C}_s$.

Dans le cadre d'une approche par homogénéisation, le comportement macroscopique de ce matériau s'obtient en résolvant un problème posé sur le v.e.r. considéré comme une structure [4,5]. Le chargement macroscopique appliqué sur le v.e.r. est défini par la condition de Hashin qui relie le déplacement $\underline{\xi}$ sur le bord du v.e.r. à la valeur du tenseur de déformation macroscopique $\mathbf{E}$

$$(\forall \underline{x} \in \partial\Omega) \quad \underline{\xi} = \mathbf{E} \cdot \underline{x} \quad (1)$$

par la condition d'équilibre $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0$ satisfaite par le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ défini sur Ω_s , et par la condition de bord libre $\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = 0$ à l'interface solide-espace poreux ω_{sp} . $\underline{n}$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur au domaine Ω_s . Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des déformations linéarisé $\mathbf{e}$ à l'échelle microscopique sont reliés par la loi linéaire $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_s : \mathbf{e}$.

En pratique, il est plus commode de définir des prolongements du champ de déplacement $\underline{\xi}$, du champ de déformation $\mathbf{e}$ et du champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ définis sur Ω_s à tout le domaine occupé par le v.e.r., ces prolongements possédant les propriétés classiques de régularité [6]. Il est alors possible de considérer tout le v.e.r. comme une structure élastique hétérogène dont le comportement s'écrit

$$(\forall \underline{x} \in \Omega) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbf{e} \quad (2)$$

avec $\mathbb{C}(\underline{x}) = 0$ dans Ω_p et $\mathbb{C}(\underline{x}) = \mathbb{C}_s$ dans Ω_s

Le champ de contrainte défini maintenant sur Ω devant toujours vérifier l'équation d'équilibre

$$(\forall \underline{x} \in \Omega) \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (3)$$

La solution $(\boldsymbol{\sigma}, \underline{\xi}, \mathbf{e})$ du problème défini par les équations (1), (2) et (3) dépend linéairement du tenseur $\mathbf{E}$. Comme il est classique, on introduit alors le tenseur de localisation des déformations $\mathbb{A}(\underline{x})$ reliant les déformations microscopique et macroscopique

$$(\forall \underline{x} \in \Omega) \quad \mathbf{e}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E} \quad (4)$$

Fig. 1. Fissure ellipsoïdale.

La loi de comportement macroscopique s'obtient en reportant la relation de localisation (4) dans la loi de comportement (2) puis en utilisant le fait que le tenseur des contraintes macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ est défini comme la moyenne du champ de contrainte microscopique $\boldsymbol{\sigma}$ [4]. On note $\langle \cdot \rangle$ l'opérateur de moyenne sur le domaine Ω . La loi de comportement à l'échelle macroscopique s'écrit alors

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbb{C}_h : \mathbf{E} \quad \text{avec } \mathbb{C}_h = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle \quad (5)$$

où le tenseur $\mathbb{C}_h$ s'interprète comme le tenseur d'élasticité à l'échelle macroscopique. En utilisant le fait que $\mathbb{C}(\underline{x}) = 0$ dans Ω_p et la propriété $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$ où $\mathbb{I}$ désigne le tenseur identité du quatrième ordre, on obtient

$$\mathbb{C}_h = (1 - n)\mathbb{C}_s : \mathbb{A}_s = \mathbb{C}_s : (\mathbb{I} - n\mathbb{A}_p) \quad (6)$$

avec n , la porosité du milieu considéré et $\mathbb{A}_\alpha$ la moyenne du tenseur de localisation $\mathbb{A}$ prise sur le domaine occupé la phase α ($\alpha = s, p$).

Dans la suite de ce travail, on assimile les fissures à des cavités ellipsoïdales symétriques de révolution autour de leur petit axe comme dans [7,8] (cf. Fig. 1). On adopte un schéma dilué, pertinent pour les situations où il est légitime de négliger les interactions entre fissures. La contribution de chaque classe de fissures au tenseur de localisation $\mathbb{A}_p$ est estimée en utilisant la solution d'Eshelby [9] pour une fissure immergée dans un milieu élastique infini homogène d'élasticité $\mathbb{C}_s$ soumis à l'infini à la déformation macroscopique $\mathbf{E}$. Dans ce cas, la déformation $\mathbf{e}^j$ qui s'établit dans chaque fissure de la classe j est uniforme sur le domaine occupé par la fissure et dépend linéairement de la déformation imposée à l'infini. On a donc

$$\mathbf{e}^j = (\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1} : \mathbf{E} \quad (7)$$

où $\mathbb{P}^j$ est un tenseur du quatrième ordre dépendant de la forme et de l'orientation de la fissure ainsi que de la valeur du tenseur $\mathbb{C}_s$. En reportant (7) dans (6), on obtient l'estimation du tenseur d'élasticité homogénéisé suivante

$$\mathbb{C}_h = \mathbb{C}_s : \left(\mathbb{I} - \sum_j f^j (\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1} \right) \quad (8)$$

où f^j désigne la fraction volumique occupée par chaque classe de fissures.

