



# Vérification de modèles éléments finis probabilistes par la méthode de l'erreur en relation de comportement

Éric Florentin, Pierre Ladevèze

## ► To cite this version:

Éric Florentin, Pierre Ladevèze. Vérification de modèles éléments finis probabilistes par la méthode de l'erreur en relation de comportement. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812945

**HAL Id: hal-01812945**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01812945>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Vérification de modèles éléments finis probabilistes par la méthode de l'erreur en relation de comportement

**É. Florentin, P. Ladevèze**

*LMT-Cachan  
ENS-Cachan/CNRS/UPMC  
61, avenue du Président Wilson  
94235 Cachan CEDEX - France  
prenom.nom@lmt.ens-cachan.fr*

---

*RÉSUMÉ. Cet article traite des erreurs locales commises sur les contraintes lors d'un calcul E.F. en élasticité linéaire en environnement incertain (matériau, charges...). La technique d'estimation utilisée est basée sur le concept d'erreur en relation de comportement mais peut être étendue à d'autres estimateurs. Le principe est d'abord rappelé puis étendu au cadre stochastique. La méthode développée permet d'obtenir des bornes sur la contrainte avec un niveau donné de confiance. Cette méthode est ensuite illustrée par un cas test.*

*ABSTRACT. This paper deals with local stress errors occurring in linear elastic FE analysis in an uncertain environment (material, loads...). The estimation technique used is based on the concept of error in constitutive relation, but it can be adapted to other estimators. The principle of the method is first reviewed, then extended to the stochastic case. This method yields bounds on the stress with a given confidence level. It is illustrated by a test example.*

*MOTS-CLÉS : Éléments finis, estimation d'erreur a posteriori, erreur locale, stochastique*

*KEYWORDS: finite-element method, a-posteriori error estimation, local error, stochastic.*

---

## 1. Introduction

Dans le cadre stochastique, la simulation est entrée dans une certaine banalisation, tout au moins dans le domaine de la recherche grâce aux méthodes de Karhunen-Loeve et du " chaos polynomial " mises en avant dans [GHA 91, GHA 99]. Par contre, peu de travaux de recherche ont porté sur la vérification de modèles probabilistes [DEB 01]. On notera toutefois les indicateurs d'erreur proposés dans [GHA 02b, GHA 02a] qui ne sont en fait que des indicateurs de sensibilité et qui n'ont donc rien à voir avec ce qui a été construit dans le cadre déterministe. Nous nous proposons dans cet article d'étendre les travaux sur l'erreur locale en contrainte, développés dans [LAD 99, FLO 02] au cadre stochastique pour les problèmes linéaires [LAD 03]. Dans une première partie les équations du problème sont posées, avec notamment celles relatives aux incertitudes sur le modèle. Pour fixer les idées, on se place dans le cadre où les données ne sont pas complètement déterministes. Nous présentons ensuite l'extension au cadre stochastique du concept d'erreur en relation de comportement. Enfin nous illustrons cette nouvelle méthode qui permet d'encadrer une quantité d'intérêt locale, ici la contrainte, avec une probabilité donnée.

## 2. Erreur en relation de comportement

### 2.1. Problème de référence - cadre déterministe

On considère une structure élastique qui occupe un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Les actions de l'environnement sur la structure sont schématisées par :

- un déplacement imposé  $\underline{U}_d$  sur une partie  $\partial_1\Omega$  de la frontière,
- une densité volumique de force  $\underline{f}_d$  donnée dans  $\Omega$ ,
- une densité surfacique de force  $\underline{F}_d$  donnée sur :  $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$ .

