Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité

Jean Jacques Moreau

MÉCANIQUE. — *Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité.* Note (*) de M. **Jean Jacques Moreau**, présentée par M. Paul Germain.

1. Loi de résistance. — Une configuration d'un système matériel, de liberté finie ou infinie, étant spécifiée, on considère un espace vectoriel réel $\mathcal{V}$ dont les éléments représentent, en un sens général, des *vitesses* éventuelles du système à son passage par ladite configuration; on considère d'autre part, un espace vectoriel $\mathcal{F}$ dont les éléments constituent, en un sens général, des *forces* éventuellement appliquées au système au même instant. Ces deux espaces, de dimension finie ou infinie, sont *mis en dualité* par une forme bilinéaire notée $\langle .,. \rangle$: si $v \in \mathcal{V}$ est la vitesse du système et $f \in \mathcal{F}$ une force qui lui est appliquéee, $\langle v, f \rangle$ représente, par définition, la puissance de cette force.

On considère une *loi de force*, formulée comme une relation $\mathcal{R}$ entre la vitesse éventuelle $v \in \mathcal{V}$ du système et l'une, soit $f \in \mathcal{F}$, des forces qu'il subit; cette relation ne définit pas nécessairement l'une des deux variables v et f comme fonction univoque de l'autre (*cf.* exemple 2). Nous disons que $\mathcal{R}$ est une *loi de résistance* si on a l'implication

$$v \mathcal{R} f \;\Rightarrow\; \langle v, f \rangle \leqq 0. \tag{1}$$

2. Fonction de résistance. — Soit φ une fonction à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, définie sur l'un des deux espaces vectoriels, sur $\mathcal{V}$ pour fixer les idées. Rappelons [1] les définitions suivantes : on dit que $f \in \mathcal{F}$ est un *sous-gradient* de la fonction φ au point $v \in \mathcal{V}$ si la fonction définie pour tout $u \in \mathcal{V}$ par $u \mapsto \langle u - v, f \rangle + \varphi(v)$ (fonction affine prenant au point v la même valeur que φ) minore φ partout dans $\mathcal{V}$. L'ensemble, noté $\partial\varphi(v)$, des sous-gradients de φ au point v s'appelle *sous-différentiel* de φ en ce point; c'est une partie convexe (éventuellement vide) de $\mathcal{F}$, fermée pour les topologies localement convexes compatibles avec la dualité.

Nous dirons que φ est *fonction de résistance* [2] de la loi de force si la relation $v \mathcal{R} f$ équivaut à

$$-f \in \partial\varphi(v). \tag{2}$$

Dans toute la suite, on fera les hypothèses $0 \in \partial\varphi(0)$ et $\varphi(0) = 0$, usuellement vérifiées; ces hypothèses assurent notamment la propriété (1).

Habituellement, la fonction φ sera *convexe, semi-continue inférieurement* [3] pour les topologies compatibles avec la dualité entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$. On sait qu'à une telle fonction correspond bijectivement sa *fonction duale* φ^* définie sur $\mathcal{F}$ par

$$\varphi^*(f) = \sup_{v \in \mathcal{V}} [\langle v, f \rangle - \varphi(v)]$$

et φ est, à son tour, la fonction duale de φ^*. La relation (2) s'écrit alors de deux autres manières équivalentes :

$$\varphi(v) + \varphi^*(-f) + \langle v, f \rangle = 0, \tag{3}$$

$$v \in \partial\varphi^*(-f). \tag{4}$$

Exemple 1 : *Viscosité.* — Dans ce cas, la force $f \in \mathcal{F}$ dépend linéairement de $v \in \mathcal{V}$ et cette application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{F}$ est supposée « symétrique » par rapport à la dualité (cette symétrie découle, si l'on veut, du principe d'Onsager); il en résulte l'existence d'une forme quadratique $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$, appelée *fonction de Rayleigh*, telle que la relation $v \mathcal{R} f$ s'écrive

$$-f = \operatorname{grad} \varphi(v) \tag{5}$$

(gradient faible au sens de la dualité entre les deux espaces vectoriels). La condition (1) impose à la forme quadratique d'être $\geqq 0$, donc convexe; on vérifie aisément, en ce cas, que, pour tout $v \in \mathcal{V}$, le sous-différentiel $\partial\varphi(v)$ est constitué par l'unique élément $\operatorname{grad}\varphi(v)$, ce qui confère à (5) la forme (2) : φ est donc *fonction de résistance.*