Chaque famille de fissures est caractérisée par son rayon a^j , sa hauteur c^j ainsi que son orientation. On introduit le facteur d'aspect $X^j = c^j/a^j$ ainsi que la densité de

fissures ε^j définie par $f^j = 4/3\pi X^j \varepsilon^j$. En utilisant ces notations, la relation (8) s'écrit maintenant

$$\mathbb{C}_h = \mathbb{C}_s : \left(\mathbb{I} - \sum_j \frac{4}{3} \pi X^j \varepsilon^j (\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1} \right) \quad (9)$$

Le facteur d'aspect X^j étant très petit devant 1, on peut utiliser le fait que le groupement $X^j (\mathbb{I} - \mathbb{P}^j : \mathbb{C}_s)^{-1}$ admet une limite, notée $\mathbb{T}^j$, quand X^j tend vers zéro [3,8]. La relation (9) s'écrit alors

$$\mathbb{C}_h = \mathbb{C}_s : \left(\mathbb{I} - \sum_j \frac{4}{3} \pi \varepsilon^j \mathbb{T}^j \right) \quad (10)$$

écriture qui montre qu'au premier ordre, le tenseur d'élasticité $\mathbb{C}_h$ ne dépend pas du rapport d'aspect des fissures, mais uniquement de leur orientation. Les propriétés de la relation (7) assurent que sous l'action de la déformation $\mathbf{E}$ appliquée à l'infini, les fissures restent des ellipsoïdes de révolution. La prise en compte du couplage entre l'ouverture des fissures et la déformation macroscopique ne modifie donc pas la perception macroscopique du comportement du solide fissuré qui reste linéaire tant que les fissures restent ouvertes et ne se propagent pas.

Dans le cas où les fissures ont toutes le même rapport d'aspect et sont distribuées de façon isotrope à l'intérieur du v.e.r. et si la matrice solide est elle-même constituée d'un matériau isotrope, le comportement macroscopique est alors élastique linéaire isotrope, caractérisé par le module de cisaillement μ_h

$$\mu_h = \mu(1 - \beta) \quad \text{avec } \beta = \frac{32}{45} \varepsilon \frac{(5 - \nu)(1 - \nu)}{2 - \nu} \quad (11)$$

et le coefficient de compressibilité k_h

$$k_h = k(1 - b) \quad \text{avec } b = \frac{16}{9} \varepsilon \frac{1 - \nu^2}{1 - 2\nu} \quad (12)$$

où μ , ν et k désignent respectivement le module de cisaillement, le coefficient de Poisson et le module de compressibilité du matériau constituant la matrice solide tandis que ε désigne le paramètre de densité de fissures du milieu considéré, défini par $n = 4/3\pi X\varepsilon$.

3. Matériau fissuré non saturé—cas linéaire

On s'intéresse maintenant aux situations où l'espace poreux à l'intérieur des fissures est occupé par deux fluides immiscibles, un liquide et un gaz. On fait l'hypothèse que les fissures sont interconnectées entre elles, sans que cette propriété ne modifie la pertinence de la méthode d'estimation qui vient d'être présentée.

Il convient maintenant de prendre en compte dans le changement d'échelle l'existence d'efforts à l'intérieur des fissures.

Ces efforts sont constitués d'une part des champs de pression au sein de chacun des fluides et d'autre part des champs d'effort de membrane définis sur les surfaces

séparant deux à deux les domaines occupés par chacune des trois phases solide, liquide et gazeuse. On note Ω_ℓ et Ω_g les domaines occupés respectivement par la phase liquide et la phase gazeuse tandis que $\omega_{\alpha\beta}$ désigne l'interface séparant le domaine Ω_α du domaine Ω_β . En procédant comme dans [10], on introduit dans ce cas le champ de tenseur de précontrainte σ_p , défini par

$$\begin{aligned} (\forall \underline{x} \in \Omega_\ell) \quad \sigma_p(\underline{x}) &= -p_\ell \mathbf{1} \\ (\forall \underline{x} \in \Omega_g) \quad \sigma_p(\underline{x}) &= -p_g \mathbf{1} \end{aligned} \quad (13)$$

dans les domaines occupés par les phases fluides, avec $\mathbf{1}$ l'identité du second ordre, et par