On se place en hypothèse des petites perturbations et en régime isotherme. Dans le cadre déterministe, ce problème peut être résolu par la méthode des éléments finis : de nombreuses techniques ont été développées pour traiter la vérification de ce type de problème. Le lecteur pourra trouver un état de l'art en matière de vérification dans [LAD 04, BAB 01, LAD 98]

### 2.2. Problème de référence - Cadre stochastique

Le modèle étudié ici est toujours élastique, mais les données du problème ne sont plus déterministes : *a priori*, les données tant "matériau" que relatives à l'environnement (déplacements imposés, efforts extérieurs imposés...) sont des champs stochastiques. Toutefois, en suivant la démarche classique bâtie sur la méthode de Karhunen-Loeve [KAR 47, LOE 48], il est possible, en pratique de se ramener à des descriptions à base de variables stochastiques en nombre fini. En conséquence, nous supposons que les caractéristiques élastiques s'expriment en fonction de la variable aléatoire vec-

torielle  $\underline{m}(\theta)$  dont la mesure de probabilité est  $dP(\underline{m}(\theta))$ . Ainsi, le tenseur de Hooke s'écrira par exemple :

$$\mathbf{K}(\underline{M}, \theta) = \bar{\mathbf{K}}(\underline{M}) + \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} m_i(\theta) \mathbf{Z}_i(\underline{M}) \quad (1)$$

où  $\bar{\mathbf{K}}$ ,  $m_i(\theta)$ ,  $\{\mathbf{Z}_i \lambda_i\}$  sont respectivement la moyenne de  $\mathbf{K}$ , les composantes du vecteur  $\underline{m}(\theta)$ , les vecteurs propres de l'opérateur de covariance et les valeurs propres pour  $i \in 1, 2, \dots, n$

En suivant [SCH 97, KEE 03], il est assez aisé de prendre en compte la positivité de l'opérateur  $\mathbf{K}$ . Les données relatives à l'environnement sont également supposées dépendre de la variable aléatoire vectorielle  $\underline{d}(\theta)$  dont la mesure de probabilité est  $dQ(\underline{d}(\theta))$ .

En résumé, sont parfaitement connus :

- Le comportement  $\mathbf{K}(\underline{M}, \underline{m})$  ainsi que  $dP(\underline{m}(\theta))$ ,
- L'environnement  $\hat{U}_d(\underline{M}, \underline{d})$ ,  $\underline{f}_d(\underline{M}, \underline{d})$  et  $\underline{F}_d(\underline{M}, \underline{d})$  ainsi que  $dQ(\underline{d}(\theta))$ .

Le problème de référence considéré ici peut alors être formulé de la façon suivante : Trouver un champ de déplacement  $\underline{U}(\underline{M}, \theta)$  et un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}(\underline{M}, \theta)$ , définis sur  $\Omega$ , qui satisfont :

- les liaisons cinématiques :

$$\underline{U} \in \mathcal{U} \quad \underline{U} |_{\partial_1 \Omega} = \underline{U}_d(\underline{d}(\theta)) \quad (2)$$

- les équations d'équilibre :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} \quad \forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}_{a,d,0} \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} Tr[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d(\underline{d}(\theta)) \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d(\underline{d}(\theta)) \underline{U}^* dS \quad (4)$$

- la relation de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}(\underline{m}(\theta)) \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}) \quad (5)$$

$\mathcal{U}$  est l'espace où est cherché le champ de déplacement,  $\mathcal{S}$  est celui où est cherché la contrainte,  $\mathcal{U}_0$  l'espace des champs de  $\mathcal{U}$  qui sont nuls sur  $\partial_1 \Omega$  et où  $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U})$  représente la déformation linéarisée associée au déplacement.

### 2.3. Extension de l'erreur en relation de comportement au cadre stochastique

Les champs  $\hat{s}(\underline{m}, \underline{d}) = (\hat{U}_h(\underline{m}, \underline{d}), \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h(\underline{m}, \underline{d}))$  sont admissibles si pour  $(\underline{m}, \underline{d}) \in \mathcal{H}_m \times \mathcal{H}_d$  :

- le champ  $\widehat{\underline{U}}_h(\underline{m}, \underline{d})$  vérifie (2) ( $\widehat{\underline{U}}_h(\underline{m}, \underline{d})$  est cinématiquement admissible)
- le champ  $\widehat{\underline{\sigma}}_h(\underline{m}, \underline{d})$  vérifie (4) ( $\widehat{\underline{\sigma}}_h(\underline{m}, \underline{d})$  est statiquement admissible)

$\mathcal{H}_m$  et  $\mathcal{H}_d$  les espaces de Hilbert correspondants à  $\underline{m}(\theta)$  et  $\underline{d}(\theta)$ .

