ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Fonctionnelles sous-différentiables.*

Note (*) de M. **Jean-Jacques Moreau**, présentée par M. Jean Leray.

1. Définitions. — Soit E un espace vectoriel topologique sur le corps des réels, E′ son dual topologique, muni de la topologie faible. Soit f une fonction à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$; quitte à prolonger cette fonction avec la valeur $+\infty$ hors de son domaine initial, nous la supposons partout définie sur E. La locution suivante a été introduite dans une précédente Note ([1]) :

On dit que $a' \in E'$ est un sous-gradient de la fonction f au point $x_0 \in E$ si, $f(x_0)$ étant fini, la fonction $x \to \langle x, a' \rangle + f(x_0)$ (fonction affine continue de « pente » a', prenant au point x_0 la même valeur que f) *minore f partout sur* E. On notera $\partial f(x_0) \subset E'$ l'ensemble ([2]) des sous-gradients de f au point x_0; si cet ensemble est non vide, on dira que f est *sous-différentiable* au point x_0 [ce qui implique que f ne prend nulle part la valeur $-\infty$ et que $f(x_0)$ est fini; évidemment, si f est sous-différentiable en tout point de E, elle est convexe et semi-continue inférieurement, puisque enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues] ([3]).

Conformément à une autre Note ([4]), nous désignons par $\Gamma(E)$ l'ensemble des $f \in \bar{\mathbf{R}}^E$ qui sont enveloppes supérieures de famille de fonctions affines continues et par $\Gamma_0(E)$ l'ensemble des éléments de $\Gamma(E)$ autres que les deux constantes $+\infty$ et $-\infty$ (enveloppe supérieure de la famille vide). Dans le cas particulier usuel où E est *localement convexe séparé*, on montre ([5]) que $\Gamma_0(E)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, *convexes, semi-continues inférieurement* et non partout égales à $+\infty$.

2. Usage de la fonction polaire. — En introduisant la fonction $f^* \in \Gamma(E')$, dite *fonction polaire* de f,

$$f^*(x') = \sup_{x \in E} \{ \langle x, x' \rangle - f(x) \}$$

on a, si l'on suppose $f(x_0)$ fini,

$$\partial f(x_0) = \{ x' \in E' : f(x_0) + f^*(x') - \langle x_0, x' \rangle \leqq 0 \} \tag{1}$$

(où l'on peut indifféremment remplacer $\leqq$ par $=$); cela montre que $\partial f(x_0)$ est un ensemble convexe fermé dans E′.

Pour toute $f \in \bar{\mathbf{R}}^E$, la fonction f^{**} (polaire de la polaire) est la plus grande fonction de $\Gamma(E)$ minorant f (enveloppe supérieure des minorantes affines continues de f) ou Γ-*régularisée* de cette fonction et l'on a les implications

$$\begin{aligned} \partial f(x_0) \neq \emptyset &\Rightarrow f(x_0) = f^{**}(x_0), \\ f(x_0) = f^{**}(x_0) &\Rightarrow \partial f(x_0) = \partial f^{**}(x_0), \\ x'_0 \in \partial f(x_0) &\Rightarrow x_0 \in \partial f^*(x'_0). \end{aligned}$$

3. Cas de sous-différentiabilité. — Il résulte de (1) que f, supposée dans $\Gamma_0(E)$ et finie à l'origine O_E de E, est sous-différentiable en ce point si et seulement si sa fonction polaire $f^\star$ présente un minimum dans E'.

Une condition suffisante pour cela est que $f^\star$ soit une fonction *inf-compacte* ([4]) sur E' faible, c'est-à-dire que, pour tout $k \in \mathbf{R}$, l'ensemble $S(k) = \{x' \in E' : f^\star(x') \leqq k\}$ soit compact dans E' faible [d'ailleurs, comme $f^\star$ est convexe et semi-continue inférieurement, cela équivaut simplement à l'existence d'un $k_0 > \inf f^\star(E')$ tel que $S(k_0)$ soit compact].

De même, pour que $f \in \Gamma_0(E)$ soit sous-différentiable *en tout point* de E, il suffit que $f^\star$ soit *inf-compacte dans toutes les directions*, c'est-à-dire que, quelle que soit l, forme linéaire continue sur E', la fonction $f^\star + l$ soit inf-compacte.