$$\begin{aligned} (\forall \underline{x} \in \omega_{\alpha\beta}) \quad \sigma_p &= \gamma(\underline{x}) \mathbf{1}_{T_\omega(\underline{x})} \delta_\omega \\ (\alpha, \beta) &= (s, \ell), (s, g), (\ell, g) \end{aligned} \quad (14)$$

sur les interfaces. Dans (14), $\gamma(\underline{x})$ désigne la tension de surface au point $\underline{x}$, $\mathbf{1}_{T_\omega(\underline{x})}$ l'identité du second ordre du plan tangent à ω au point $\underline{x}$ et δ_ω la mesure de dirac de support l'interface ω . L'équation d'équilibre (3) implique l'uniformité des pressions sur les domaines occupés par chacune des deux phases fluides. Les équations d'équilibre pour les interfaces s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\forall \underline{x} \in \omega_{\alpha\beta}) \quad \gamma(\underline{x}) &= \gamma_{\alpha\beta} \\ (\alpha, \beta) &= (s, \ell), (s, g), (\ell, g) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (\forall \underline{x} \in \omega_{s\alpha}) \quad \sigma \cdot \underline{n} &= -(p_\alpha + \gamma_{s\alpha} \mathbf{1}_{T_\omega(\underline{x})} : \underline{b}) \underline{n} \\ (\alpha &= \ell, g) \end{aligned} \quad (16)$$

et

$$(\forall \underline{x} \in \omega_{\ell g}) \quad p_c = p_g - p_\ell = -\gamma_{\ell g} \mathbf{1}_{T_\omega(\underline{x})} : \underline{b} \quad (17)$$

où $\underline{b}$ désigne le tenseur de courbure de l'interface ω au point considéré.

Dans le cas où la phase solide est constituée d'un matériau solide élastique linéaire et où les couplages géométriques peuvent être négligés, on montre que la loi de comportement à l'échelle macroscopique s'obtient en résolvant un problème mécanique défini sur le v.e.r. par les conditions (1) et (3) mais pour un matériau dont le comportement s'écrit maintenant

$$(\forall \underline{x} \in \Omega) \quad \sigma = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{x}) + \sigma_p(\underline{x}) \quad (18)$$

avec

$$\sigma_p(\underline{x}) = -p_\ell \chi_\ell(\underline{x}) - p_g \chi_g(\underline{x}) + \gamma(\underline{x}) \mathbf{1}_{T_\omega(\underline{x})} \delta_\omega \quad (19)$$

χ_α désignant la fonction caractéristique du domaine occupé par la phase α ($\chi_\alpha(\underline{x}) = 1$ si $\underline{x} \in \Omega_\alpha$, $\chi_\alpha(\underline{x}) = 0$ sinon) et avec $\mathbb{C}(\underline{x}) = 0$ dans Ω_p et $\mathbb{C}(\underline{x}) = \mathbb{C}_s$ dans Ω_s comme dans le cas sec. La relation de moyenne pour les contraintes $\Sigma = \langle \sigma \rangle$ restant valable (au sens des distributions) dans ce cas, on montre en utilisant le théorème de Levin que le comportement macroscopique s'écrit

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mathbb{C}_h : \mathbf{E} + \Sigma_p \quad \text{avec} \\ \Sigma_p &= \langle \sigma_p : \mathbb{A} \rangle = \sum_j \langle \sigma_p : \mathbb{A} \rangle^j \end{aligned} \quad (20)$$

où $\langle \cdot \rangle^j$ désigne l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par les fissures de la classe numéro j . Dans la situation diluée traitée ici, les interactions entre fissures étant négligeables, le tenseur de localisation est uniforme pour chacune des fissures. En utilisant les mêmes calculs et les mêmes approximations que ceux utilisés pour produire l'estimation de $\mathbb{C}_h$, on obtient la relation

$$\Sigma_p = \sum_j \frac{4}{3} \pi \varepsilon^j \langle \sigma_p \rangle^j : \mathbb{T}^j \quad (21)$$

Il reste donc à calculer la moyenne du champ de précontrainte dans chacune des classes de fissures pour identifier complètement la loi de comportement macroscopique.

3.1. Effets capillaires dans un pore ellipsoïdal aplati

On s'intéresse ici aux solutions des équations (13)–(15) et (17) dans le cas où les déformations de l'interface pore-solide sont négligées (ce qui revient à effectuer cette résolution sur la configuration non chargée prise comme configuration de référence). Par souci de simplicité, on se restreint aux situations où la phase liquide mouille parfaitement le solide et où la tension superficielle dans l'interface solide-liquide est nulle. Si γ désigne la valeur de la tension superficielle dans l'interface liquide-gaz, on a alors $\gamma_{sg} = \gamma$. Pour éviter d'alourdir les notations, on étudie ici le cas générique d'une fissure occupant un ellipsoïde de révolution de rayon a et de hauteur $c = Xa$.