La seule équation qui n'est pas vérifiée par  $\widehat{s}(\underline{m}, \underline{d})$  est la relation de comportement. On peut définir une mesure d'erreur en relation de comportement par :

$$E_{RdC}(\underline{m}, \underline{d}) = \|\widehat{\underline{\sigma}}_h - \mathbf{K}\varepsilon(\widehat{\underline{U}}_h)\|_{\sigma, \Omega} \quad (6)$$

$\|\bullet\|_{\sigma, \Omega}$  est la norme énergétique sur  $\Omega$ .

Cette quantité est connue pour toute valeur de  $\underline{m}$  et de  $\underline{d}$ . L'erreur globale en relation de comportement est définie par :

$$\bar{E}_{RdC}^2 = \int_{\mathcal{H}_m \times \mathcal{H}_d} E_{RdC}^2 dP(\underline{m}) dQ(\underline{d}) \quad (7)$$

#### 2.4. Encadrement en norme énergétique

La double inégalité (8) suivante reste valable pour toutes les valeurs de  $\underline{m}$  et  $\underline{d}$  [FLO 02] :

$$\|\underline{\sigma}_h\|_{\sigma, E} - e_{RdC, E} \leq \|\underline{\sigma}_{ex}\|_{\sigma, E} \leq \|\underline{\sigma}_h\|_{\sigma, E} + e_{RdC, E} \quad (8)$$

On peut alors montrer la double inégalité suivante sur les probabilité  $P(X)$  que l'événement  $X$  se produise :

$$P(\|\underline{\sigma}_h\|_{\sigma, E} + e_{RdC, E} \leq q) \leq P(\|\underline{\sigma}_{ex}\|_{\sigma, E} \leq q) \leq P(\|\underline{\sigma}_h\|_{\sigma, E} - e_{RdC, E} \leq q) \quad (9)$$

On peut ainsi obtenir un encadrement sur la valeur de la contrainte à une probabilité donnée  $\alpha = 99\%$  :

$$q_{h-}^{99\%} \leq \|\underline{\sigma}_{ex}\|_{\sigma_{99\%, E}} \leq q_{h+}^{99\%} \quad (10)$$

### 3. Mise en œuvre sur un exemple

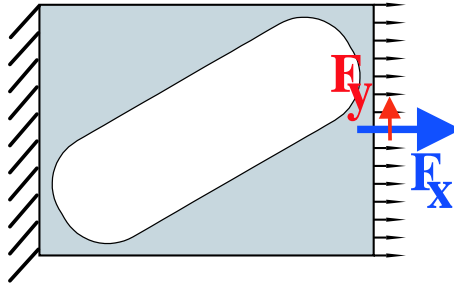
Le cas test étudié est une plaque rectangulaire trouée, encadrée sur un bord et soumise à des efforts répartis uniformément sur le bord opposé, mais mal connus (Fig. 1) : dans la direction principale de sollicitation, la valeur  $F_x$  des efforts est déterministe et unitaire, dans l'autre direction, la valeur  $F_y$  des efforts est aléatoire avec une densité de probabilité qui suit une loi gaussienne de moyenne nulle et d'écart type 0.25.

