

Réduction de modèle pour la prise en compte de l'endommagement dans les structures en béton armé

Matthieu Vitse, David Néron, Pierre-Alain Boucard

► **To cite this version:**

Matthieu Vitse, David Néron, Pierre-Alain Boucard. Réduction de modèle pour la prise en compte de l'endommagement dans les structures en béton armé. 13e colloque national en calcul des structures, May 2017, Giens, Var, France. <hal-01899319>

HAL Id: hal-01899319

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01899319>

Submitted on 19 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Réduction de modèle pour la prise en compte de l'endommagement dans les structures en béton armé

M. Vitse, D. Néron, P.-A. Boucard

LMT Cachan, ENS Paris-Saclay, {vitse,neron,boucard}@lmt.ens-cachan.fr

Résumé — Ces travaux présentent l'extension de l'algorithme classique temps-espace LATIN-PGD à des problèmes paramétriques, pour lesquels les paramètres sont considérés comme des variables additionnelles dans la définition des quantités d'intérêt, ainsi que l'application de cette méthode à un modèle d'endommagement avec prise en compte de la refermeture des fissure, présentant une variabilité à la fois sur des paramètres matériaux et sur l'amplitude du chargement. La faisabilité de ce couplage est illustrée par des exemples numériques sur des structures en béton armé pour divers types de chargement cycliques (traction-compression, flexion).

Mots clés — problèmes non-linéaires, endommagement, PGD.

1 Introduction

L'étude de la variabilité intrinsèque aux matériaux est un sujet essentiel quant au dimensionnement des structures de génie civil. Cette variabilité peut provenir de la fabrication du matériau (choix de ses éléments constitutifs, procédés de fabrication), ou de la description de son modèle physique. Ainsi, il est évident que plus ces incertitudes seront importantes et plus la simulation du comportement de ce matériau sera complexe, quelle que soit l'échelle considérée pour l'étude (du point de vue microscopique à l'échelle macroscopique de la structure). C'est en particulier vrai pour le béton armé qui est utilisé de manière intensive depuis des décennies bien que son comportement au long-terme ne soit toujours pas bien compris ni modélisé. Le comportement de ces structures peut être modifié par des réactions chimiques ou des dégradations mécanique ce qui rend la prédiction de leur comportement à un aléa donné extrêmement complexe, et cela même avec des outils numériques de plus en plus performants. Parmi les nombreuses thématiques de recherche, l'étude de la réponse des structures en béton armé à un aléa sismique est extrêmement importante, en particulier depuis l'incident de Fukushima en 2011. Le projet *SINAPS@* a été lancé en réponse à cet incident, et a pour but de quantifier l'influence des incertitudes liées aux procédés physiques et aux méthodes utilisées pour qualifier le risque sismique sur la vulnérabilité des structures de l'industrie nucléaire. Son but est principalement de fournir des outils pour décrire le phénomène sismique ainsi que son impact sur des structures en béton armé, pour identifier les risques et proposer des recommandations quant à l'évolution des règles concernant le risque sismique.

L'étude présentée ici porte sur le fait que le calcul de la réponse d'une structure en béton armé à un aléa sismique, à un instant donné, nécessite la connaissance de l'histoire de la-dite structure et des différentes dégradations qui ont pu lui être causées, celles-ci pouvant s'étaler sur plusieurs décennies. Ces phénomènes sont souvent complexes à modéliser, tout comme l'est le chargement sismique, ce qui rend ce type de calcul extrêmement coûteux à réaliser. L'objectif des travaux présentés ici n'est cependant pas de modéliser ces phénomènes aux longs termes mais d'en étudier les potentiels effets sur une structure soumise, à un instant donné, à un chargement cyclique. Pour ce faire, nous considérons un milieu pour laquelle certains paramètres matériaux ou de chargement ne sont connus que par leur valeur moyenne et leur intervalle de variation, le but étant de déterminer la réponse d'une structure exacerbant un comportement fortement non-linéaire pour les différents jeux de paramètres associés à ces nouvelles variables du problème.

