Une lecture moderne d'un mémoire d'Euler : les "Éclaicissemens plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'écho"

Pierre Jehel

Une lecture moderne d'un mémoire d'Euler Les *Éclaicissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'écho*

Pierre Jehel

> Un jour [que Narcisse] chassait vers ses filets des cerfs tremblants, il frappa les regards de la nymphe à la voix sonore qui ne sait ni se taire quand on lui parle, ni parler la première, de la nymphe qui répète les sons, Écho. En ce temps là, Écho avait un corps ; ce n'était pas simplement une voix et pourtant sa bouche bavarde ne lui servait qu'à renvoyer, comme aujourd'hui, les derniers mots de tout ce qu'on lui disait. Ainsi l'avait voulu Junon ; quand la déesse pouvait surprendre les nymphes qui souvent, dans les montagnes, s'abandonnaient aux caresses de son Jupiter, Écho s'appliquait à la retenir par de longs entretiens, pour donner aux nymphes le temps de fuir. La fille de Saturne s'en aperçut : « Cette langue qui m'a trompée, dit-elle, ne te servira plus guère et tu ne feras plus de ta voix qu'un très bref usage. »L'effet confirme la menace ; Écho cependant peut encore répéter les derniers sons émis par la voix et rapporter les mots qu'elle a entendus. [20]

1 Introduction

L'écho suscite l'étonnement de celui qui en fait l'expérience pour la première fois. Notre perception de l'écho perd ensuite de son intérêt parce qu'elle est facilement associée à un mécanisme physique expliqué scientifiquement et aujourd'hui facilement concevable : le renvoi d'un son par une paroi. Grâce aux théories de la mécanique, les scientifiques peuvent expliquer et prédire un grand nombre de phénomènes naturels. Dès le dix-huitième siècle, certaines de ces théories — dont celle de la propagation du son dans l'air — ont pris une forme très proche de celle que nous connaissons aujourd'hui.

FIGURE 1 – Nicolas Poussin, *Écho et Narcisse*, vers 1630, (d'après une image de la base Atlas, ©Musée du Louvre/A. Dequier - M. Bard).

Le dix-huitième siècle hérite principalement des philosophies naturelles de René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz et Isaac Newton. On peut trouver une présentation de ces trois philosophies résumées dans une étude proposée par Calinger sur les *Lettres à une Princesse d'Allemagne*[1] [5]. Calinger s'intéresse notamment à l'influence de ces trois philosophies naturelles dans les travaux d'Euler. Selon lui, il est difficile d'associer le travail d'Euler à une seule d'entre elles : Voltaire, contemporain d'Euler, considérait qu'il était un disciple de Leibniz ; au début du vingtième siècle on le classait parmi les disciples de Descartes ; Truesdell le considérait comme adhérant aux théories de Newton en tant que continuateur du programme que ce dernier avait énoncé dans la préface des *Principia* : expliquer les phénomènes naturels à partir de principes mécaniques et d'un raisonnement mathématique. Calinger remarque qu'Euler aborde les trois philosophies, mais que ses idées et positions scientifiques étaient toujours cohérentes avec la mécanique de Newton.

C'est au dix-huitième siècle que le traitement des phénomènes naturels

1. Entre 1760 et 1762, Euler a écrit 234 lettres adressées à une princesse de Prusse, cousine de Frédéric II, âgée de 15 ans au début de la correspondance. Voir dans cet ouvrage l'article de Guillaume Théret consacré à ces lettres.

par le calcul s'est considérablement développé : des concepts et relations mathématiques ont été définis pour décrire des phénomènes d'hydrodynamique, de vibration des cordes, de déformation des solides, etc. Ces travaux ont porté une nouvelle lumière sur les phénomènes naturels tels que nous les percevons. Parmi ces recherches, il en est une particulièrement importante :

> La plus sublime recherche que les Géomètres aient entreprise de nos jours avec succès, est sans contredit à tous égards celle de la propagation du son. Comme il y est question d'une certaine agitation de l'air, cette recherche a été d'autant plus difficile, que parmi toutes celles qu'on a faites sur le mouvement des différents corps, il ne s'en trouve pas une seule, où l'on ait réussi à soumettre au calcul le mouvement de l'air ; de sorte que cette partie de la Mécanique a été jusqu'ici entièrement inconnue. [...] Ainsi on ne savait encore absolument rien des différents mouvements dont une masse d'air est susceptible.

Ce passage se trouve dans les *Éclaicissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'écho* [15] présentés par Euler à Berlin en 1765.

Euler est l'auteur de plusieurs mémoires sur la propagation du son dans l'air : au début de sa carrière [8] [9], et ensuite au cours de son séjour à Berlin entre 1741 et 1766 [12] [13] [14] [15]. Les *Éclaicissements plus détaillés* [15] revêtent un intérêt particulier car ils constituent le dernier mémoire qu'Euler a écrit sur ce sujet et présentent la théorie de la propagation unidimensionnelle du son dans l'air telle — à très peu de choses près — qu'elle est encore utilisée aujourd'hui.

Avant de présenter nos objectifs, citons l'étude *The Theory of Aerial Sound, 1687–1788* dans l'introduction au volume 13 de la deuxième série des *Opera omnia* d'Euler [27] où Truesdell commente les travaux d'Euler sur la propagation du son dans l'air d'une façon très détaillée et dans un contexte qu'il délimite par la publication des *Principia* de Newton en 1687 et de la *Mécanique analytique* de Lagrange en 1788. Ici, avec cette lecture des *Éclaicissements plus détaillés* [15], nous voudrions montrer la modernité des travaux d'Euler. La mécanique classique — c'est-à-dire toute la mécanique sans les théories quantiques ni relativistes — telle qu'elle est encore utilisée aujourd'hui, fait appel aux mêmes ingrédients et à la même démarche que celle adoptée par Euler dans ce mémoire. L'utilisation des théories de la mécanique classique est large et a envahi notre quotidien : la construction d'un immeuble ou d'un piano, les prédictions météorologiques, l'envoi de satellites dans l'espace, etc. y font appel. La seule chose qui a modifié de façon importante la mise en œuvre des théories nées au dix-huitième siècle est le recours à des méthodes numériques pour discrétiser en temps et en espace les équations qui gouvernent l'évolution des systèmes mécaniques étudiés, dans le but de les traiter par ordinateur. Étudier les travaux d'Euler, comprendre dans quel contexte historique ils sont apparus nous paraît donc pouvoir intéresser quiconque souhaite comprendre l'essence de la mécanique classique et ainsi mieux appréhender la façon dont elle est utilisée aujourd'hui. Se plonger dans les travaux d'Euler donne aussi l'occasion d'une rencontre avec la beauté de certains développements mathématiques et l'occasion d'aborder la question de la vocation du physicien.

Trois parties suivront cette introduction et précéderont les conclusions. Dans la première, nous esquisserons le contexte scientifique dans lequel les travaux d'Euler sur la propagation du son ont été publiés. Nous verrons que dans le contexte délicat de la controverse sur la théorie des cordes vibrantes dans laquelle Euler était vivement impliqué, c'est finalement le concept de ce que nous appelons aujourd'hui une onde qui a émergé. Le problème de la propagation du son étant traité de façon analogue à celui des cordes vibrantes, cette controverse prend ici une importance particulière. La deuxième partie sera consacrée à une lecture moderne mais fidèle des *Éclaicissements plus détaillés* [15]. Nous y aborderons tout d'abord la traduction de notre perception de la propagation du son en concepts mathématiques : c'est le passage du monde sensoriel au monde de la physique. Puis nous y dériverons l'équation différentielle qui régit l'évolution spatio-temporelle des particules d'air mises en mouvement par la génération d'un son ; cette équation, accompagnée de conditions initiales et de conditions aux limites renferme toute la connaissance physique du problème. Les solutions de cette équation différentielle partielle seront ensuite calculées par une méthode analytique et une méthode géométrique ; la résolution géométrique ne serait plus utilisée aujourd'hui, mais la beauté que nous lui voyons justifie que nous la présentions. Enfin, la formation de l'écho y sera expliquée sur les bases des développements théoriques des parties précédentes : ce sera le retour du monde de la physique au monde sensoriel. La troisième partie de cet article abordera la question de la vocation du physicien, intimement liée aux lois universelles que la nature semble montrer aux scientifiques.