On suppose naturellement que la répartition des phases fluides au sein de chacune des fissures vérifie la propriété de symétrie cylindrique autour du petit axe des fissures. La résolution de ce problème s'effectue dans le cadre de l'approximation toroïdale [11], qui consiste à assimiler l'intersection de l'interface liquide-gaz avec un plan radial contenant le petit axe de l'ellipsoïde par un cercle de rayon R_1 et dont le centre se trouve dans le plan Ox_1x_3 à une distance R_2 de l'axe Ox_3 (Fig. 2). Dans le repère cylindrique Ox_1x_3 , l'équation de ce cercle s'écrit

$$(x_1 - R_2)^2 + x_3^2 = R_1^2 \quad (22)$$

Dans le cadre défini par cette approximation, il est possible de calculer de façon analytique les grandeurs rendant compte de la présence des fluides à l'intérieur du pore. Pour cela, on paramètre la position du point de raccord entre l'interface liquide-gaz et l'interface pore-solide dans le plan radial par le scalaire φ compris entre 0 et $\pi/2$. Si on note $h = c \cos \varphi$

Fig. 2. Fissure non saturée.

la demi-hauteur du domaine occupé par la phase liquide à l'intérieur de l'ellipsoïde (cf. Fig. 2), les rayons de courbure du ménisque liquide-gaz dans l'approximation toroïdale se calculent en utilisant les relations

$$R_1 = \frac{h}{\cos \psi} \quad \text{et} \quad R_2 = a \sin \varphi - R_1 \sin \psi \quad (23)$$

avec $\psi = \arctan(X \tan \varphi)$. La pression capillaire est donnée par

$$p_c = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) \quad (24)$$

Un simple calcul géométrique permet de calculer le volume v_ℓ occupé par la phase liquide. On en déduit la valeur de la saturation en liquide pour le pore considéré

$$S_r = \frac{v_\ell}{v_p} \quad \text{avec} \quad v_p = \frac{4}{3} \pi X a^3 \quad (25)$$

En utilisant les relations (24) et (25), on peut tracer les courbes capillaires donnant p_c en fonction de S_r pour différentes valeurs du rapport d'aspect X (cf. Fig. 3). Pour toutes les valeurs du rapport d'aspect, on montre que la pression capillaire est une fonction décroissante puis croissante de la saturation. Il convient donc d'étudier plus en détail les propriétés mécaniques de ce système avant de se prononcer sur son comportement réel. Comme on néglige les déformations de la phase solide, le système constitué des phases fluides et des interfaces capillaires à pression capillaire imposée est un système conservatif pour lequel une analyse classique de stabilité peut être mise en œuvre [12]. On montre alors que dans des expériences d'imbibition-drainage à pression capillaire imposée, la branche croissante de la courbe $p_c(S_r)$ est instable.

En toute rigueur, il convient donc de prendre en compte la partie croissante de la courbe $p_c(S_r)$ dans une analyse distinguant chemin de drainage (obtenu en augmentant régulièrement la pression capillaire à partir de l'état saturé à pression capillaire nulle) et chemin d'imbibition (correspondant à l'application d'une pression capillaire décroissante jusqu'à la valeur nulle). On obtient alors pour chaque pore

Fig. 3. Courbes capillaires pour trois rapports d'aspect différents.

Fig. 4. Courbes capillaires avec et sans hystérésis.

une courbe de pression capillaire présentant un hystérésis. Dans une expérience de drainage à partir de l'état saturé, il est nécessaire d'augmenter la pression capillaire jusqu'à la valeur $p_c^{ea} = 2\gamma/c$ pour qu'une interface capillaire puisse se former à l'intérieur du pore. Une fois cette valeur de la pression capillaire atteinte, on observe un « saut » de la saturation de la valeur $S_r = 1$ jusqu'à la valeur S_r' telle $p_c(S_r') = p_c^{ea}$ (cf. courbe de gauche sur la Fig. 4). De la même façon, dans une expérience d'imbibition, il est nécessaire de diminuer la pression capillaire jusqu'à la valeur p_c^{min} correspondant au point le plus bas de la courbe capillaire pour pouvoir revenir à l'état complètement saturé. Ce retour à l'état saturé donne également lieu à un « saut » entre branches d'équilibre.