Exemple 2 : *Plasticité et frottement.* — Dans l'espace $\mathcal{F}$ on donne un ensemble C, convexe, contenant l'origine, fermé (pour les topologies compatibles avec la dualité) et on énonce ici la relation $\mathcal{R}$ sous la forme d'un « principe de puissance minimale » : par hypothèse les éventuels $f \in \mathcal{F}$ que cette relation associe à un $v \in \mathcal{V}$ sont caractérisés par

$$f \in C \quad \text{et} \quad \forall f' \in C : \ \langle v, f' \rangle \geqq \langle v, f \rangle. \tag{6}$$

Sont de ce type les relations entre contraintes et vitesses de déformation qu'utilise la théorie de la plasticité (alors $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ sont de dimension 6); de là des relations de même forme entre champs de contraintes et champs de vitesses de déformation (alors $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces fonctionnels).

On constate immédiatement que la relation (6) équivaut à

$$-v \in \partial\psi_C(f), \tag{7}$$

où ψ_C représente la *fonction indicatrice* de l'ensemble C (par définition cette fonction prend la valeur 0 sur C et $+\infty$ ailleurs); sa fonction duale ψ_C^* est classiquement appelée *fonction d'appui* de l'ensemble C et (7) s'écrit aussi bien

$$f \in \partial\psi_C^*(-v). \tag{8}$$

Il est plus commode, dans le contexte présent, de poser $\varphi(v) = \psi^*(-v)$ (φ est la fonction d'appui de l'ensemble $-$C), ce qui donne aux relations équivalentes (6), (7) ou (8) la forme (2) : φ *est fonction de résistance pour la présente loi.*

La classique *loi de Coulomb*, régissant le frottement entre deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, rentre aussi dans ce cadre : alors $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ sont tous les deux identifiés avec l'espace, de dimension 2, des vecteurs du plan tangent commun aux deux solides au point de contact, espace vectoriel mis en dualité avec lui-même par le produit scalaire euclidien banal; v est la *vitesse de glissement* de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_2$; f est la composante tangentielle de la force de contact subie par $\mathcal{S}_1$ de la part de $\mathcal{S}_2$. L'ensemble C est le disque centré à l'origine, ayant pour rayon le produit de la composante normale de la force de contact par le coefficient de frottement; une loi de *frottement anisotrope* serait décrite au moyen d'un ensemble C plus compliqué.

3. Puissance dissipée. — Dans l'exemple 1 ci-dessus, on tire des propriétés élémentaires des formes quadratiques $-\langle v, f\rangle = 2\varphi(v)$, ce qui donne la puissance dissipée par viscosité. Dans l'exemple 2, l'équivalence $(2) \Leftrightarrow (3)$ fournit $-\langle v, f\rangle = \varphi(v)$. D'une façon générale, si une loi de résistance possède une fonction de résistance φ *positivement homogène* (*cf.* certaines lois de *fluage*), on trouvera que la puissance dissipée correspondante lors d'un mouvement de vitesse v, à savoir $-\langle v, f\rangle$, est égale au produit de $\varphi(v)$ par le degré d'homogénéité.