2 L'invention du concept d'onde

2.1 Le contexte scientifique

En 1759, Euler présente un mémoire intitulé *De la propagation du son* [12] qui commence ainsi :

> 1. Les Physiciens aussi bien que les Géomètres se sont donnés bien de la peine pour expliquer comment le son est transmis par l'air, mais ils faut avouer que la théorie en a été jusqu'ici fort incomplète. [...] et nous ne saurions nous vanter de comprendre la propagation du son, à moins que nous ne fussions en état d'expliquer clairement, comment ces ébranlements sont engendrés et transmis dans l'air. [...]
>
> 3. [...] J'aurai donc l'honneur d'expliquer ici la méthode qui me semble la plus propre pour cette recherche ; mais, quelque simple qu'elle puisse paraître, je dois protester qu'elle ne me serait pas venue dans l'esprit, si je n'avais pas vu l'ingénieuse analyse de M. de la Grange. Il y a une circonstance qui nous arrêterait tout court, si l'Analyse n'était applicable qu'à des quantités continues, ou dont la nature puisse être représentée par une courbe régulière, ou renfermée dans une certaine équation. Ce n'est donc que l'adresse d'introduire des quantités discontinues dans le calcul qui nous peut conduire à la solution cherchée ; et cela se peut faire d'une manière semblable à celle dont j'ai déterminé le mouvement d'une corde à laquelle on aura donné au commencement une figure quelconque inexplicable par aucune équation [2].

Ces deux extraits présentent le contexte scientifique dans lequel les travaux d'Euler sur la propagation du son dans l'air ont été publiés : 1) Euler considère le son comme des « ébranlements »de l'air ; comprendre la propagation du son c'est alors comprendre comment ces ébranlements se propagent dans l'air ; 2) les travaux de Lagrange ont motivé ceux d'Euler ; 3) Euler base ses développements sur une analogie entre le problème des cordes vibrantes et celui de la propagation du son dans l'air ; 4) Euler soulève une difficulté : ses travaux sur les cordes vibrantes font appel à des quantités discontinues et à des courbes irrégulières, ce qui l'a notamment fermement opposé à d'Alembert.

Euler a travaillé très tôt sur la propagation du son puisqu'il a publié sa *Dissertatio physica de sono* [8] en 1727 à Bâle. Ce n'est qu'en 1759 qu'ont été rédigés les trois mémoires *De la propagation du son* [12], *Supplément aux recherches sur la propagation du son* [13] et *Continuation des recherches sur la propagation du son* [14]. Euler avait un programme pour la mécanique : perpétuer la tradition qui remonte à ses prédécesseurs Descartes, Leibniz et Newton, et qui consiste à développer simultanément les mathématiques et la mécanique avec une préférence pour les développements qui reposent sur une base mathématique bien établie [24]. Tout au long de ses travaux sur la

2. Voir [10].

propagation du son dans l'air, Euler est resté fidèle à son programme et c'est finalement le concept de ce que nous appelons aujourd'hui une onde qui a été inventé pour expliquer le phénomène naturel de la propagation du son dans l'air.

2.2 1748 : début de la controverse au sujet de la théorie des cordes vibrantes

La théorie des cordes vibrantes est détaillée dans ([26] §§33–42) ; on peut trouver une étude récente sur la question des cordes vibrantes dans les travaux de d'Alembert dans [17] ; la controverse qui éclata sur la question des cordes vibrantes et qui opposa principalement Euler à d'Alembert entre 1748 et leur mort en 1783 est abordée dans l'introduction à la correspondance Euler-d'Alembert dans les *Opera omnia* [16]. Nous en donnons ici un bref aperçu pour deux raisons : tout d'abord, les équations qui gouvernent la propagation du son dans l'air sont déterminées par Euler de façon analogue à celles qui décrivent le mouvement des cordes vibrantes ; ensuite, cette polémique a engendré de mauvaises relations entre Euler et d'Alembert qui peuvent aider à comprendre la rédaction des trois mémoires d'Euler sur la propagation du son dans l'air [12] [13] [14] pendant les seuls deux ou trois derniers mois de l'année 1759.

La première solution du problème des cordes vibrantes a été donnée par d'Alembert en 1747 avec la présentation de ses deux mémoires, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibrations* et *Suite des recherches* [1] [2]. Une addition à ces mémoires a ensuite été rédigée [3]. Dans ses premiers travaux, d'Alembert imposait que la forme initiale de la corde soit décrite par des fonctions « continues ».

Dans les lettres qu'il envoie à Euler datées du 3 août 1746 et du 6 janvier 1747 [16], d'Alembert mentionne respectivement ses *Recherches* et sa *Suite des recherches*. En 1748, Euler avait certainement pris connaissance des travaux de d'Alembert lorsqu'il présente un mémoire intitulé *Sur la vibration des cordes* [10]. Ce mémoire, apparemment peu différent de celui rédigé par d'Alembert un an plus tôt, présente en réalité une différence importante qui est à l'origine d'une controverse entre les deux savants : Euler n'impose aucune restriction à la forme initiale de la corde qui peut en particulier être décrite par des fonctions « discontinues ». Truesdell écrira ([26] §34) que, lorsqu'il écrivait $y = f(x)$, d'Alembert pensait toujours à une expression analytique alors qu'Euler y voyait une courbe tracée graphiquement.

Selon la terminologie de l'époque, une « courbe discontinue »ou « courbe mécanique »ou encore « courbe tracée librement à la main »est à peu près ce qu'on appellerait aujourd'hui une courbe infiniment dérivable par morceaux. Par exemple, une ligne droite brisée est « discontinue »— au sens ancien — puisqu'elle est décrite par deux relations analytiques différentes. Truesdell ([26] §33) considère que cette nécessaire continuité demandée par d'Alembert est la conséquence de la *loi de continuité*, que l'on trouve dans la philosophie naturelle de Leibniz, et selon laquelle seule une fonction continue peut être solution d'un problème physique. Toujours selon Truesdell ([26] §34), Euler et d'Alembert avaient tous deux conscience du fait que la validité de la *loi de continuité* de Leibniz était en jeu dans les développements de la théorie des cordes vibrantes ; et c'est selon lui la seule raison scientifique pour laquelle la querelle entre les deux hommes est née et a duré jusqu'à leur mort.

Pour illustrer à quel point les relations entre Euler et d'Alembert ont pu être tendues, mentionnons la lettre du 10 septembre 1751 [16] dans laquelle d'Alembert reproche de façon indirecte, mais vive, à Euler d'être responsable de son échec au concours de prix de l'académie de Berlin de 1750. À la suite de cette lettre, la correspondance directe entre Euler et d'Alembert a été interrompue jusqu'en 1763, année durant laquelle d'Alembert, en visite à Potsdam, rendit visite à Euler. Le passage ci-dessous, extrait de la lettre d'Euler à Lagrange du 2 octobre 1759 [16], montre que les deux hommes ont continué à s'affronter sur la question des cordes vibrantes, malgré l'interruption de leur relation directe :

> J'ai appris avec plaisir que vous approuviez ma solution relative aux cordes vibrantes, que d'Alembert s'est efforcé de réfuter par divers sophismes. Il a annoncé qu'il en publierait une accablante réfutation ; j'ignore s'il l'a fait. Il croit qu'il pourra jeter de la poudre aux yeux avec son éloquence de demi-savant. Je doute qu'il joue ce rôle sérieusement, à moins qu'il ne soit profondément aveuglé par l'amour-propre. Il a voulu insérer dans ses Mémoires non une démonstration, mais une simple déclaration suivant laquelle ma solution était très défectueuse ; pour ma part, j'ai proposé une nouvelle démonstration possédant toute la rigueur voulue.

2.3 Les trois mémoires d'Euler de 1759 sur la propagation du son dans l'air

Euler a présenté, entre le 1er novembre et fin décembre 1759, les trois mémoires [12], [13] et [14], sur le problème de la propagation du son dans l'air, de nombreuses années après avoir publié ses premiers travaux sur la propagation du son. Il est difficile de comprendre ce qui a motivé la rédaction apparemment soudaine de ces trois mémoires, car plusieurs interprétations sont données. Nous commençerons par rappeler les faits et donnerons ensuite l'interprétation de Truesdell ([27] Part K) et celle des éditeurs de la correspondance entre Euler et Lagrange dans les *Opera omnia* [16].

Les faits

Euler a rédigé ces mémoires dans le contexte tourmenté de la querelle qui l'avait vivement opposé à d'Alembert une dizaine d'années plus tôt sur la question des cordes vibrantes et dont nous venons de donner les grandes lignes.

La lettre qu'Euler adresse à Lagrange le 2 octobre 1759 [16] contient les éléments suivants :

— Lagrange a envoyé à Euler un exemplaire du tome 1 de ses *Miscellanea philosophico-mathematica* qu'Euler n'a pas encore reçu au moment de sa réponse (la guerre de Sept Ans alors en cours est évoquée) mais pour lequel il remercie par avance Lagrange ;

— Euler évoque la mort récente de Maupertuis, président de l'académie des sciences de Berlin et « le bruit court que la place de président serait attribuée à d'Alembert » ;

— Euler « [a] appris avec plaisir que [Lagrange approuvait sa] solution relative aux cordes vibrantes ».