Si cette analyse paraît pertinente pour des situations où la partie croissante de la courbe capillaire est bien séparée de la droite d'équation $S_r = 1$ (cas des rapports d'aspect proches de l'unité), l'observation d'état saturé pour des valeurs de la pression capillaire strictement supérieures à la valeur correspondante au point le plus bas de la courbe $p_c(S_r)$ devient beaucoup moins probable quand la branche instable se rapproche de la courbe $S_r = 1$ (cas des faibles valeurs du rapport d'aspect : S_r^{min} tend vers 1 quand X tend vers zéro). On montre en effet que le saut d'énergie potentielle à franchir pour passer de l'état saturé à l'état correspondant au point le plus bas de la courbe $p_c(S_r)$ est une fonction croissante du rapport d'aspect quand les autres paramètres sont fixés qui tend vers zéro quand X tend vers zéro. La probabilité de former une interface capillaire étant une fonction décroissante du travail à fournir pour former cette interface [13], il en résulte que la probabilité que cette barrière soit franchie pour une pression égale à la pression p_c^{min} tend vers 1 quand X tend vers 0. On ne retient donc que la partie décroissante de la courbe $p_c(S_r)$ dans ce cas. La courbe capillaire ne présente pas d'hystérésis et la valeur de la pression p_c^{ea} pour laquelle se forme l'interface capillaire correspond au point le plus bas de cette courbe (courbe de droite sur la Fig. 4).

Dans la mesure où on ne s'intéresse ici qu'au comportement des milieux fissurés, c'est cette dernière interprétation de la courbe $p_c(S_r)$ que l'on retient.

3.2. Cas des fissures

En reportant dans les formules (24) et (25) l'approximation $X \ll 1$, on obtient les relations suivantes pour la courbe capillaire

$$p_c = \frac{\gamma}{aX} \frac{1}{\cos \varphi} \quad S_r = \cos^3 \varphi \quad (26)$$

tandis que la moyenne des efforts de précontrainte dans le pore est égale au premier ordre à

$$\langle \sigma_p \rangle = \frac{\gamma}{aX} \left(\frac{3 - \cos^2 \varphi}{2} \mathbf{1} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \underline{a}_3 \otimes \underline{a}_3 \right) - p_g \mathbf{1} \quad (27)$$

En toute rigueur, ces formules issues d'un développement limité en $1/X$ ne sont pas valables pour les valeurs de φ tendant vers zéro. Néanmoins, on montre qu'elles donnent une excellente approximation du comportement le long de la branche stable du diagramme de pression capillaire $p_c(S_r)$, y compris au voisinage de l'état saturé, obtenu en $\varphi = 0$.

On note que la composante σ_p de $\langle \sigma_p \rangle$ selon $\underline{a}_3 \otimes \underline{a}_3$ vaut :

$$\sigma_p = \frac{\gamma \cos^2 \varphi}{aX} - p_g = \frac{\gamma^3}{a^3 X^3} \frac{1}{p_c^2} - p_g \quad (28)$$

3.3. Déformation de séchage du matériau fissuré isotrope

On revient ici au problème d'homogénéisation pour le solide fissuré. Dans le cas où les fissures ont toutes le même rayon a , le même rapport d'aspect, admettent une répartition d'orientation isotrope et où la phase solide est elle-même isotrope, on montre que la relation (21) s'écrit

$$\Sigma_p = \sigma_p b \mathbf{1} \quad (29)$$

où b est encore défini par (11). Dans une expérience de séchage sous contrainte macroscopique nulle, la pression dans la phase gazeuse est nulle. La déformation prévue selon (20) par ce modèle est sphérique et s'écrit $E = E \mathbf{1}$ avec :

$$E = -\frac{b}{3k_h} \sigma_p = -\frac{b}{3k(1-b)} \frac{\gamma^3}{a^3 X^3} \frac{1}{p_c^2} \quad (30)$$

Cette expression n'est valable que dans les situations où les phases gazeuse et liquide se trouvent simultanément à

Fig. 5. Séchage du milieu fissuré—cas linéaire.

l'intérieur des fissures. En se reportant aux conclusions de l'analyse qui a été menée à la Section 3.1 et donc à la relation (26) il apparaît qu'une interface capillaire ne peut se former à l'intérieur des fissures pour des valeurs de la pression capillaire inférieures à $p_c^{ea} = \gamma/aX$. La quantité p_c^{ea} définit donc la valeur de la pression d'entrée de la phase gazeuse dans les fissures.