Il est évident que la prise en compte de ces paramètres dans la résolution d'un problème déjà délicat de par la nature du modèle utilisé (fortement non-linéaire, et qui est décrit dans la prochaine section) rend ce type d'étude très complexe en terme de coût de calcul avec les techniques de résolution usuelles.

Cette double difficulté (non-linéarité, calcul paramétrique) est traitée ici en associant un algorithme itératif, la méthode LATIN [1], et une méthode de réduction de modèle, la PGD [2]. Les algorithmes de type LATIN-PGD ont été utilisés à maintes reprises depuis les années 80 pour le traitement des problèmes non-linéaires faisant intervenir des modèles visco-plastique, mais aussi plus récemment pour des problèmes multi-physiques, avec décomposition de domaine, ... L'utilisation de ces algorithmes pour des études paramétriques a été faite dans le cadre de la stratégie multi-paramétrique [3]. Nous proposons ici une extension de l'algorithme classique, faisant intervenir une décomposition PGD temps-espace à une décomposition intégrant les paramètres comme coordonnées additionnelles, et l'application de cette méthode à un problème d'endommagement avec effet unilatéral. Le modèle matériau est sommairement décrit dans la prochaine section, puis le nouvel algorithme LATIN-PGD (avec coordonnées additionnelles) est décrit en mettant l'accent sur les évolutions apportées pour prendre en compte l'aspect paramétrique du problème.

2 Le modèle étudié

La modélisation du milieu étudié découle de [4] (pour la loi d'endommagement) et [5] (pour la loi de refermeture de fissure). Cette section rappelle les différents points du modèle, la variabilité considérée et l'influence sur le comportement mécanique du béton. Les quantités relatives au modèle de comportement du béton (respectivement de l'armature) seront notées \square^c (respectivement \square').

2.1 Modèle d'endommagement avec effet unilatéral

La relation de comportement au niveau d'un point de Gauss est donnée Fig. 1. On peut voir que deux phénomènes ici sont pris en compte. Un endommagement en traction, venant affecter la rigidité du matériau, et un regain de rigidité progressive lors de la phase de décharge et de compression, caractérisant le phénomène de refermeture progressive des fissures présentes dans le béton, et conférant au matériau une rigidité (en compression) proche de sa rigidité "saine". Il est à noter que contrairement à [4], ni la plasticité en compression, ni les phénomènes hystérétiques liés au chargement cyclique ne sont pris en compte. En terme de modélisation, cet état peut être obtenu en scindant le tenseur des contraintes de

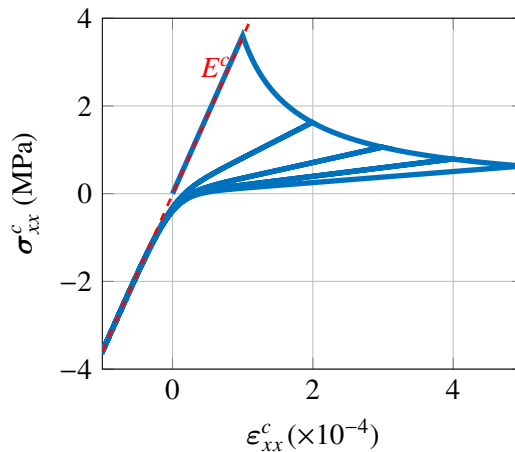


FIGURE 1 – Réponse mécanique $\sigma_{xx}^c = f(\varepsilon_{xx}^c)$ au point de Gauss

Cauchy au sein du volume élémentaire représentatif en une somme de deux contributions indépendantes, la première liée à l'état de contrainte dans le milieu dans le milieu fissuré (en négligeant les interactions entre les fissures) et la seconde liée à l'état de contrainte dans les fissures une fois refermées :

$$\sigma^c = \sigma^{c,m} + \sigma^{c,f} \quad (1)$$

Un résumé des différentes variables est donné dans le tableau 1 et le lecteur peut se référer aux équations (2, 3) pour un résumé des équations constitutives du problème.