Le 23 octobre 1759, Euler adresse une nouvelle lettre à Lagrange [16] dans laquelle on apprend :

— qu'il a reçu le tome 1 des *Miscellanea philosophico-mathematica*, contenant trois mémoires de Lagrange dont ses *Recherches sur la nature et la propagation du son* [18], après la lecture desquelles Euler écrit à Lagrange : « Je vous suis infiniment obligé d'avoir mis ma solution à l'abri de toutes chicanes et c'est après vos profonds calculs que tout le monde doit à présent reconnaître l'usage des fonctions irrégulières et discontinues dans la solution de ce genre de problème » ;

— qu'il a recommencé à travailler sur la propagation du son :

> Je passe à la propagation du son, dont je n'ai jamais pu venir à bout, quelques efforts que je me sois donnés [...]. J'ai donc lu votre Mémoire sur cette matière avec la plus vive satisfaction, et je ne puis assez admirer votre sagacité en surmontant tous les obstacles. À présent je vois bien qu'on pourrait tirer la même solution de [l'équation d'onde unidimensionnelle (en termes modernes)] en faisant usage des fonctions discontinues ; mais alors M. d'Alembert me ferait les mêmes objections que contre le mouvement des cordes : ce n'est qu'après vos

recherches que je pourrai faire valoir cette méthode.

Précisons ici que les travaux de Lagrange sur la propagation du son étaient basés sur l'idée que « le mouvement d'une fibre sonore dont les particules élastiques se touchent mutuellement doit être comparé à celui d'une corde vibrante correspondante »[18] ;

— que la rédaction des trois mémoires [12], [13] et [14] sur la propagation du son dans l'air est déjà bien avancée.

Les interprétations contradictoires de Truesdell ([27] Part K) *et des éditeurs de la correspondance Euler-Lagrange dans les* Opera omnia [16] *:*

D'après Truesdell, l'importance qu'Euler accorde aux travaux de Lagrange vient du fait qu'il a trouvé chez lui un appui solide pour se défendre contre d'Alembert. Sans que Truesdell l'écrive explicitement, on comprend qu'il considère que les mémoires [12], [13] et [14] étaient prêts bien avant la fin de 1759, mais qu'Euler était resté prudent vis-à-vis de d'Alembert, et cela d'autant plus que ce dernier semblait jouir des faveur de Frédéric II pour succéder à Maupertuis à la présidence de l'académie des sciences de Berlin dont dépendait alors Euler. Il semble de plus que Truesdell voit chez Euler une volonté de — comme on dirait aujourd'hui — *lancer* le jeune Lagrange.

Les éditeurs de la correspondance Euler-Lagrange dans les *Opera omnia* ont choisi de critiquer la position de Truesdell qu'ils qualifient d'« excessive »([16], lettre 12, note 7). Pour appuyer leur critique, ils citent un extrait de la lettre d'Euler à Lambert du 25 avril 1761 :

> Je suis surpris que vous n'ayez pas encore vu le premier volume des *Miscellanea Philosophico-Mathematica* Societatis Privatea à Turin où les profondes recherches de M. de la Grange sur la propagation tant du son que de la lumière se trouvent. L'analyse en est tout à fait nouvelle et tirée des premiers principes du mouvement et j'ose vous assurer que vous en serez très contents, quoique l'Auteur ne l'applique qu'à la propagation linéaire ; mais j'ai ensuite trouvé moyen de l'appliquer à la propagation en tous sens selon les trois dimensions...

Il est donc difficile de savoir ce qui a réellement motivé Euler a présenter ses mémoires [12], [13] et [14] dans les deux ou trois derniers mois de l'année 1759 : A-t-il été fortement inspiré par les travaux récents de Lagrange et notamment son analogie avec le problème des cordes vibrantes ? A-t-il vu en Lagrange un soutien prometteur qui lui permettrait de mettre sa théorie hors d'atteinte des attaques de d'Alembert ? Quoi qu'il en soit, ces trois mémoires marquent le retour d'Euler dans la recherche sur la propagation du son dans l'air ; Euler n'a pas cédé aux critiques de d'Alembert et reprend l'idée de fonctions discontinues et irrégulières pour résoudre ce problème, comme il l'avait déjà fait pour les cordes vibrantes.

2.4 Continuation de la querelle sur les cordes vibrantes : 1759-1765

Entre 1759 et 1765, la controverse sur la théorie des cordes vibrantes était toujours d'actualité comme le montrent de nombreuses lettres échangées entre Lagrange et d'Alembert entre 1762 et 1765 [19]. Les lettres sont courtoises et témoignent des bonnes relations entre les deux savants, sans toutefois qu'ils tombent d'accord sur les limitations à imposer à la forme initiale des cordes vibrantes :

> [Lettre de Lagrange à d'Alembert du 13 novembre 1764.] Vous avez raison de dire que mon théorème sur les cordes vibrantes vous donne gain de cause par rapport à la continuité des branches de la courbe génératrice lorsque la courbe initiale est assujettie à une équation. [... Je] puis vous assurer que je ne suis pas peu content de m'être rapproché de vous sur ce point. Au reste, ma solution n'exigeant pas que la courbe initiale puisse s'exprimer par une équation, elle aura toujours lieu quelle que puisse être cette courbe, pourvu que les conditions dont je vous ai parlé s'y trouvent remplies.
>
> [Lettre de d'Alembert à Lagrange du 12 janvier 1765.] Nous voilà donc d'accord sur les cordes vibrantes, au moins quand la courbe initiale est exprimée par une équation. Il me semble qu'à plus forte raison nous devons l'être quand cette courbe n'a pas d'équation [...].

Lagrange a admis que quelques restrictions devaient être imposées à la forme initiale de la corde vibrante pour pouvoir résoudre le problème, mais sans aller, comme d'Alembert, jusqu'à imposer qu'elle soit continue. De son côté, Euler n'a jamais pu démontrer que la forme initiale de la corde peut être quelconque, ce qu'il continue cependant d'accepter dans les *Éclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'écho* qu'il présente à Berlin en 1765.

Pour terminer cette partie, reprenons un passage de la lettre que Lagrange a adressée à d'Alembert le 20 mars 1765 [19] et dans laquelle il semble vouloir mettre un terme à leur discussion sur les cordes vibrantes : « À l'égard de [notre discussion] sur les cordes vibrantes, elle est maintenant réduite à un point qui échappe, ce me semble, à l'Analyse. »Avec nos connaissances actuelles, nous savons qu'Euler avait raison de permettre à la corde d'avoir une forme initiale quelconque, sauf aux bords du problème où il faut parfois « corriger »la solution ; mais, à l'époque de ses travaux, l'Analyse n'était pas assez développée pour qu'il puisse mettre son point de vue au-delà de tout soupçon. Enfin, l'avenir semble avoir donné raison à Euler sur un autre point d'une grande importance dans le développement de la physique : comme le précise Truesdell ([27] Part L), ce qu'Euler appelait « courbe discontinue »correspond aujourd'hui au concept d'onde.

Le contexte dans lequel Euler est finalement parvenu à développer — à peu de choses près — la théorie moderne de la propagation unidimensionnelle du son dans l'air est maintenant clarifié. Nous pouvons alors nous consacrer à l'étude du dernier mémoire dans lequel il l'a présentée [15], et comprendre plus en détails de quoi il s'agit.

3 Les *Éclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son*, ou le mouvement de l'air soumis au calcul

3.1 Du monde sensoriel au monde de la physique

Il s'agit de la première étape dans la résolution d'un problème de mécanique : simplifier, conceptualiser le monde tel que nous le percevons, afin de le soumettre ensuite au calcul. Pour cela, il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance expérimentale de la propagation du son. L'état de ces connaissances a été fait par Truesdell ([27], Part A) : 1) d'après les points de vue d'Aristote, Galilée, Hooke et Newton, un milieu palpable, communément l'air, est nécessaire à la propagation du son, et le son consiste en des condensations et raréfactions de ce milieu ; 2) au début du dix-huitième siècle, on pensait que la vitesse du son était constante, quels que soient l'intensité avec laquelle le son est généré, sa fréquence et l'état atmosphérique, exception faite du vent [3].

Définition du système dynamique étudié

Cas unidimensionnel. Dans ses *Éclaicissements plus détaillés* [15], Euler considère la propagation du son dans un tuyau droit, c'est-à-dire une seule étendue de l'air selon une ligne droite. Il justifie cette simplification en précisant qu'il a « déjà fait voir que la propagation se fait à peu près de la même manière dans le plein air que dans un tuyau »puis qu'« il n'importe

3. Voir à ce sujet l'essai de François Baskevitch publié dans cet ouvrage.

presque rien, si ces tuyaux sont droits ou courbés d'une manière quelconque, puisque les phénomènes du son n'en souffrent aucun changement »([15] §3). Euler a étudié les cas de la propagation du son dans des espaces à deux ou trois dimensions dans ses mémoires [13] et [14]. Dans le cas unidimensionnel auquel nous nous intéressons ici, Euler considère l'air dans un tuyau rectiligne cylindrique de longueur infinie, auquel il donne le diamètre ϕ. L'aire d'une section transversale du tuyau est donc $A = \pi\frac{\phi^2}{4}$.

