



Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique

Jean Jacques Moreau

► To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1971, 273, pp.118-121. hal-01868142

HAL Id: hal-01868142

<https://hal.science/hal-01868142>

Submitted on 5 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS. — *Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique.* Note (*) de M. JEAN JACQUES MOREAU, présentée par M. Paul Germain.

1. SYSTÈME ÉLASTO-RÉSISTANT A DEUX CONSTITUANTS. — Il est habituel, dans l'étude de mouvements de faible amplitude d'un système mécanique, de traiter la variété $\mathcal{U}$ des configurations éventuelles comme un espace vectoriel, de dimension infinie si la liberté du système est infinie. La *vitesse* éventuelle du système est alors un élément de ce même espace; par la forme bilinéaire « puissance », notée $\langle ., . \rangle$, l'espace vectoriel $\mathcal{U}$ est *mis en dualité* avec un espace vectoriel $\mathcal{F}$ dont les éléments sont, en un sens général, des *forces* éventuellement appliquées au système. Sauf mention du contraire, toutes les notions topologiques invoquées dans ce qui suit (en particulier la *dérivée* ou *vitesse* $\dot{y}$ d'un élément $y \in \mathcal{U}$ fonction du temps t) seront relatives aux topologies faibles $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ associées à cette dualité.

A l'exemple de la conception usuelle de l'élasto-plasticité, le système qui fait l'objet de cette Note est plus précisément traité comme formé de deux constituants :

— Le constituant « visible » ou « exposé », de configuration $x \in \mathcal{U}$: lui seul subit les forces extérieures ou *charges* et les *liaisons*.

— Le constituant « caché » ou « freiné », de configuration $p \in \mathcal{U}$.

On pose $x - p = e$, *écart élastique*.

Les forces subies par le constituant p sont :

— Une force s de rappel élastique vers x , de la forme

$$(1) \quad s = A(e),$$

où A est une application donnée, linéaire ou non de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{F}$; usuellement A est le gradient (faible, au sens de la dualité entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$) d'une fonction $E : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$, *énergie élastique*, convexe.

— Une *résistance* f liée à la vitesse $\dot{p}$ (on postule, au stade présent, l'existence de cette vitesse) selon le schéma développé dans une Note précédente (1) :

$$(2) \quad \dot{p} \in \partial G(-f),$$

où G est une fonction numérique définie sur $\mathcal{F}$, convexe, semi-continue inférieurement. Si par exemple, il s'agit seulement d'une résistance plastique parfaite, G est la fonction indicatrice ψ_c d'une partie convexe fermée donnée C de $\mathcal{F}$.

Les forces subies par le constituant x sont :

— Une charge $c \in \mathcal{F}$, fonction donnée du temps.

— La force $-s$ de rappel élastique vers p .

— La réaction r d'une *liaison bilatérale parfaite* ⁽²⁾ : cette liaison contraint x d'appartenir, à chaque instant, à une variété affine de mouvement imposé ⁽³⁾, soit $\mathcal{L} = U + g$, U désignant un sous-espace vectoriel fermé fixe de $\mathcal{U}$, tandis que g est un élément de $\mathcal{U}$, fonction donnée du temps, qu'on peut appeler l'*entraînement forcé*. Dire que la liaison est parfaite signifie que la réaction r , *a priori* inconnue, appartient à V , espace orthogonal de U dans $\mathcal{T}$.

Le problème est la détermination du mouvement de x et de p dans l'hypothèse d'une évolution assez lente pour que l'inertie soit négligeable.

A cette fin, remarquons d'abord que la condition géométrique $x \in \mathcal{L}$ de la liaison est, moyennant référence à des conditions initiales, équivalente à sa forme dérivée :

$$(3) \quad \dot{x} \in U + \dot{g}.$$

Vu la condition (2), le quasi-équilibre de p équivaut à

$$(4) \quad \dot{p} \in \partial G(s).$$

Vu la condition $r \in V$, le quasi-équilibre de x équivaut à

$$(5) \quad s \in V + c.$$

En observant que la fonction indicatrice de la variété affine $V + c$ admet pour sous-différentiel en un point $a \in \mathcal{T}$ l'ensemble

$$\partial \psi_{V+c}(a) = \begin{cases} U & \text{si } a \in V + c, \\ \emptyset & \text{si } a \notin V + c, \end{cases}$$

on condense (3) et (5) dans l'écriture suivante :

$$(6) \quad \dot{g} - \dot{x} \in \partial \psi_{V+c}(s).$$

Toutes les conditions de notre problème sont résumées par (1), (4) et (6). La structure d'un tel problème d'évolution se dégagera mieux dans un cadre plus général et fera l'objet de publications ultérieures; au stade présent, nous nous concentrons sur la variable « écart élastique » $e = x - p$; une élimination immédiate — additionner (4) et (6) — caractérise son évolution par

$$(7) \quad -\dot{e} \in (\partial F + \partial G)(A(e)),$$

F désignant la fonction $-\langle \dot{g}, \cdot \rangle + \psi_{V+c}$.