TABLE 1 – Résumé des variables du modèle de comportement du béton

Mécanisme	Variable d'état	Variable interne	Force thermodynamique
Déformation totale	ε^c		σ^c
Élasticité		$\varepsilon^{c,e}$	$\sigma^{c,m}$
Endommagement isotrope		d^c	$-Y$
Écrouissage isotrope associé à l'endommagement		z	Z
Refermeture de fissure		$\varepsilon^{c,f}$	$\sigma^{c,f}$

Lois d'état

$$\begin{aligned}
 \sigma^{c,m} &= (1-d) C^c : \varepsilon^c \\
 \dot{\sigma}^{c,f} &= \nu C^c : \dot{\varepsilon}^{c,f} \\
 Y &= \frac{1}{2} \langle \varepsilon^c \rangle_+ : C^c : \langle \varepsilon^c \rangle_+ \\
 Z &= \frac{dH(z)}{dz} \\
 \sigma^r &= C^r : \varepsilon^r
 \end{aligned} \tag{2}$$

Lois d'évolution

$$\begin{aligned}
 d^c &= 1 - \frac{1}{1 + A_d(Y - Y_0)} \\
 z &= \frac{1}{1 + A_d(Y - Y_0)} - 1 \\
 \varepsilon^{c,f} &= d^c \varepsilon^c \\
 d^r &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

où C^c le tenseur de Hooke du béton, A_d un paramètre matériaux régissant le comportement adoucissant de la loi d'endommagement, Y_0 le seuil d'initiation d'endommagement.

2.2 Variabilité au sein du béton

Les procédés de fabrication, ainsi que le vieillissement des structures en béton armé, peuvent conduire à une évolution de certaines propriétés du matériau. Les incertitudes qui en découlent ont une influence directe sur la réponse mécanique globale des structures. Nous considérerons en particulier ici des variabilités sur des paramètres matériaux, ainsi que sur des paramètres liés au chargement (affectant notamment son amplitude). Une approche classique pour prendre en compte ces variabilités consiste à s'appuyer sur des outils probabilistes ou sur des données statistiques. Cependant, de telles approches nécessitent bien souvent un nombre de calculs numériques conséquent ou la mise en place de vastes campagnes expérimentales.

L'approche choisie ici consiste à considérer un ensemble de N^p paramètres $\mu = \{\mu_i\}_{i=1\dots N^p}$, affectant des variables matériaux ou l'amplitude du chargement, uniquement décrits par une distribution uniforme centrée sur la valeur moyenne de ces paramètres. Par exemple, on prendra $\mu = \{\mu_1, \mu_2\}$ tel que μ_1 affecte le coefficient pilotant la phase adoucissante du béton $A_d = A_d(\mu_1)$ et μ_2 affecte le module d'Young de telle manière que $E^c = E^c(\mu_2)$.

La figure 2 montre la réponse mécanique, à l'échelle du point de Gauss, d'une structure en béton pour laquelle une variabilité sur le module d'Young, le coefficient A_d et l'amplitude du chargement est considérée (voir Tab.2). On peut voir la forte influence de cette variabilité sur la réponse mécanique du problème, en particulier pour la variabilité sur A_d (Fig. 2c) pour laquelle la variation d'énergie dissipée (aire sous la courbe de la partie adoucissante) est fortement impactée.

TABLE 2 – Paramètres étudiés, variabilité

Paramètre	Nom	Valeur moyenne	Variabilité	Intervalle de variation
E^c	Module d'Young	36×10^9 Pa	+/- 30%	$[25.2 - 46.8] \times 10^9$
A_d	Coefficient d'adoucissement	8×10^{-3} J $^{-1}$.m 3	+/- 20%	$[6.4 - 9.6] \times 10^{-3}$
Y_0	Seuil initial d'activation de l'endommagement	180 J.m $^{-3}$	+/- 20%	[144 – 216]