Quantités infinitésimales. Euler considère l'air comme un milieu continu et n'en étudie qu'un volume infinitésimal : dans le cas 1D particulier à cette étude, il s'agit d'une couche d'air à la position s, d'épaisseur infinitésimale ds et de section d'aire A. Le recours à des quantités infinitésimales permet de libérer l'air de ses particularités et de le réduire à un système très général, présentant des propriétés physiques propres et soumis à des actions extérieures $p(s)$ (Fig. 2). « C'est uniquement en passant à l'observation [des] phénomènes pendant un temps infiniment petit (loi différentielle) que Newton arrive à dégager les formules s'appliquant à des mouvements quelconques »([7] p. 161). De la même façon, Euler n'étudie le système que pendant un temps infinitésimal, ce qui permet notamment de l'étudier comme un système statique.

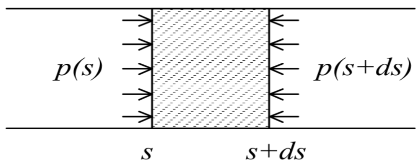

Figure 2 – Système étudié : un volume infinitésimal d'air dans un tuyau, pendant un temps très court.

Propriétés mécaniques. Euler attribue à cette couche d'air infinitésimale une masse et une densité. Il fait l'hypothèse que cette densité est proportionnelle aux pressions/dépressions $p(s)$ exercées de part et d'autre de la couche d'air. Une autre approche consisterait à donner à l'air des propriétés élastiques qui permettent de calculer les déformations de la couche d'air comme proportionnelles aux efforts qui s'y appliquent.

Actions extérieures. Euler distingue plusieurs types de forces qu'il définit de la même façon que l'avait fait Newton auparavant : « la force qui réside dans la matière (*vis insita*) [appelée « force d'inertie »par Euler] est le pouvoir qu'elle a de résister ; c'est par cette force que tout corps persévère de lui même dans son état actuel de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite »et « la force imprimée (*vis impressa*) [simplement appelée « force »par Euler] est l'action par laquelle l'état du corps est changé, que cet état soit le repos ou le mouvement uniforme en ligne droite »([6] p. 192-193). La force d'inertie est proportionnelle à la masse ; les forces $F(s)$ appliquées à la couche d'air infinitésimale sont proportionnelles à la pression de l'air dans le tuyau, de sorte que $F(s) = A \cdot p(s)$.

État d'une particule d'air dont l'équilibre est troublé

Le système étudié étant défini, il s'agit maintenant de caractériser son état afin de pouvoir suivre l'évolution spatio-temporelle des particules d'air qui le constituent. Pour cela, Euler définit les variables d'état suivantes (nous indiquons les unités que nous avons adoptées entre crochets) : sa position s $[m]$, sa vitesse v $[m.s^{-1}]$ et sa densité ρ $[kg.m^{-3}]$. L'état d'une particule d'air dépend de sa position au repos x et du temps t : les fonctions $s = s(x, t)$, $v = v(x, t)$ et $\rho = \rho(x, t)$ sont des fonctions à deux variables. La figure 3 représente : a) la position d'une particule d'air au repos ($t = 0^-$), b) après perturbation initiale ($t = 0^+$) et c) à un instant t positif quelconque. Au repos, la vitesse $v(x, 0^-)$ est nulle et la densité de l'air est $\rho(x, 0^-) = R$ en tout point du tuyau. Initialement, l'équilibre de l'air est troublé par une perturbation quelconque — pour d'Alembert la perturbation ne pouvait pas être quelconque — qui a pour effet de modifier la position des particules d'air : $s(x, 0^+) = x + s_0(x)$, leur vitesse : $v(x, 0^+) = v_0(x)$ et la densité de l'air : $\rho(x, 0^+) = \rho_0(x)$. Les particules d'air ainsi mises en mouvement se déplacent ensuite de la quantité $u(x, t)$. Dans la théorie des cordes vibrantes, on trouve un déplacement analogue sauf qu'il se fait perpendiculairement à la corde alors qu'ici le déplacement est parallèle à l'axe du tuyau.

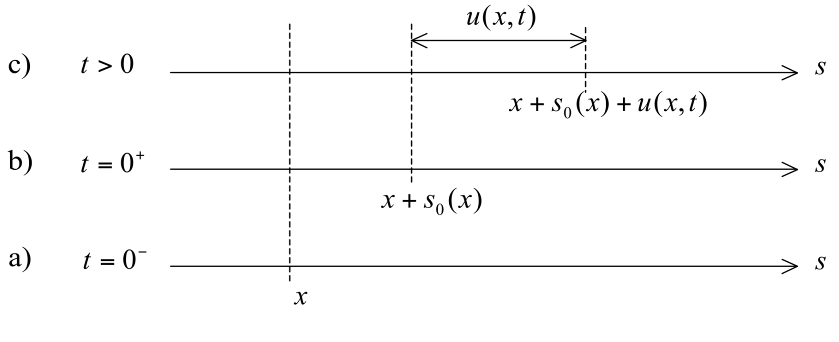

FIGURE 3 – Position d'une particule d'air dans le tuyau : a) au repos ; b) initialement, quand l'équilibre de l'air est perturbé ; c) après perturbation initiale.

Pour conclure cette partie. L'air est considéré comme un fluide qui présente une inertie due à sa masse et une densité dépendant des pressions extérieures auxquels il est soumis. Euler ne considère qu'un volume infinitésimal d'air en équilibre statique pendant un temps infinitésimal : cette approche est à la base du calcul différentiel. L'état d'une particule d'air est caractérisé par sa position s, sa vitesse v et sa densité ρ. Enfin, l'analogie avec le problème des cordes vibrantes est esquissée dans ces premiers développements. Tout ce qui vient d'être présenté reprend avec des notations modernes le développement d'Euler dans [15]. Cette démarche constitue aujourd'hui encore le point de départ de toute modélisation dans le cadre de la mécanique classique.

3.2 Équation différentielle du mouvement de l'air

La deuxième étape dans la résolution d'un problème de mécanique classique consiste à caractériser les changements d'état du système dans le temps. Cette caractérisation peut se faire en dérivant l'équation différentielle qui régit l'évolution du système, à partir des principes de la mécanique. C'est ce que nous présentons ici.

Principe de conservation de la masse

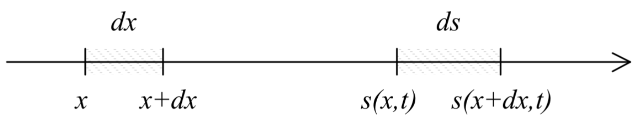

FIGURE 4 – Transport d'un volume infinitésimal dx.

Le premier principe auquel fait appel Euler est celui de la conservation de la masse : la masse d'une couche d'air à un temps t quelconque est supposée égale à la masse de cette couche d'air au repos. Après la perturbation initiale, la densité est $\rho_0(x)$ dans la couche d'air considérée. Celle-ci a un volume $\Omega_0(x) = A \cdot dx$ et une masse $m_0(x) = \rho_0(x) \cdot \Omega_0(x)$; au temps t, la masse est égale à $m(x,t) = \rho(x,t) \cdot \Omega(x,t)$ avec $\Omega(x,t) = A \cdot ds$. L'épaisseur de la couche d'air considérée — initialement égale à dx — peut varier au cours du temps et est donc notée ds. Afin de relier ds à dx, Euler remarque que $s(x+dx,t) = s(x,t) + \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} dx$, ce qui représenté sur la figure 4, permet de voir que :

$$ds = \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} dx \ . \tag{1}$$

Aujourd'hui, on dirait que le transport du volume infinitésimal se fait selon la relation $ds = J \cdot dx$ où J est le déterminant de la matrice jacobienne (ici un scalaire pour le cas 1D) de la transformation $s : x \mapsto s(x,t)$.

De l'égalité des masses $m_0(x)$ et $m(x,t)$ et de la relation (1), quels que soient la position de la couche d'air et le temps, Euler déduit finalement la relation (**ingrédient 1**) :

$$m_0(x) = m(x,t) \quad \Longrightarrow \quad \rho_0(x) = \rho(x,t)\frac{\partial s(x,t)}{\partial x} \ . \tag{2}$$

Principe fondamental de la dynamique

Le principe de la dynamique permet à Euler de mettre en équivalence les forces qui s'appliquent sur une couche d'air d'épaisseur infinitésimale et l'accélération de cette couche d'air. Ce au principe, exprimé de façon moderne, impose l'égalité entre, d'une part, le produit de la masse de la couche d'air considérée et de son accélération $a(x,t)$ et, d'autre part, la somme des forces $F(x,t)$ qui s'appliquent sur la couche d'air (voir Fig. 2), on obtient l'équation différentielle :

$$\rho(x,t)ds\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = p\left(s(x,t)\right) - p\left(s(x+dx,t)\right) \tag{3}$$

où $p(x,t)$ est la pression de l'air dans le tuyau. En introduisant alors la relation (2) qui traduit la conservation de la masse, il vient (**ingrédient 2**) :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0(x)}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \ . \tag{4}$$

Cette relation traduit l'équilibre dynamique d'un volume infinitésimal d'air.