2. VISCO-PLASTICITÉ. — Nous disons que la loi de résistance (2) est de type visco-plastique si f est somme de deux termes f_1 (de plasticité) et f_2 (de viscosité) liés respectivement à la vitesse $\dot{r}$ par des lois de la forme

$$-f_1 \in \partial \varphi(\dot{p}),$$

où φ est la fonction d'appui d'une partie convexe fermée C de $\mathcal{U}$, et

$$-f_2 = \text{grad } R(\dot{p}),$$

où R est une forme quadratique sur $\mathcal{U}$, dite fonction de Rayleigh. La fonction G introduite en (2) est alors égale à $(^4)$:

$$G = (\varphi + R)^* = \psi_c \nabla R^*.$$

Dans des cas usuels, la forme quadratique R^* sera continue, au moins pour la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{F}, \mathcal{U})$; il en sera donc de même pour la fonction G ci-dessus, nulle sur C et prenant des valeurs régulièrement croissantes hors de cet ensemble; si l'on compare au cas purement plastique qui laisse $G = \psi_c$, la prise en compte d'une viscosité, au besoin très faible, apparaît mathématiquement semblable à une description de l'ensemble C par une « fonction de pénalisation », ce qui est une pratique familière dans les techniques numériques.

3. CAS D'UNE ÉLASTICITÉ LINÉAIRE. — Dans le cas le plus usuel où l'application A de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{F}$ est linéaire, on pourra supposer (au prix, s'il le faut, d'une opération préalable de passage à un espace quotient) que cette application est bijective. La fonction énergie élastique $E \geq 0$ admettant A pour gradient est alors une forme quadratique définie positive sur $\mathcal{U}$. On munit $\mathcal{U}$ d'une structure préhilbertienne séparée en prenant $2E$ comme carré de la norme. A ce stade, on allège notablement l'exposition en traduisant la bijection A comme une identification des espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ notés désormais H : la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se confond de la sorte avec le produit scalaire préhilbertien de H . Dans ce cadre, l'équation d'évolution (7) prend une forme intéressant actuellement les analystes : relation entre e et $-\dot{e}$ qui est *monotone* au sens de Kachurovskii et Minty; en l'état actuel de la théorie, la question d'existence de solutions ne peut être abordée que si H est hilbertien : on procédera donc, s'il le faut, à une complétion.

Une variante, utile notamment pour l'étude du problème de l'*adaptation des contraintes*, repose sur une translation qui introduit la variable

$$y = e - c - g = -\text{proj}_V p,$$

(on ne restreint pas la généralité en supposant ici $c \in U$ et $g \in V$).

Dans le cas (visco-plastique) où G est une fonction continûment différentiable, on obtient, pour décrire l'évolution de y dans V , une équation de la forme

$$-\dot{y} = \text{grad } f(t, y),$$

justiciable, notamment, de résultats de F. E. Browder $(^5)$. Le cas purement plastique est mathématiquement plus délicat, mais fournit la représentation imagée que voici : Notons γ l'intersection de V avec $C - c - g$; c'est un convexe fermé qui évolue de manière connue dans V . Le point y appartient à γ pour tout t ; grossièrement parlant, il reste immobile tant

qu'il est intérieur à cet ensemble; lorsque y est atteint par la frontière de γ , ce mobile prend une vitesse dirigée selon une normale entrante du convexe γ : c'est ce qu'on peut appeler un *processus de râfle*.

(*) Séance du 28 juin 1971.

(1) J. J. MOREAU, *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 608.

(2) On pourrait aussi prendre en compte des liaisons unilatérales parfaites selon le formalisme présenté dans : J. J. MOREAU, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 954.

(3) Cette vérité affine est, en pratique, définie comme intersection de plusieurs autres. Par exemple, dans une situation usuelle d'application de la présente théorie, $\mathcal{U}$ est un espace de champs tensoriels de déformation sur le domaine de $\mathbf{R}^3$ qu'occupe un milieu continu, $\mathcal{F}$ un espace de champs tensoriels de contraintes sur ce même domaine. $\mathcal{L}$ sera contenu dans le sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ formé par les champs de déformation géométriquement compatibles; ce sera plus précisément à chaque instant l'ensemble des champs de tenseurs déformation dérivant de champs de déplacements en accord avec le mouvement imposé d'une partie de la frontière.

(4) Au sujet de l'opération ∇ , image de l'addition par la polarité $*$, voir par exemple : J. J. MOREAU, *Fonctionnelles convexes* (Séminaire sur les Équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris, 1967) (multigraphié, 108 pages).

(5) F. E. BROWDER, *Annals of Math.*, 80, 1964, p. 485-523.

U. E. R. de Mathématiques,
place Eugène-Bataillon,
34-Montpellier, Hérault.