Pour mener une expérience de séchage à contrainte macroscopique nulle à partir de l'état de référence saturé, on soumet le matériau à une augmentation de la pression capillaire à partir de la valeur zéro. Tant que la pression capillaire reste inférieure à la pression d'entrée de la phase gazeuse dans les fissures, celles-ci restent saturées par la phase liquide à la pression $-p_c$ et la moyenne du tenseur des précontraintes dans les fissures est égale à $p_c \mathbf{1}$. En reportant ce résultat dans la première égalité de (30), on établit que durant cette phase, E est une fonction linéaire décroissante de la pression capillaire p_c . Un comportement contractant au séchage est donc observé. Pour les valeurs de la pression capillaire supérieures à p_c^{ea} , la déformation du v.e.r. est maintenant contrôlée par la seconde équation (30). Durant cette seconde phase, le séchage du matériau sous contrainte macroscopique nulle s'accompagne d'une dilatation qui ramène le v.e.r. dans sa configuration initiale, les fissures étant finalement saturées par la phase gazeuse. Par rapport à l'état de référence (état naturel sans précontrainte capillaire), on note que durant tout le processus de séchage la déformation macroscopique est négative (retrait). La courbe de la Fig. 5 résume les résultats qui viennent d'être décrits. Cependant, la section suivante va démontrer que l'existence d'une phase dilatante au cours du séchage prévue par le présent modèle peut être remise en cause par la prise en compte des variations du rapport d'aspect X .

4. Prise en compte des non linéarités géométriques

A la différence de la section précédente, on s'intéresse à présent à l'effet des variations du rapport d'aspect des fissures sur le comportement macroscopique du matériau tout en écartant l'éventualité d'une refermeture totale des fissures. La prise en compte de ce changement de géométrie impose de travailler de façon incrémentale. La loi de comportement à l'échelle microscopique s'écrit maintenant

$$(\forall \underline{x} \in \Omega) \quad d\sigma = \mathbb{C}(\underline{x}) : d\epsilon(\underline{x}) + d\sigma_p(\underline{x}) \quad (31)$$

En reproduisant exactement le même raisonnement qu'à la Section 3, on montre qu'à l'échelle macroscopique, on a la loi de comportement incrémentale

$$d\Sigma = \mathbb{C}_h : dE + d\Sigma_p \quad \text{avec} \quad d\Sigma_p = \sum_j \frac{4}{3} \pi \varepsilon^j \langle d\sigma_p \rangle^j : \mathbb{T}^j \quad (32)$$

où $\mathbb{C}_h$ est toujours donné par (10). On rappelle que l'état de référence est l'état naturel dans lequel $\Sigma = \Sigma_p = 0$. A la condition que les fissures restent des ellipsoïdes, l'intégration de la relation (32) à partir de l'état de référence fournit immédiatement l'équation de comportement macroscopique sous la forme

$$\Sigma = \mathbb{C}_h : E + \Sigma_p \quad \text{avec} \quad \Sigma_p = \sum_j \frac{4}{3} \pi \varepsilon^j \langle \sigma_p \rangle^j : \mathbb{T}^j \quad (33)$$

La validité de la démarche conduisant à (33) repose sur la possibilité d'approcher à chaque instant la forme de la fissure par un modèle ellipsoïdal. Cette propriété est classiquement vérifiée en l'absence d'efforts capillaires. Cependant, en présence d'un chargement capillaire défini par (13) et (14), il s'agit d'une première approche de la prise en compte de l'évolution de la géométrie des fissures. De la même façon, on admet que les conclusions de l'analyse présentée à la Section 3.1 restent pertinentes même si la déformabilité de la phase solide n'est plus négligée ici.

On note que les expressions (21) et (33) de Σ_p sont identiques. Par ailleurs, on a déjà noté que l'estimation de $\mathbb{C}_h$ n'est pas modifiée si l'on prend en compte les variations du rapport d'aspect. Ces résultats s'expliquent par le fait que le calcul de $\mathbb{C}_h$ et celui de Σ_p font intervenir le groupement $X(\mathbb{I} - \mathbb{S}^j)^{-1}$ qui est indépendant de X^j dans le domaine $X^j \ll 1$.

La différence essentielle avec la Section 3 réside dans le fait que l'on prend désormais en compte les variations du rapport d'aspect X^j dans le calcul de $\langle \sigma_p \rangle^j$.

Le calcul des variations du rapport d'aspect passe par celui des déformations locales dans les fissures. L'incrément de déformation dans chaque fissure est dû à l'incrément de déformation macroscopique dE et aux variations du champ de précontrainte σ_p dans la fissure. En représentant celles-ci par la moyenne $d\langle \sigma_p \rangle^j$, il vient d'abord :

$$d\epsilon^j = (\mathbb{I} - \mathbb{S}^j)^{-1} : (dE - \mathbb{S}^j : \mathbb{C}_s^{-1} : d\langle \sigma_p \rangle^j) \quad (34)$$