Une condition d'un autre genre est la suivante : si f, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, est *convexe* sur E et si elle est *majorée sur un voisinage du point* x_0, elle est sous-différentiable en ce point (noter que l'hypothèse équivaut ici à la *continuité* de la fonction convexe f sur l'intérieur de l'ensemble $\{x \in E : f(x) < +\infty\}$).

4. Différentiabilité faible et sous-différentiabilité. — Si une fonction *convexe* f est *faiblement différentiable* au point $x_0 \in E$ (ou, *a fortiori*, pour un espace E normé, si f est différentiable au sens de Fréchet), il est immédiat qu'elle est sous-différentiable en ce point et que l'ensemble $\partial f(x_0)$ est réduit à un seul élément.

Réciproquement, si l'on suppose $f \in \Gamma_0(E)$ et $f^\star$ inf-compacte, l'hypothèse que $\partial f(O_E)$ est réduit à un seul élément (c'est-à-dire que le minimum de $f^\star$ est strict) implique la différentiabilité faible de f au point O_E. Plus généralement, si $f \in \Gamma_0(E)$ et si $f^\star$ est inf-compacte, on peut, à partir de l'ensemble $\partial f(O_E)$, certainement non vide, déterminer la dérivée de f dans toute direction issue de O_E.

De même, si $f^\star$ est inf-compacte dans toutes les directions et strictement convexe, f, supposée appartenir à $\Gamma_0(E)$, est faiblement différentiable en tout point de E.

5. Sous-différentiabilité d'une somme. — Soient f et g quelconques dans $\overline{\mathbf{R}}^E$ et soit $x \in E$; on trouve immédiatement

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x).$$

Il est important de préciser des cas où cette inclusion est une égalité :

Si f et g appartiennent à $\Gamma_0(E)$ et si $f^\star$ est inf-compacte dans toutes les directions sur E', on a, pour tout $x \in E$,

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x). \tag{2}$$

Si f et g appartiennent à $\Gamma_0(E)$, si $f^\star$ est inf-compacte et si g prend une valeur finie au point O_E on a (2) pour tout $x \in E$.

Si f et g appartiennent à Γ_0 (E), si l'une d'entre elles est partout finie et continue sur E et si l'une des deux fonctions polaires f^* et g^* est partout finie et continue sur E', on a (2) pour tout $x \in E$.

Noter que, dans tout ce qui précède, il est indifférent de remplacer la topologie initiale de E par toute autre topologie donnant le même dual; la notion de sous-différentiabilité, ainsi que l'ensemble Γ (E) sont inaltérés par ce changement de topologie. De même, sur E', on pourra prendre, au lieu de la topologie faible de dual de E, une topologie localement convexe plus fine pourvu qu'elle donne les mêmes formes linéaires continues : ce changement de topologie est avantageux si l'on doit, comme ci-dessus, invoquer la continuité d'une fonction numérique sur E'; au contraire, la topologie faible reste préférable pour invoquer une compacité.

(*) Séance du 16 décembre 1963.

(1) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1069, résumant : J.-J. MOREAU, *Applications « prox »*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques 1963 (multigraphié, 20 pages).

(2) Là où nous écrivons de la sorte $a' \in \partial f(x_0)$, T. ROCKAFELLAR, *Convex functions and dual extremum problems* (*Thesis*, 1963, Harvard University) (exploitant la même idée dans le cas $E = \mathbf{R}^n$) emploie la notation $a' = \partial f(x_0)$ qui nous semble malencontreuse, ce signe = n'exprimant pas une équivalence entre les deux membres. Sous le nom de *generalized gradient*, la notion de sous-gradient intervient dans : G. J. MINTY, *On the monotonicity of the gradient of a convex function*, à paraître dans *Pacific Journ. of Math.*

(3) Pour la démonstration des faits énoncés dans la présente Note et diverses considérations du même ordre, *voir* J.-J. MOREAU, *Étude locale d'une fonctionnelle convexe*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1963 (multigraphié, 25 pages); ces démonstrations reposent essentiellement sur la théorie de l'*inf-convolution*.

(4) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 5047, développé dans J.-J. MOREAU, *Inf-convolution*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1963 (multigraphié, VI + 42 pages).

(5) J.-J. MOREAU, *Fonctions convexes en dualité*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1962 (multigraphié, 18 pages).

(Faculté des Sciences, Montpellier.)