Euler fait appel à ce qu'on appelle principe fondamental de la dynamique ou deuxième loi de Newton. Dans les *Principia*, Newton a développé une théorie générale de la dynamique. Le nom de Newton est resté, mais des historiens et philosophes des sciences mettent en avant l'importance des travaux d'Euler dans la mise en place du principe fondamental de la dynamique : Euler est « l'auteur véritable de ce que nous appelons la seconde loi de Newton, $F = ma$ »([23] p. 54). On trouve dans les travaux de Truesdell au moins deux raisons de soutenir cette affirmation. D'une part, Truesdell a démontré comment la définition de la masse donnée par Euler a fait avancer la mécanique de Newton [25]. D'autre part ([26] §35), il montre qu'Euler est le premier a avoir vu la portée universelle de la deuxième loi de Newton. Euler présente le 3 septembre 1750 un mémoire intitulé *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* [11] qui modifie complètement la mécanique, à commencer par les travaux d'Euler lui-même, qui, toujours d'après Truesdell, n'a ensuite plus jamais dérivé les équations qui gouvernent les systèmes mécaniques qu'il a étudiés autrement qu'en utilisant le principe fondamental de la mécanique.

Équation différentielle du mouvement

Euler introduit ensuite un troisième ingrédient pour écrire l'équation qui gouverne l'évolution temporelle du volume infinitésimal d'air considéré : il considère que la pression de l'air est proportionnelle à sa densité (**ingrédient 3**) :

$$p(x,t) = \alpha \cdot \rho(x,t) \quad , \quad \alpha \text{ étant une constante positive.} \tag{5}$$

Considérant alors l'équation de conservation de la masse (**ingrédient 1**), il vient $\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha \frac{d\rho_0}{dx}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{-1} - \alpha\rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{-2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$. En introduisant cette relation dans l'équation (4) (**ingrédient 2**) et en multipliant, pour se débarrasser des puissances négatives, l'équation ainsi obtenue par $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$ à gauche et à droite, Euler obtient finalement l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \frac{\alpha}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dx}\frac{\partial s}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \ . \tag{6}$$

Euler ne parvient pas à résoudre cette équation : « quelque simple que paraisse le cas que je me suis proposé, où il ne s'agit que du mouvement de l'air contenu dans un tuyau de même largeur par toute son étendue, il est pourtant encore de beaucoup trop compliqué, pour que les bornes de l'Analyse soient suffisantes à le résoudre »([15] §10). Il remarque néanmoins qu'il pourrait intégrer l'équation (6) à la condition que $\frac{\partial s}{\partial x} \approx 1$. Euler fait alors un retour prématuré dans le monde sensoriel pour justifier cette hypothèse qui est vérifiée lorsque la position des particules d'air varie peu par rapport à la position initiale :

$$s \approx x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial x} \approx 1 \ . \tag{7}$$

Ceci conduit à une reformulation moins générale du problème qu'Euler se propose de résoudre : « L'état d'équilibre de l'air dans le tuyau [...] ayant été troublé d'un manière quelconque, *pourvu que les dérangements soient extrêmement petits*, déterminer le mouvement de l'air qui en sera causé dans le tuyau »([15] §17).

Euler reprend ensuite son développement dans le monde de la physique où il décompose le déplacement de sorte que la relation cinématique suivante soit respectée (**ingrédient 4**) :

$$s(x,t) = x + s_0(x) + u(x,t) \tag{8}$$

où (Fig. 3) x est la position des particules d'air au repos, $s_0(x)$ est une perturbation initiale de la position de repos et $u(x,t)$ est le champ de déplacement des particules d'air autour de leur position après perturbation initiale. Avec cette hypothèse : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{d^2 s_0}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Ceci pris en compte permet d'écrire l'équation (6) sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} - \frac{d^2 s_0}{dx^2} \right) = 0 \ . \tag{9}$$

Euler considère ensuite la compatibilité entre la densité initiale $\rho_0(x)$ et le déplacement initial $s_0(x)$. Comme, pour $t \leq 0^+$, $u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, il vient, d'après l'équation (9) :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} - \frac{d^2 s_0}{dx^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_0(x) = \int_0^x ln \frac{\rho_0(\xi)}{R} d\xi \tag{10}$$

où on rappelle que R est la densité de l'air au repos dans le tuyau.

Finalement, Euler aboutit à l'équation différentielle qu'on appellerait aujourd'hui équation d'onde dans le cas unidimensionnel :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \ . \tag{11}$$

Cette équation est analogue à celle déjà connue pour le problème des cordes vibrantes, problème auquel d'Alembert avait déjà présenté une solution en 1747 [1] [2], puis Euler un an plus tard [10]. La seule différence vient du fait que $u(x,t)$ est un champ de déplacement parallèle à l'axe du tuyau dans le cas de la propagation du son dans l'air, alors que ce serait un champ de déplacement perpendiculaire à une corde vibrante.

3.3 Résolution de l'équation différentielle

La troisième étape dans la résolution d'un problème de mécanique classique consiste à résoudre l'équation différentielle qui régit le système afin de caractériser son évolution spatio-temporelle. Dans les *Éclaircissements* [15], Euler donne une solution analytique ainsi qu'une solution géométrique à l'équation d'onde unidimensionnelle (11). Aujourd'hui, des méthodes de discrétisations temporelle et spatiale ont été développées pour permettre de résoudre les équations différentielles de façon approchée, mais presque exacte, par ordinateur. Le recours à l'ordinateur permet de modéliser des fluides ou des structures avec des géométries et des actions dynamiques extérieures compliquées, et a ainsi fait entrer les théories de la mécanique classique dans nos quotidiens : une grande partie des objets que nous utilisons quotidiennement est en effet étudiée par ce type de modélisation avant fabrication.

Solution analytique

Par analogie avec ses travaux sur le mouvement des cordes vibrantes [10], Euler donne la solution générale analytique de l'équation différentielle (11) :

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \ . \tag{12}$$

La constante $c = \sqrt{\alpha}$ est la vitesse du son dans l'air et les fonctions f et g sont à déterminer à partir des conditions initiales du problème : $s(x,0^+) = x$, $v(x,0^+) = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{t=0^+} = v_0(x)$ et, d'après l'équation (2), $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_{t=0^+} = \frac{\rho_0(x)}{\rho(x,0^+)} = 1$. Euler en déduit une solution qui ne dépend que des conditions initiales, celles-ci étaient pour Euler quelconques dans la mesure où les déplacements d'air génèrés restaient petits, contrairement à ce que défendait d'Alembert :

$$\begin{aligned} f(x+ct) &= \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} v_0(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int_0^{x+ct} \ln\frac{\rho_0(\xi)}{R}d\xi \ ; \\ g(x-ct) &= -\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} v_0(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int_0^{x-ct} \ln\frac{\rho_0(\xi)}{R}d\xi \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Solution géométrique

Afin de donner une solution géométrique au problème de la propagation du son, Euler trace, de façon arbitraire, les courbes représentatives des fonctions $c \cdot \ln\frac{\rho_0(x)}{R}$ et $v_0(x)$ qui apparaissent dans les équations (13) et qu'il nomme « échelle des densités »et « échelle des vitesses »(Fig. 5). Euler utilise la propriété qui consiste à voir l'intégrale entre deux bornes a et b des fonctions qu'il utilise comme l'aire sous la courbe représentative de ces fonctions entre les verticales passant par a et b. Cette méthode présente l'avantage de réduire le calcul intégral à des considérations géométriques. Les points O, X, X^-, X^+ de la figure 5 représentent l'origine du tuyau, les positions x, $x-ct$ et $x+ct$; on rappelle que c est la vitesse du son, ct est donc la distance parcourue par le son entre le temps initial $t=0$ et un temps $t>0$ quelconque. Les échelles des densités et des vitesses y sont représentées par les points R^O, R^X, R^-, R^+ et V^O, V^X, V^-, V^+ ; les aires sont caractérisées à l'aide de quatre points définissant leurs contours. Les équations (13) et $s_0(x)$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} f(x+ct) &= \frac{1}{2c}\left(OV^OX^+V^+ - OR^OX^+R^+\right) \ ; \\ g(x-ct) &= -\frac{1}{2c}\left(OV^OX^-V^- + OR^OX^-R^-\right) \ ; \end{aligned}$$

$$s_0(x) = \frac{1}{2c} OR^O XR^X \ . \tag{14}$$

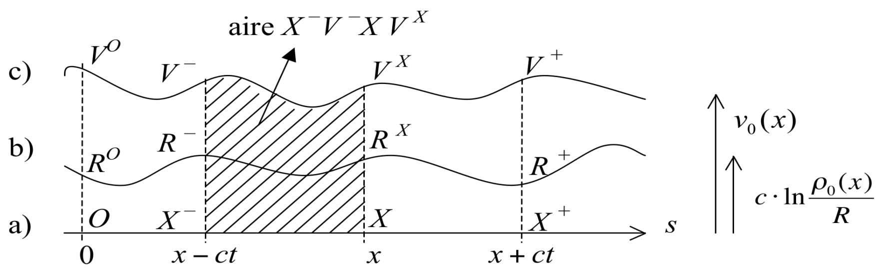

FIGURE 5 – Représentation géométrique arbitraire de l'état de l'air à partir des conditions initiales : a) tuyau ; b) échelle des densités ; c) échelle des vitesses.