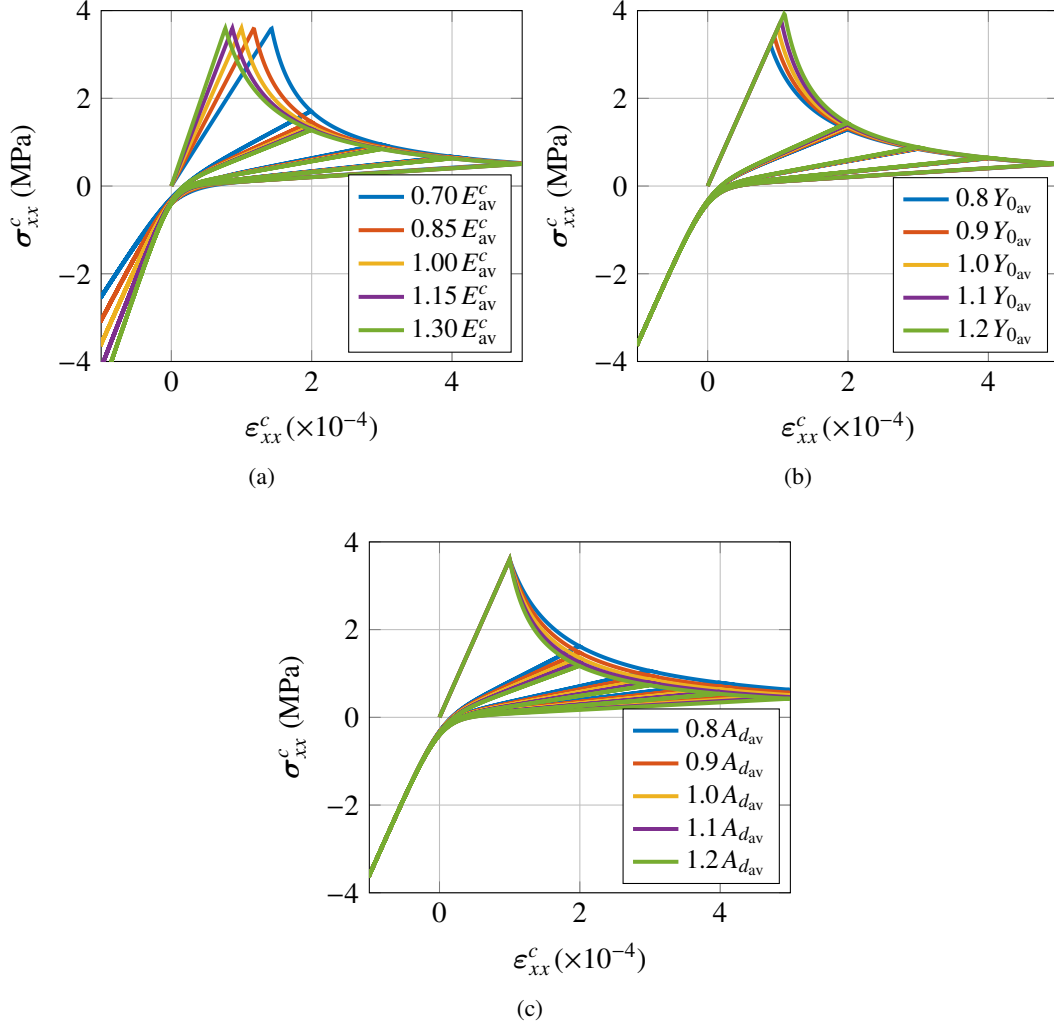


FIGURE 2 – Influence de la variabilité sur le module d'Young E^c (Fig. 2a), le seuil d'activation de l'endommagement Y_0 (Fig. 2b) et le coefficient d'adoucissement A_d (Fig. 2c) sur la réponse mécanique au niveau d'un point de Gauss (les valeurs moyennes sont notées \square_{av})

3 Réduction de modèle en non-linéaire et analyse paramétrique

La prise en compte de ces paramètres pour la simulation de problèmes structuraux complexes est bien souvent rédhibitoire aussi bien en termes de temps de simulation qu'en capacités de stockage de la solution associée. L'approche choisie dans cette étude pour prendre en compte cette dépendance aux paramètres consiste à approximer les quantités d'intérêt du problème sous une forme à variables séparées, comme une somme de produits de fonctions de chacune de ces variables, c'est à dire :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \approx \mathbf{u}_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=1}^m \Phi_k(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{N^p} a_k^i(\mu_i) \quad (4)$$