S'agissant du rapport d'aspect, on obtient donc :

$$dX^j = X^j (\underline{a}_3^j \otimes \underline{a}_3^j) : (\mathbb{I} - \mathbb{S}^j)^{-1} : (dE - \mathbb{S}^j : \mathbb{C}_s^{-1} : d\langle \sigma_p \rangle^j) \quad (35)$$

En exploitant à nouveau la condition $X^j \ll 1$, l'intégration de (35) à partir de l'état de référence ($E = 0, \sigma_p = 0$) se met sous la forme

$$X^j - X_0^j = (\underline{a}_3^j \otimes \underline{a}_3^j) : \mathbb{T}^j : (E - \mathbb{S}^j : \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \sigma_p \rangle^j) \quad (36)$$

où X_0^j désigne le rapport d'aspect des fissures dans la configuration initiale. A titre d'illustration, on considère de nou-

veau le cas d'un matériau constitué d'une phase solide élastique linéaire isotrope dont les fissures ont toutes le même rapport d'aspect et présentent une répartition d'orientation isotrope. La loi de couplage géométrique liant le rapport d'aspect des fissures à la déformation macroscopique du v.e.r. et à la précontrainte capillaire σ_p prend la forme

$$\Delta X = X - X_0 = \frac{9b}{4\pi\varepsilon} \left(E - \frac{\sigma_p}{3k^s} \right) \quad (37)$$

En incorporant la première égalité de (30) dans (37), on obtient encore :

$$\Delta X = X - X_0 = X_0 \frac{E}{E_{cr}} \quad \text{avec } E_{cr} = \frac{4\pi\varepsilon}{9} X_0 \quad (38)$$

Observant que $4\pi\varepsilon\Delta X/3$ représente la variation de volume des fissures, on note que l'égalité ci-dessus signifie que la déformation volumique macroscopique $3E$ est égale à la variation du volume des fissures. $-E_{cr}$ s'interprète comme la déformation macroscopique pour laquelle les fissures sont entièrement refermées par séchage. En reportant (38) dans (30) on obtient la relation suivante

$$\bar{p}_c = p_c \sqrt{\frac{3k_h E_{cr}}{b(\gamma/aX_0)^3}} = \left(\frac{1}{-\varepsilon(1+\varepsilon)^3} \right)^{1/2} \quad (39)$$

avec $\varepsilon = \frac{E}{E_{cr}}$

La prise en compte des variations du rapport d'aspect des fissures modifie donc l'allure de la courbe p_c fonction de E pour les « fortes » déformations de retrait ($E < -E_{cr}/4$) avec une nouvelle branche correspondant à un comportement contractant au séchage. Pour les « faibles » déformations de retrait ($E > -E_{cr}/4$) on retrouve une branche correspondant à un comportement dilatant au séchage comme pour le modèle sans couplage géométrique (Fig. 6). Pour conclure, on s'intéresse de nouveau au comportement du matériau lors d'une expérience de séchage sous contrainte macroscopique nulle conduite à partir de l'état de référence saturé à pression capillaire nulle. Comme pour le cas sans couplage, l'augmentation à partir de la valeur nulle de la pression capillaire ne provoque pas immédiatement la désaturation des fissures. On observe donc de nouveau une phase où les fissures restent saturées par la phase liquide à la pression $-p_c$, la déformation macroscopique du v.e.r. se calculant encore en reportant l'égalité $\sigma_p = p_c$ dans la première

équation de (30). Pour déterminer le moment où la phase gazeuse pénètre dans les fissures, il faut maintenant tenir compte du fait que les fissures se referment au fur et à mesure que la pression capillaire augmente. En combinant la première équation de (30) pour $\sigma_p = p_c$ avec les équations (38), on montre que valeur du rapport d'aspect des fissures au moment où le gaz pénètre dans les fissures, notée X^{ea} , est solution de l'équation

$$\frac{\gamma}{aX} = -\frac{4\pi}{3} \frac{k_h \varepsilon}{b} (X - X_0) \quad (40)$$

équation qui n'admet de solution que si $X_0 \geq X_0^{ea}$ avec

$$X_0^{ea} = \left(\frac{3b\gamma}{\pi \varepsilon a k_h} \right)^{1/2} \quad (41)$$