L'expression géométrique de la position au temps t de la particule d'air qui était à la position x avant perturbation initiale est ensuite déterminée simplement par additions et soustractions des aires identifiées dans les équations (14) :

$$s(x,t) = x + s_0(x) + u(x,t)$$
$$\Rightarrow s(x,t) = x + \frac{1}{2c}\left(X^-V^-X^+V^+ - XR^XX^+R^+ + XR^XX^-R^-\right) \tag{15}$$

En utilisant ensuite la relation $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, Euler donne aussi l'expression de la vitesse de l'air qui lui sera utile ensuite pour étudier la formation de l'écho [4] :

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(v_0(x+ct) - c \cdot ln\frac{\rho_0(x+ct)}{R} + v_0(x-ct) + c \cdot ln\frac{\rho_0(x-ct)}{R}\right)$$
$$\Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{2}\left(X^+V^+ - X^+R^+ + X^-V^- + X^-R^-\right) \ . \tag{16}$$

Euler détermine ainsi, géométriquement, à partir d'une perturbation initiale quelconque, l'état de l'air dans le tuyau à n'importe quel temps t, dans la mesure où les déplacements des particules d'air restent petits. Les équations (15) et (16) lui donnent le pouvoir de prédire la façon dont un son se propage et il est donc prêt à s'attaquer à la question de la formation de l'écho.

4. Euler donne aussi l'expression de la densité $\rho(x,t)$, mais nous ne le reprenons pas ici par souci de concision.

3.4 Du monde physique au monde sensoriel : explication rationnelle de l'écho

La dernière étape dans la modélisation d'un problème de mécanique est l'étape de validation de la théorie. Ceci nécessite de confronter les prédictions données par le calcul aux observations expérimentales.

Le calcul de la vitesse du son

Il est un point sur lequel la théorie développée par Euler ne permet pas d'expliquer les observations dans le monde sensoriel : le calcul de la vitesse du son c donné par Euler est faux[5]. Mais c'est sans incidence sur le reste des développements, en particulier sur l'explication de l'écho qui nous intéresse ici.

Prise en compte des conditions aux limites du tuyau

Jusqu'à présent, le tuyau était considéré comme infini à gauche et à droite ; mais à ce stade des *Éclaircissements*, Euler prend en compte les conditions aux extrémités — aux limites — du tuyau. Il considère trois cas : 1) un tuyau terminé et ouvert à droite, 2) un tuyau terminé et fermé à droite, et 3) un tuyau terminé des deux côtés. Dans les deux premiers cas, Euler prédit la formation d'un écho unique ; dans le troisième cas, il prédit la formation d'une infinité d'échos. Dans le cas où les extrémités sont ouvertes, il est faux de prédire un écho, mais Euler conclut tout de même que, puisque d'après sa théorie un « écho se forme, lorsque le tuyau est ouvert [...] l'idée de la réflexion ne fournit point la juste explication de ce phénomène, mais que cette explication demande des recherches beaucoup plus profondes »([15] §38). Nous ne considérerons ci-dessous que le deuxième cas où la prédiction d'un écho est justifiée par l'expérience.

Soit le point X^e l'extrémité droite fermée du tuyau (Fig. 6a). Soit l'équilibre de l'air rompu par une perturbation quelconque — ne générant que de petits déplacements d'air — entre les points A et B dans le tuyau (Fig. 6a). La vitesse $v(x^e, t)$ des particules d'air à l'extrémité droite du tuyau doit être nulle car le tuyau est fermé en X^e. Deux cas de figure permettent de vérifier cette condition à la limite :

— puisque l'air n'est pas perturbé à droite du tuyau, l'expression de la vitesse en X^e s'écrit, d'après l'équation (16) : $v(x^e, t) = \frac{1}{2}\,(X^{e-}V^{e-} + X^{e-}R^{e-})$. La perturbation initiale doit donc être telle que $X^{e-}V^{e-} = -X^{e-}R^{e-}$, c'est-à-dire que, dans tout le tuyau, échelle des vitesses et échelle des

5. Voir à ce sujet l'essai de François Baskevitch dans ce même ouvrage.

densités sont opposées. Prenons alors un point X dans le tuyau et supposons qu'il se trouve à droite de la perturbation initiale. Alors, quel que soit t, $v(x,t) = 0$ et aucun son ne sera donc jamais entendu en X. En effet : 1) afin que la condition à la limite $v(x^e, t) = 0$ soit respectée, nécessairement : $X^-V^- = -X^-R^-$, et 2) $X^+V^+ = X^+R^+ = 0$ car il n'y a pas de perturbation initiale à droite de X. En conclusion, ce cas de figure revient à ne considérer que des sons qui se propagent vers la gauche et qui n'atteignent donc jamais l'extrémité droite du tuyau : ce qui est sans intérêt pour notre étude de l'écho ;

— un deuxième cas de figure se présente si on imagine qu'il existe une perturbation à droite du tuyau entre les points b et a, symétriques des points A et B par rapport à l'extrémité du tuyau X^e ($X^eb = BX^e$ et $aX^e = AX^e$), telle que $X^+V^+ = -X^-V^-$ et $X^+R^+ = X^-R^-$ (Fig. 6a)[6]. Euler écrit qu'« il faut bien se garder de s'imaginer que l'agitation ab existe réellement hors du tuyau et [qu'] il ne la faut regarder que comme un moyen propre à nous découvrir les agitations de l'air dans le tuyau, causées par l'agitation initialeAB »([15] §33).

Propagation du son dans le tuyau

Afin de décrire la façon dont le son se déplace dans le tuyau, Euler considère un point X quelconque du tuyau où se place une oreille de l'observateur — nous prenons ce point entre B et X^e, mais il en serait de même pour un point à gauche de A (Fig. 6b) — et détermine comment l'air y est perturbé. Cinq étapes se présentent :

1. $t < \frac{BX}{c}$ (en d'autres termes quand la distance ct parcourue par le son est inférieure à la distance BX qui sépare la perturbation initiale de l'oreille) : rien ne se passe car la vitesse des particules d'air aux points X^- et X^+ est nulle ;
2. $\frac{BX}{c} \leq t \leq \frac{AX}{c}$: les particules d'air au point X^- ne sont plus immobiles (Fig. 6b), mais elles le sont encore au point X^+ et les particules d'air se déplacent donc au point X avec la vitesse :

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(X^-V^- + X^-R^-\right) \tag{17}$$

3. $\frac{AX}{c} < t < \frac{Xb}{c}$: aucun son n'est perçu par l'observateur en X ;
4. $\frac{Xb}{c} \leq t \leq \frac{Xa}{c}$: un deuxième son — un écho — est perçu au point X (Fig. 6c) et les particules d'air se déplacent donc au point X avec la

6. Ou telle que $X^+V^+ = -X^-R^-$ et $X^+R^+ = X^-V^-$, ce qui ne changerait rien au développement qui suit ni aux conclusions qu'on en tire.