Nous montrons dans ce qui suit que cette propriété, pour la fonction de résistance, d'engendrer une expression de la puissance dissipée, s'étend notablement au-delà du cas homogène :

On se place dans le cas usuel où $\partial\varphi(v)$ est non vide quel que soit $v \in \mathcal{V}$; on cherche quelle forme doit avoir la fonction φ pour qu'il existe une fonction h : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *assurant l'implication*

$$(9) \qquad -f \in \partial\varphi(v) \Rightarrow -\langle v, f\rangle = h(\varphi(v)).$$

Supposons cette implication vraie. Soit v_0 élément non nul de $\mathcal{V}$; d'après les hypothèses faites plus haut sur φ, la fonction numérique α définie sur $[0, +\infty[$ par $\alpha(\lambda) = \varphi(\lambda v_0)$ est convexe $\geqq 0$ partout finie, nulle à l'origine, donc continue et non décroissante. Alors deux cas au plus sont possibles, selon le choix de l'élément v_0 : ou bien la fonction α est identiquement nulle, ou bien elle est, à partir d'un certain λ, strictement croissante non bornée. Plaçons-nous dans ce dernier cas : quitte à multiplier préalablement v_0 par un réel > 0, on peut supposer $\alpha(1) = 1$. La fonction convexe α possède, pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$ une dérivée à gauche $\dot{\alpha}^-(\lambda)$ et une dérivée à droite $\dot{\alpha}^+(\lambda)$. De la définition du sous-différentiel, on tire l'implication

$$y \in \partial\varphi(\lambda v_0) \Rightarrow \dot{\alpha}^-(\lambda) \leqq \langle v_0, y\rangle \leqq \dot{\alpha}^+(\lambda),$$

d'où en rapprochant de (9) :

$$\dot{\alpha}^-(\lambda) \leqq \frac{1}{\lambda} h(\alpha(\lambda)) \leqq \dot{\alpha}^+(\lambda).$$

Les propriétés élémentaires des fonctions convexes permettent de montrer que, jointe à $\alpha(1) = 1$, une telle condition différentielle détermine sans ambiguïté α. Cette fonction ne dépend donc pas de la direction de v_0 dans $\mathcal{V}$ et on aboutit à la conclusion suivante :

Soit γ *la fonction jauge de l'ensemble* (*convexe, fermé contenant l'origine*) $\Gamma = \{ v \in \mathcal{V} : \varphi(v) \leqq 1 \}$; *alors, pour tout* $v \in \mathcal{V}$, *on a*

$$\varphi(v) = \alpha(\gamma(v)). \tag{10}$$

Si d'ailleurs, pour un $\lambda > 0$, on avait $\dot{\alpha}^-(\lambda) \neq \dot{\alpha}^+(\lambda)$, la construction de $\partial\varphi$ fournirait des $v \in \mathcal{V}$ compatibles avec plusieurs valeurs de $\langle v, f \rangle$, en contradiction avec (9); *donc la fonction* α *est différentiable.*

L'implication (9) impose ainsi à la fonction φ une forme qui a déjà fait l'objet d'études théoriques de J. C. Aggéri et C. Lescarret (4); des résultats obtenus par ces auteurs on tire inversement que, si on part de Γ, ensemble convexe fermé absorbant, de sorte que sa jauge γ est une fonction numérique partout finie, et de α, fonction convexe finie $\geqq 0$, différentiable sur $[0, +\infty[$, nulle à l'origine, la fonction φ définie par (10) est une fonction de résistance assurant l'implication (9) avec une h à déduire de $h(\alpha(\lambda)) = \lambda\, \dot{\alpha}(\lambda)$. La fonction duale φ^* possède une structure analogue : on la construit à partir de l'ensemble $\Gamma^0 \subset \mathcal{F}$, polaire de Γ, et de la fonction α^*, *conjuguée de Young* de α.

(*) Séance du 14 septembre 1970.

(1) *Cf.*, par exemple, J. J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1966-1967, Collège de France, Paris (multigraphié, 108 pages).

(2) B. Nayroles, dans un article à paraître au *Journal de Mécanique*, utilise, pour désigner une telle fonction, ou aussi bien sa duale, le terme général de *sur-potentiel*, précédemment proposé par l'auteur dans le cas de relations entre force et configuration (*Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 954).

(3) Il en est évidemment ainsi dans le cas où $\partial\varphi(v) \neq \emptyset$ pour tout v.

(4) *Comptes rendus*, 260, 1965, p. 6011.

(*Centre de Recherches mathématiques,*
Université de Montréal,
Canada
et *Faculté des Sciences, Mathématiques,*
place Eugène Bataillon,
34-*Montpellier,*
Hérault.)