En particulier, cette approximation est construite de manière itérative en utilisant un algorithme Galerkin-PGD [6]. Cependant, cette approche utilisée comme telle n'est pas efficace pour la résolution de pro-

blèmes fortement non-linéaires tels que ceux rencontrés dans le cas de notre étude. Ainsi, le couplage avec la méthode LATIN [1] est étudié. Les algorithmes LATIN-PGD ont déjà été l'objet de nombreuses études, faisant intervenir une décomposition temps-espace du champ d'intérêt. Nous proposons ici l'extension de cette méthode à des problèmes paramétrés en s'appuyant sur une description telle que (4), et l'application de cette méthode à des problèmes structuraux tels que ceux rencontrés dans le domaine du génie civil.

3.1 Proper generalized decomposition

L'approche considérée ici consiste à prendre en compte les variables du problème directement dans la formulation PGD classique comme des coordonnées additionnelles de la décomposition [2]. Un algorithme glouton est alors utilisé pour construire de manière itérative les différentes fonctions de la représentation. L'approche utilisée est la suivante : en considérant le problème discrétisé (noté avec des symboles droits) $\mathbf{L}\mathbf{u}_{m+1}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\mu})$ avec $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{D}$, on cherche l'approximation de rang \mathbf{u}_{m+1} comme une correction $\Delta\mathbf{u}_m$ apportée à l'approximation \mathbf{u}_m obtenue à l'itération précédente, où $\Delta\mathbf{u}_n$ s'écrit :

$$\Delta\mathbf{u}_n = \Phi_{m+1} \mathbf{A}_{m+1} \quad (5)$$

avec $\mathbf{A}_{m+1}(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{D}}(\mathbb{R})$ (ensemble des tenseurs de taille \mathbf{D} à valeurs dans \mathbb{R}) et $\mathbf{A}_m = \prod_{k=1}^{N^p} \mathbf{a}_m^k$. La fonction test est choisie telle que :

$$\mathbf{u}^* = \Phi^* \mathbf{A}_{m+1} + \Phi_{m+1} \mathbf{A}^* \quad (6)$$

Un point fixe est enfin utilisé pour déterminer les fonctions Φ_{m+1} et \mathbf{A}_{m+1} :

- (i) la fonction d'espace est calculée en résolvant l'équation, en considérant $\mathbf{A}^* = \mathbf{0}$:

$$\Phi_{m+1} = \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{\mathbf{f}_{m+1} \bar{\chi}_{j+1} [\mathbf{I}_{\mathbf{D}_j} \mathbf{a}_{m+1}^j]}{\prod_{j=1}^{N^p} [(\mathbf{a}_{m+1}^j)^T \mathbf{I}_{\mathbf{D}_j} \mathbf{a}_{m+1}^j]} \right] \quad (7)$$

- (ii) en considérant $\Phi^* = \mathbf{0}$, \mathbf{A}_{m+1} est calculée en résolvant le problème suivant :

$$\mathbf{A}_{m+1} = \frac{\Phi_{m+1}^T \mathbf{f}_{m+1}}{\Phi_{m+1}^T \mathbf{L} \Phi_{m+1}} \quad (8)$$

- (iii) une décomposition CP [7] de rang 1 de l'opérateur \mathbf{A}_{m+1} est effectuée pour obtenir l'ensemble des fonctions de paramètres $\{\mathbf{a}_{m+1}^k(\boldsymbol{\mu}_k)\}_{k=1 \dots N^p}$.

où $\mathbf{f}_{m+1} = \mathbf{f} - \mathbf{u}_m$, $\bar{\chi}_k$ est le produit tenseur-vecteur sur la k -ième dimension [7] du tenseur \mathbf{f}_{m+1} et les opérateurs d'intégration $\mathbf{I}_{\mathbf{D}_i}$ sont définis par :

$$\int_{\mathcal{D}_i} \mathbf{a}(\boldsymbol{\mu}_i) \cdot \mathbf{b}(\boldsymbol{\mu}_i) d\boldsymbol{\mu}_i \equiv \mathbf{a}^T \mathbf{I}_{\mathbf{D}_i} \mathbf{b} \quad (9)$$

3.2 La méthode LATIN

Introduisons les espaces suivants :

- (i) l'espace \mathbf{A}_d des champs solutions admissibles \mathbf{s} vérifiant les équations d'état ;
(ii) l'espace Γ des champs admissibles \mathbf{s} vérifiant les équations d'évolution.