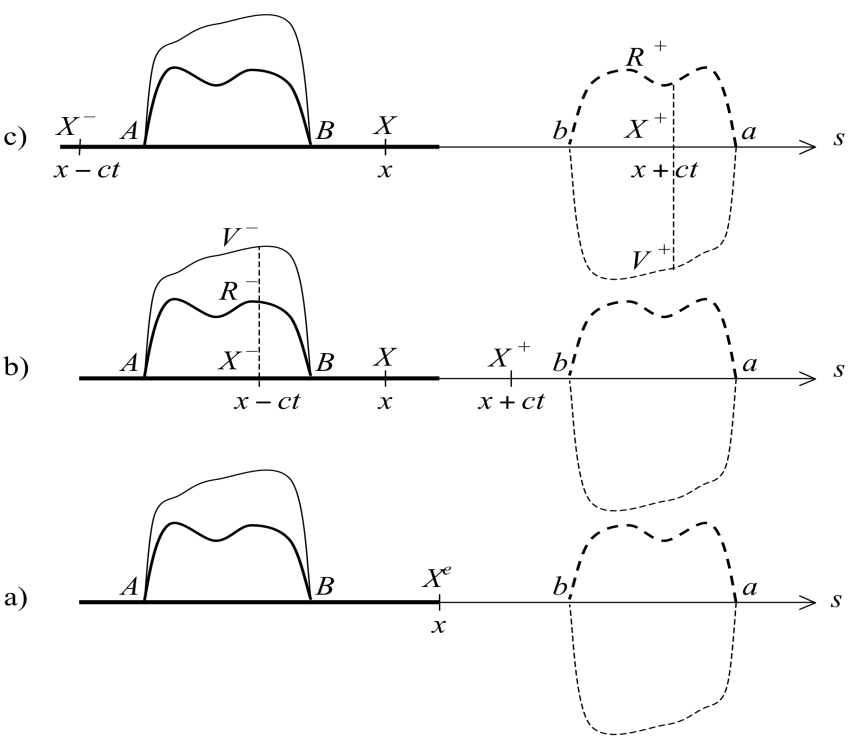

FIGURE 6 – Propagation d'un son dans un tuyau fermé à son extrémité droite (en gras, échelle des densités) : a) perturbations initiales réelles (lignes continues) et imaginaires (lignes discontinues) ($t = 0^+$) ; b) perception à la position x du premier son ($\frac{BX}{c} \leq t \leq \frac{AX}{c}$) ; c) perception à la position x du deuxième son ($\frac{Xb}{c} < t < \frac{Xa}{c}$) : l'écho.

vitesse :

$$v_2 = \frac{1}{2}\left(X^+V^+ - X^+R^+\right) \ ; \tag{18}$$

5. $t > \frac{Xa}{c}$: définitivement plus aucun son ne sera perçu par l'observateur.

Le retour du monde de la physique au monde sensoriel se fait sans difficulté. L'écho est perçu au point X après le temps $t = \frac{Xb}{c}$; or, comme $X^e b = BX^e$, $Xb = BX^e + XX^e$, le temps qui s'écoule entre la perception du premier son et la perception de l'écho correspond au temps $\frac{BX^e}{c}$ mis par la perturbation initiale pour atteindre l'extrémité du tuyau auquel s'ajoute le temps $\frac{XX^e}{c}$ mis par le son pour revenir de l'extrémité du tuyau à l'oreille. De plus, comme nous avons posé $X^+V^+ = -X^-V^-$ et $X^+R^+ = X^-R^-$ afin que la condition à la limite $v(x^e, t) = 0$ soit satisfaite, il vient $v_2 = -v_1$: l'écho vient de la droite alors que le premier son vient de la gauche. Le calcul de $\rho(x,t)$ montrerait que $\rho_2 = \rho_1$, ce qui permet à Euler de conclure que l'écho a les mêmes caractéristiques que le premier son. Ceci est bien conforme à notre perception de l'écho, excepté que l'expérience montre que le son s'atténue nécessairement ; les caractéristiques prédites pour l'écho ne devraient donc pas être identiques à celles du premier son. C'est une limite du modèle proposé par Euler et en fait une limite de la mécanique du dix-huitième siècle qui a été développée essentiellement pour des système conservatifs, c'est-à-dire sans dissipation d'énergie.

4 Lois de la nature et vocation du physicien

Euler conclut les *Éclaircissements* [15] par cette phrase : ≪ C'est ainsi que partout le Créateur a mis l'empreinte de son infinie sagesse, même dans les choses qui en paraissent le moins susceptibles. ≫Il est délicat de chercher à l'interpréter. Un élément de réponse est le milieu religieux dans lequel Euler a grandi [7] et qui a pu faire naître en lui des sentiments religieux profonds.

Cependant, il nous semble qu'un deuxième élément de réponse doit être apporté. Commençons par rappeler que, en nous conformant aux travaux de Truesdell [26], Euler a été le premier à saisir la portée universelle de la deuxième loi de Newton lorsqu'il a présenté sa *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* [11] en 1750. Il a ensuite utilisé ce principe pour résoudre tous les problèmes de mécanique auxquels il s'est attaqué. Euler aurait donc pressenti l'existence de quelques lois simples et universelles permettant d'expliquer beaucoup de phénomènes naturels et, dans ce contexte, il nous semble aujourd'hui naturel d'évoquer l'existence d'une organisation du monde définie par une volonté supérieure. Une éducation religieuse ne saurait, à ce qu'il nous paraît, être nécessaire à cet hommage rendu à l'≪ infinie sagesse du Créateur ≫. Einstein écrira d'ailleurs plus tard : ≪ Cette conviction [l'existence de la vérité scientifique], liée à un sentiment profond d'une raison supérieure, se dévoilant dans le monde de l'expérience, traduit pour moi l'idée de Dieu ≫([7] p. 185).

Euler, notamment par son pressentiment de la portée universelle de la deuxième loi de Newton, a révolutionné la mécanique. Au début du vingtième siècles ont été développées les théories quantiques et relativistes, qui constituent ce qu'on appelle la mécanique moderne pour la différencier de la mécanique classique. Ces deux théories ont elles aussi révolutionné la mécanique, mais on peut encore remarquer, cent cinquante ans après Euler, la foi des savants en l'existence de loi universelles de la nature donnant le pouvoir d'expliquer

7. Voir à ce sujet les repères donnés par Athanase Papadopoulos au début de cet ouvrage.

le monde qui nous entoure et d'accéder ainsi à la vérité scientifique. Trois citations pour illustrer cela. Dans le premier paragraphe de son autobiographie scientifique ([21] p. 67), Max Planck (1858-1947) écrit :

> Ma décision initiale de me consacrer à la science fut le résultat direct de la découverte qui n'a jamais cessé de me remplir d'enthousiasme depuis ma prime jeunesse : la compréhension du fait — qui est loin d'être évident — que les lois de la raison humaine coïncident avec les lois qui gouvernent les suites d'impressions que nous recevons du monde extérieur ; et que par là même le raisonnement pur rend l'homme capable d'atteindre à une connaissance intime du mécanisme de ce monde. À ce point de vue, il est d'une souveraine importance que le monde extérieur soit quelque chose d'indépendant de l'homme, quelque chose d'absolu, et la recherche des lois qui s'appliquent à cet absolu m'apparut comme la plus sublime occupation scientifique que l'on puisse vivre.

Citons aussi Albert Einstein (1879-1955) ([7] p. 20) :

> Le savant, lui, convaincu de la loi de causalité de tout événement, déchiffre l'avenir et le passé soumis aux mêmes règles de nécessité et de déterminisme. [...] Sa religiosité consiste à s'étonner, à s'extasier devant l'harmonie des lois de la nature dévoilant une intelligence si supérieure que toutes les pensées humaines et toute leur ingéniosité ne peuvent révéler, face à elle, que leur néant dérisoire.

Enfin, Henri Poincaré (1854-1912) commence son livre *La Valeur de la science* [22] par :

> La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle. Sans doute nous devons d'abord nous efforcer de soulager les souffrances humaines, mais pourquoi ? Ne pas souffrir, c'est un idéal négatif et qui serait plus sûrement atteint par l'anéantissement du monde. Si nous voulons de plus en plus affranchir l'homme des soucis matériels, c'est pour qu'il puisse employer sa liberté reconquise à l'étude et à la contemplation de la vérité.

Euler n'est certainement pas le premier à avoir pressenti l'existence de lois de la nature : comme le rappelle Kleinert dans l'article qu'il a écrit dans cet ouvrage, « Galilée avait constaté que le livre de la nature était écrit en langage mathématique ». Mais Euler a vu la portée universelle de la deuxième loi de Newton et a donné une écriture mathématique simple à une loi de la nature. Cette écriture simple n'aurait pas pu apparaître sans le développement d'outils mathématiques puissants, dont le calcul variationnel encore couramment utilisé aujourd'hui :

> La puissance mathématique considérable ainsi obtenue [...] a empreint l'utilisation des principes variationnels d'un certain mysticisme, de sorte que certains physiciens tentent généralement d'exprimer toutes les lois physiques par une formulation variationnelle [8] ([4] p. 582).

Et c'est aux travaux d'Euler et de Lagrange qu'on doit le développement du calcul variationnel :

> Le principe de moindre action pour la dynamique des masses ponctuelles [...] est généralement attribué à Maupertuis, mais il n'y a aucun doute qu'il est dû à Euler. [...] Aujourd'hui, il est devenu la clé de voûte dans tous les domaines de la physique. Ce sujet a connu un formidable développement en 1755 quand Lagrange [...] écrivit une lettre à Euler dans laquelle il mettait en évidence un nouveau concept, celui de dérivation variationnelle [9] ([28] p. 35).