Si X_0 est plus grand que X_0^{ea} , la phase gazeuse pénètre dans les fissures et la courbe de comportement linéaire observée dans la première phase coupe la courbe décrite par l'équation (39) au point (p_c^{ea}, E^{ea}) . Deux situations peuvent alors se présenter. Si $E^{ea} < -E_{cr}/4$, ce qui se produit pour $X_0^{ea} < X_0 < 2X_0^{ea}/\sqrt{3}$ alors la désaturation du matériau provoque la fermeture des fissures et un retrait de séchage est observé (trajet (c) sur la Fig. 6). Si on a $E^{ea} > -E_{cr}/4$, situation observée quand $2X_0^{ea}/\sqrt{3} < X_0$, la désaturation des fissures s'accompagne d'une réouverture de ces dernières. Une phase de dilatation est observée et on retrouve un comportement similaire à celui obtenu sans prise en compte des variations de rapport d'aspect des fissures (trajet (b) sur la Fig. 6). Enfin si X_0 est inférieur à X_0^{ea} , il n'y a pas d'intersection entre la courbe décrite par l'équation (39) et la droite rendant compte du comportement du matériau au cours de la première phase dans le plan p_c, E . L'augmentation de la pression capillaire s'accompagne donc d'une déformation volumique de retrait du matériau mais sans désaturation des fissures (trajet (a) sur la Fig. 6).

5. Conclusions

Les éléments d'une modélisation par changement d'échelle du comportement des matériaux mésos fissurés à matrice élastique dans la situation non saturée ont été présentés. Les lois de comportement macroscopiques obtenues par cette approche intègrent de façon quantitative les spécificités du matériau liées à ses caractéristiques morphologiques et matérielles à l'échelle microscopique. Au cours cette étude, on a notamment résolu le problème capillaire pour un pore ellipsoïdal de révolution aplati dans le cadre de l'approximation toroïdale, déterminé la courbe reliant la valeur de la saturation à celle de la pression capillaire et calculé les termes permettant de rendre compte des efforts liés à ces effets. On a également proposé une interprétation reposant sur une analyse de stabilité de la courbe capillaire. Ces résultats ont ensuite été utilisés pour modéliser une expérience de séchage d'un matériau dont l'espace poreux est constitué de fissures possédant toutes les mêmes caractéristiques géométriques et

Fig. 6. Séchage d'un milieu fissuré—cas général.

distribuées de façon isotrope à l'intérieur du volume élémentaire représentatif. Dans le cas linéaire, dans une expérience où l'échantillon est soumis à une pression capillaire croissante à contrainte macroscopique nulle à partir de l'état saturé, le matériau se rétracte avant de revenir à son état de déformation initiale, le passage d'un comportement à l'autre se faisant au moment où la phase gazeuse non mouillante entre dans les fissures. La prise en compte du couplage entre déformations des fissures et effets capillaires modifie radicalement ces prévisions dans le cas des fissures très aplaties. On a en effet montré que pour les valeurs les plus faibles du rapport d'aspect, les fissures se ferment en restant constamment saturées, le matériau se contractant régulièrement au fur et à mesure que la pression capillaire augmente. Pour les valeurs intermédiaires du rapport d'aspect, la phase gazeuse finit par pénétrer dans les fissures mais on obtient cependant un comportement contractant pour toutes les valeurs de la pression capillaire. Enfin pour les valeurs les plus importantes du rapport d'aspect, on retrouve un comportement du type de celui obtenu sans prise en compte des couplages géométriques.

Références

- [1] V. Pensée, L. Dormieux, D. Kondo, V. Deudé, Poroélasticité d'un milieu mésolfissuré : analyse micromécanique, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 147–152.
- [2] A. Feraille-Fresnet, Le rôle de l'eau dans le comportement à haute température des bétons, Thèse de doctorat, E.N.P.C., Marne la Vallée, 2000.
- [3] V. Deudé, Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : apport des méthodes de changement d'échelle, Thèse de doctorat, E.N.P.C., Marne la Vallée, 2002.
- [4] A. Zaoui, Matériaux hétérogènes et composites, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1997.
- [5] X. Chateau, L. Dormieux, Mécanique des milieux poreux non saturés sous la direction de O. Coussy et J.M. Fleureau, Hermès, Paris, 2002, pp. 175–230, chapitre Homogénéisation pour les milieux poreux non saturés.
- [6] J. Salençon, Mécanique des milieux continus, Ellipses, Paris, 1988.
- [7] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, V. Pensée, Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 587–592.
- [8] S. Nemat-Nasser, M. Hori, Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials, in: North-Holland Ser. Appl. Math. Mech., North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [9] J.D. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 241 (1957) 376–396.
- [10] X. Chateau, L. Dormieux, Micromechanics of saturated and unsaturated porous media, *Int. J. Numer. Meth. Geomech.* 26 (2002) 831–844.
- [11] G. Lian, C. Thornton, M.J. Adams, A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies, *J. Colloid Interface Sci.* 161 (1993) 138–147.
- [12] R. Finn, Equilibrium Capillary Surfaces, Springer-Verlag, Wien–New York, 1986.
- [13] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Statistical Physics, Part 1, 3rd Edition, in: Course of Theoretical Physics, Vol. 5, Pergamon, Elmsford, NY, 1987.