La solution du problème vérifie à la fois les conditions d'admissibilité ainsi que les lois d'évolution, de sorte qu'elle se trouve à l'intersection des espace \mathbf{A}_d et Γ :

$$\mathbf{s} \in \mathbf{A}_d \cap \Gamma \quad (10)$$

• **Initialisation de l'algorithme.** L'algorithme est initialisé en calculant la solution élastique, vérifiant les conditions d'admissibilité cinématique, de sorte que $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{A}_d$. Le processus itératif commence ensuite par une étape locale.

• **L'étape locale.** Le but de l'étape locale est de trouver la solution $\hat{s}_m \in \Gamma$, vérifiant les équations de comportement locales (et dans notre cas non-linéaires) à partir de la solution $s_m \in A_d$ calculée à l'itération précédente, vérifiant l'équilibre global. La direction de recherche E^+ est définie de sorte que $(\hat{s}_m - s_m) \in E^+$. Ce problème local est résolu de manière incrémentale (l'utilisation d'un algorithme de Newton-Raphson -par exemple- peut être nécessaire) en chaque point de Gauss de la structure. Ici, du fait que la décomposition PGD inclut les coordonnées additionnelles liées aux paramètres, il est en plus nécessaire de réaliser ce calcul pour chaque valeur de paramètre.

• **L'étape linéaire.** L'étape linéaire consiste à trouver la solution $s_{m+1} \in A_d$ à partir de la solution calculée à l'étape locale précédente $\hat{s}_m \in \Gamma$ et la direction de recherche E^- définie telle que $(s_{m+1} - \hat{s}_m) \in E^-$. Ce problème est global en espace et dépend des paramètres μ . Pour réduire le coût de calcul associé à cette résolution, la méthode PGD (telle que décrite précédemment) est implémentée pour approximer la solution s_{m+1} sous la forme d'une représentation à variables séparées, qui est successivement enrichie au fur et à mesure des itérations :

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m + \Delta \mathbf{u}_m \quad (11)$$

et l'enrichissement $\Delta \mathbf{u}_m$ est déterminé à partir des équations (5–8). Dans la version classique de la méthode LATIN, l'étape linéaire conduit à la génération d'un nouveau couple fonction du temps / fonction de la variable d'espace. Ici, du fait de la présence des coordonnées additionnelles, l'étape linéaire génère en plus autant de fonctions que de coordonnées additionnelles. L'algorithme LATIN-PGD étendu aux problèmes paramétrés est résumé Alg. 1.

3.3 Critère d'arrêt de l'algorithme

L'algorithme s'arrête lorsque la norme L^2 du nouveau mode $\varsigma = \|a_{m+1}^1\|_{L^2}$ devient plus petite qu'un certain critère ς_{crit} .

Algorithm 1: Algorithme LATIN-PGD

Data: s_0 , solution élastique vérifiant les conditions d'admissibilité cinématique ;

Result: \mathbf{u}_{m+1} , approximation de rang- $m + 1$ de \mathbf{u} ;

while $\varsigma > \varsigma_{crit}$ **do**

Étape locale :

$\forall \mu_i \in \mathbf{D}_i$: résolution incrémentale du problème local : $s_m \rightarrow \hat{s}_m$;

Étape linéaire :

 Enrichissement de la base réduite : algorithme de point fixe :

$\rightarrow \Delta \mathbf{u}_m = \Phi_{m+1} \prod_i a_{m+1}^i$;

$\rightarrow \mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m + \Delta \mathbf{u}_m$

Calcul de l'indicateur ς ;

end

La faisabilité de ce couplage LATIN-PGD paramétrique a été illustrée pour un problème 1-D de diffusion thermique dans [8]. La prochaine section présente des résultats préliminaires pour la simulation de structures en béton armé, avec le modèle d'endommagement avec prise en compte de l'effet unilatéral présenté Sec. 2 et une variabilité sur l'amplitude du déplacement imposé.