À l'issue de ces développements mathématiques, Lagrange pouvait affirmer que sa mécanique analytique avait transformé la mécanique en une simple branche de l'analyse ([23] p. 48) : Euler et Lagrange ont ainsi permis d'écrire le livre de la nature en langage mathématique, et ainsi encouragé les physiciens à rechercher l'expression mathématique de lois qui gouvernent le monde qui nous entoure.

5 Conclusion

Les *Éclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'écho* [15] ont été présentés par Euler à l'Académie de Berlin en 1765. Il s'agit des derniers développements d'Euler sur la théorie de la propagation du son dans l'air dans le cas unidimensionnel et, d'après Truesdell ([27] Part R), « avec cette analyse élégamment simple et entièrement moderne, Euler donne sa forme finale et actuelle à la théorie de la propagation des mouvements infinitésimaux de fluide dans des tubes de

8. « *The notable mathematical power thereby obtained [...] has led to a certain amount of mysticism concerning the use of variational principles, so that physicists generally attemp to express all physical laws in variational form* ».

9. « *The principle of least action for the dynamics of point masses [...] is generally attributed to Maupertuis, but there is no doubt about Euler's priority. [...] Nowadays it has been elevated to a central over-arching principle in all of physics. The subject took a huge jump in 1755, when Lagrange [...] wrote a letter to Euler in which he outlined a new concept, that of variational derivative* ».

diamètre constant, excepté pour les corrections aux bords [10] ». Ces travaux ont été préparés par les trois mémoires également présentés à Berlin par Euler en 1759 : *De la propagation du son* [12], *Supplément aux recherches sur la propagation du son* [13] et *Continuation des recherches sur la propagation du son* [14].

Ces travaux reposent sur une analogie avec le problème des cordes vibrantes. Euler a rédigé ces trois mémoires immédiatement après avoir reçu les encouragements de Lagrange et pris connaissance de ses travaux sur le sujet, alors qu'il se trouvait dans un contexte scientifique délicat. Une dizaine d'années plus tôt, Euler s'était en effet attiré de vives critiques de la part de d'Alembert avec la présentation, en 1748, de ses travaux sur la théorie des cordes vibrantes. d'Alembert avait résolu le problème un an plus tôt en imposant que la forme initiale de la corde soit décrite par des fonctions « continues »[1] [2], selon la terminologie de l'époque ; Euler envisageait quant à lui de recourir à des fonctions « discontinues »[10]. Avec ces travaux sur la propagation du son, Euler considère qu'il a « mis dans tout son jour l'usage des fonctions discontinues, contesté par quelques grands Géomètres, mais qui est absolument nécessaire toutes les fois qu'il s'agit de trouver par intégration des fonctions de deux ou plusieurs variables, et que l'on demande une solution générale »([12] §43). Aujourd'hui, il apparaît que ce qu'Euler appelait « courbe discontinue », correspond au concept d'onde : c'est donc une avancée scientifique de première importance qui a vu le jour à l'occasion de ces travaux sur les cordes vibrantes puis sur la propagation du son dans l'air. À l'époque, admettre des discontinuités revenait à franchir un grand pas : c'était réfuter la *loi de continuité* dans la philosophie naturelle de Leibniz.

À l'issue de la lecture des *Éclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'écho* [15] que nous proposons dans cet article, nous pouvons donc conclure que les travaux d'Euler sur la propagation du son sont modernes. Outre le plaisir intellectuel procuré par la rencontre avec la beauté des travaux scientifiques d'un savant qu'elle occasionne — nous pensons par exemple à la méthode géométrique proposée par Euler pour résoudre l'équation d'onde — cette lecture nous semble utile à quiconque s'intéresse à la mécanique classique aujourd'hui et même, plus largement, aux développements de la physique. En effet, à l'issue de cette lecture, nous comprenons que la mécanique classique repose sur quelques lois simples — conservation de la masse, principe fondamental de la dynamique — et écrites à l'aide des mathématiques. L'application de ces lois permet

10. « *With this elegantly simple and entirely modern analysis, Euler puts the theory of propagation of infinitesimal fluid motions in tubes of equal amplitude into its final and current form, apart from end corrections* ».

d'expliquer et de prédire beaucoup de phénomènes naturels et de comprendre ainsi le monde tel que nous le percevons. Euler semble avoir notamment pressenti le caractère universel de la deuxième loi de Newton [11], et les développements mathématiques qu'il a entrepris permettent d'écrire cette loi sous une forme simple. La recherche de ces lois à caractère universel semble définir aujourd'hui encore la vocation du physicien.

Références

[1] d'Alembert Jean le Rond, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration (1747), *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* **3**, 1749, p. 214–219.

[2] d'Alembert Jean le Rond, Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration (1747), *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* **3**, 1749, p. 220–249.

[3] d'Alembert Jean le Rond, Addition aux recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration (1750), *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* **6**, 1752, p. 355–360.

[4] Birkhoff George David, *The four color problem - Miscellaneous papers*, Collected Mathematical Papers Vol. 3, New York, Dover Publications, 1968.

[5] Calinger Ronald, Euler's "*Letters to a Princess of Germany*" as an Expression of his Mature Outlook, *Archives for History of Exact Sciences*, **15** (3), 1976, p. 211–233.

[6] Dugas René, *Histoire de la mécanique*, Neuchâtel, éditions du Griffon, 1950.

[7] Einstein Albert, *Comment je vois le monde*, Paris, Flammarion, 1979.

[8] Euler Leonhard, *Dissertatio physica de sono*, Bâle, 1727 (E.2) = *Opera omnia* III, 1.

[9] Euler Leonhard, *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* (1731), Saint-Pétersbourg, 1739 (E.33) = *Opera omnia* III, 1.

[10] Euler Leonhard, Sur la vibration des cordes (1748), traduit du Latin, *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* **4**, 1750, p. 69–85 (E.140) = *Opera omnia* II, 10.

[11] Euler Leonhard, Découverte d'un nouveau principe de mécanique (1750), *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* **6**, 1752, p. 185–217 (E.177) = *Opera omnia* II, 5.

[12] EULER Leonhard, De la propagation du son (1759), *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* **15**, p. 185–209, 1766 (E.305) = *Opera omnia* III, 1, p. 428-451.

[13] EULER Leonhard, Supplément aux recherches sur la propagation du son (1759), *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* **15**, p. 210–240, 1766 (E.306) = *Opera omnia* III, 1, p. 452-483.

[14] EULER Leonhard, Continuation des recherches sur la propagation du son (1759), *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* **15**, p. 241–264, 1766 (E.307) = *Opera omnia* III, 1, p. 484-507.

[15] EULER Leonhard, Éclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'écho (1765), *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **21**, p. 335-363, 1767 (E.340) = *Opera omnia* III, 1, p. 540-567.

[16] EULER Leonhard, CLAIRAUT Alexis Claude, D'ALEMBERT Jean le Rond et Lagrange Joseph-Louis, Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange, *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series IV A, volume 5, Birkhäuser, Bâle, 1980.

[17] JOUVE Guillaume, *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez d'Alembert (1755–1783) — Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions*, thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I, 2007.

[18] LAGRANGE Joseph-Louis, Recherches sur la propagation du son, *Miscellanea Philosophico-Mathematica*, tome 1, Turin, 1759.

[19] LAGRANGE Joseph-Louis, D'ALEMBERT Jean le Rond, Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert, *Œuvres de Lagrange*, publiées par J.-A. Serret, Tome treizième, Paris, Gauthier-Villars, 1882.

[20] OVIDE, *Les Métamorphoses, III/356-369*, Paris, Les Belles Lettres, 1980.

[21] PLANCK Max, *Autobiographie scientifique & Derniers écrits*, Paris, Flammarion, 1991.

[22] POINCARÉ Henri, *La Valeur de la science*, Paris, Flammarion, 1948.

[23] STENGERS Isabelle, *L'Invention de la mécanique : pouvoir et raison, Cosmopolitiques II*, Paris, La Découverte, 1997.

[24] SUISKY Dieter, *Euler as Physicist*, Berlin-Heidelberg, Springer, 2009.

[25] TRUESDELL Clifford Ambrose, *Essays in the History of Mechanics*, New York, Springer-Verlag Inc., 1968, p. 114-136.

[26] TRUESDELL Clifford Ambrose, The controversy over small plane vibration of a string of uniform thickness, 1746–1788, *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series II, volumes 11/2, Bâle-Boston-Stuttgart, Birkäuser.

[27] Truesdell Clifford Ambrose, The theory of aerial sound, 1687–1788, *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series II, volume 13, Bâle-Boston-Stuttgart, Birkäuser.

[28] Varadarajan Veeravalli S., *Euler through time : a new look at old themes*, Rhode Island, American Mathematical Society, 2006.