4 Résultats préliminaires – essai de traction sur une éprouvette en béton armé

Cette section donne quelques résultats préliminaires concernant l'étude d'une poutre en béton armé soumise à un chargement de traction-compression et dont la géométrie est donnée Fig. 3, pour laquelle une variabilité est considérée sur l'amplitude du chargement, qui est paramétré par une variable μ_2 suivant

la loi :

$$\mathbf{u}_d(t, \mu_2^i) = (0.75 + 0.25 \frac{\mu_2^i}{\mu_2^{\max}}) \mathbf{saw}(t) \quad (12)$$

où la fonction $\mathbf{saw}(t)$ est représentée en orange sur la figure 4a. Le modèle de comportement étudié est celui rappelé Sec. 2. Le but de cet étude est déterminer l'approximation du champ de déplacement \mathbf{u} sous la forme :

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}_d(\mu_2)) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(\mathbf{x}) a_i^1(t) a_i^2(\mu_2) \quad (13)$$

Les informations relatives à la discrétisation du problème sont données dans le tableau 3. La figure 4

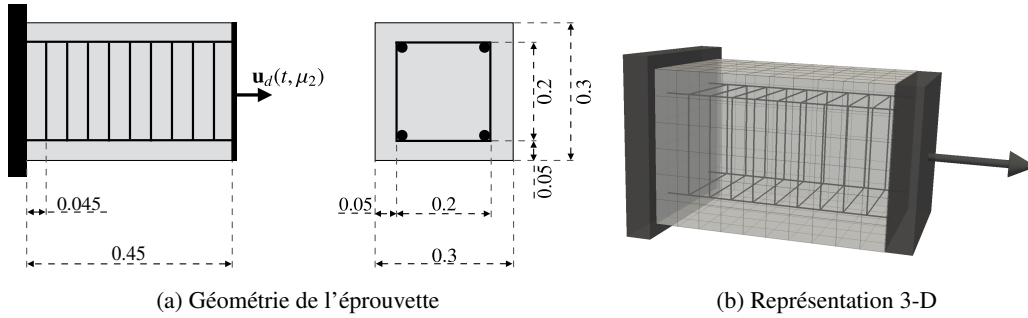


FIGURE 3 – Géométrie (gauche) et représentation 3-D (droite) du spécimen

TABLE 3 – Discrétisation du problème

Espace de définition		Intervalle of variation – discrétisation
Ω	Béton	3, 157 noeuds, 2, 400 éléments (9, 471 DDLs, 19, 200 GPs)
	Armature	80 noeuds, 112 éléments (240 DDLs, 112 GPs)
$\mathbf{D}_1 \equiv \mathcal{J}$	Temps	$t \in [0, 199]$ (200 pas de temps)
\mathbf{D}_2	Paramètre de chargement	$\mu_2 \in [1, 24]$ (24 valeurs)

donne l'évolution temporelle du chargement pour quelques valeurs du paramètre μ_2 ainsi que la réponse globale associée, obtenue par particularisation du champ PGD déterminé en utilisant la méthode LATIN-PGD pour 11 itérations de l'algorithme présenté Sec. 3. L'indicateur d'erreur associé est donné figure 5.

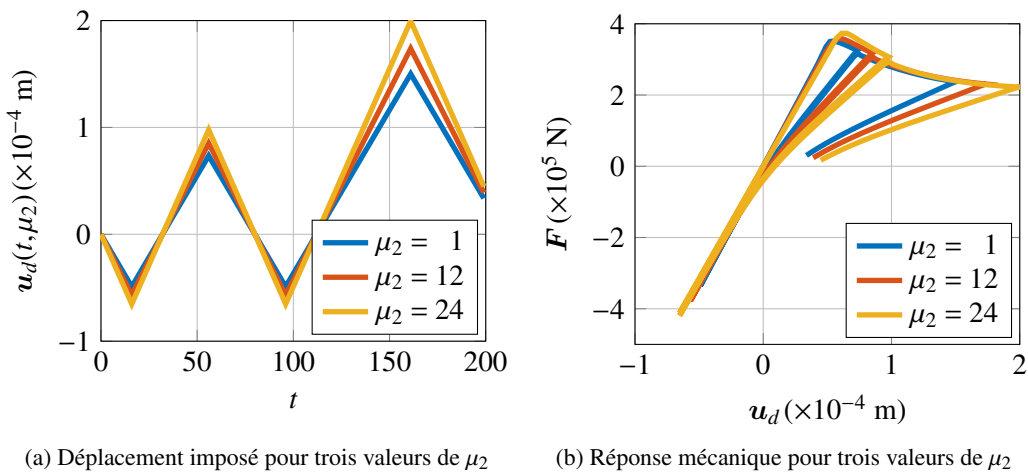


FIGURE 4 – $F(\mathbf{u}_d)$ pour plusieurs valeurs de μ_2

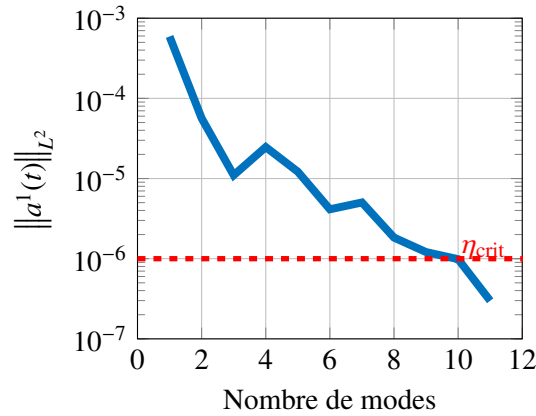


FIGURE 5 – Évolution de la norme \mathcal{L}^2 des modes dans la décomposition PGD

5 Conclusions et perspectives

La faisabilité du couplage LATIN–PGD avec une décomposition paramétrique a été montrée dans [8] pour un problème 1-D et un premier résultat pour un problème 3-D avec un modèle endommageant avec effet unilatéral a été présenté. Ce résultat montre qu’avec un faible nombre de termes dans la décomposition PGD, on peut représenter le comportement de la structure avec un modèle non-linéaire et une variabilité importante sur le déplacement imposé. Lors de la présentation au colloque CSMA, l’analyse de structures massives avec des chargements plus complexes incluant la variabilité des paramètres matériaux et du chargement sera présentée. Une analyse des performances numériques sera également développée.

6 Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet *SINAPS@* financé par l’Agence Nationale de la Recherche au sein du programme Investissements d’Avenir (*SINAPS@* référence No. ANR-11-RSNR-0022).

Références

- [1] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculations*, Springer, 1999.
- [2] A. Ammar, F. Chinesta, E. Cueto, M. Doblaré. *Proper generalized decomposition of time-multiscale models*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 569–596, 2012.
- [3] P.-A. Boucard, P. Ladevèze. *A multiple solution method for non-linear structural mechanics*, Mechanical Engineering, ASME, 317–328, 1999.
- [4] B. Richard, F. Ragueneau. *Continuum damage mechanics based model for quasi brittle materials subjected to cyclic loadings : formulation, numerical implementation and applications*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 383–406, 2012.
- [5] M. Vassaux, B. Richard, F. Ragueneau, A. Millard. *Regularized crack behaviour effects on continuum modeling of quasi-brittle materials under cyclic loading*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 18–36, 2015.
- [6] A. Nouy. *A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 1603–1626, 2010.
- [7] B. Bader, T. Kolda. *Efficient MATLAB computations with sparse and factored tensors*, SIAM Journal on Scientific Computing, SIAM, 205–231, 2007.
- [8] M. Vitse, D. Néron, P.-A. Boucard. *Virtual charts of solutions for parametrized nonlinear equations*, Computational Mechanics, Springer, 1529–1539, 2014.