En appliquant la méthode exposée aux sections précédentes, on obtient pour chaque élément :

$$q_{h-}^{99\%} \leq \|\underline{\sigma}_{ex}\|_{\sigma_{99\%, E}} \leq q_{h+}^{99\%} \quad (11)$$

ou encore, ce qui est équivalent, au niveau des densités moyennes de contrainte par élément :

$$s_{99\%}^- \leq \frac{1}{mes(E)} \|\underline{\sigma}_{ex}\|_{\sigma_{99\%, E}}^2 \leq s_{99\%}^+ \quad (12)$$



**Figure 1.** *Plaque trouée étudiée*

Avec  $s_{99\%}^- = \frac{1}{mes(E)} (q_{h^-}^{99\%})^2$  et  $s_{99\%}^+ = \frac{1}{mes(E)} (q_{h^+}^{99\%})^2$ . La valeur moyenne sur l'élément peut alors s'écrire :

$$\bar{s} = \frac{s_{99\%}^+ + s_{99\%}^-}{2} \quad (13)$$

et l'erreur sur l'élément vaut :

$$\Delta s = \frac{s_{99\%}^+ - s_{99\%}^-}{2} \quad (14)$$

Pour les trois éléments les plus sollicités, on obtient :

$\bar{s}$	$\Delta s$	$s_{99\%}^-$	$s_{99\%}^+$
56.6	18.7	37.9	75.3
58.6	8.9	49.7	67.5
60.1	9.5	50.6	69.6

#### 4. Conclusion

Dans ce papier, nous avons étendu le concept d'erreur en relation de comportement au cadre stochastique dans le cas de l'élasticité linéaire. Cette erreur peut être utilisée directement pour estimer la qualité d'une quantité locale dimensionnante. Les tests effectués illustrent les possibilités de ce nouvel outil qui fournit une erreur directement exploitable par le concepteur. Le calcul peut alors obtenir un certificat correspondant à des cas de charges incertains. Ce type de méthode peut également être utilisé dans le cas de quantités locales qui nécessitent un calcul supplémentaire reposant sur un extracteur (déplacement, facteurs d'intensité...).

## 5. Bibliographie

- [BAB 01] BABUŠKA I., STROUBOULIS T., *The finite element method and its reliability*, Oxford university press, 2001.
- [DEB 01] DEB M., BABUŠKA I., ODEN J., « Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques. », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 190, 2001, p. 6359–6372.
- [FLO 02] FLORENTIN E., GALLIMARD L., PELLE J., « Evaluation of the Local Quality of Stresses in 3D Finite Element Analysis. », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 191, 2002, p. 4441–4457.
- [GHA 91] GHANEM R., SPANOS P., *Stochastic Finite Element : A special approach*, Springer, 1991.
- [GHA 99] GHANEM R., « Ingredients for a general purpose stochastic finite elements formulation. », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 168, 1999, p. 19–34.
- [GHA 02a] GHANEM R., PELISSETTI M., « Error estimation for the validation of model-based predictions. », *Proc. of 5th World Congress on Computational Mechanics*, 2002.
- [GHA 02b] GHANEM R., PELISSETTI M., « A method for the validation of predictive computations using a stochastic approach », *Proc. of OMAE02, Oslo*, 2002.
- [KAR 47] KARHUNEN K., « Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung », *Amer. Acad. Sci., Fennicade (Translation : RAND Corporation, Santa Monica, California, Rep. T-131, Aug. 1960)*, vol. 37, 1947, p. 3–79.
- [KEE 03] KEESER A., MATTHIES H., « Numerical methods and Smolyak quadrature for nonlinear stochastic partial differential equations. », *SIAM J. Sci Comp.*, , 2003.
- [LAD 98] LADEVÈZE P., ODEN J., Eds., *Advances in adaptive computational methods in mechanics*, Studies in Applied Mechanics 47, Elsevier, 1998.
- [LAD 99] LADEVÈZE P., ROUGEOT P., BLANCHARD P., MOREAU J., « Local error estimators for finite element analysis », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 176, 1999, p. 231–246.
- [LAD 03] LADEVÈZE P., « Validation and verification of stochastic models in uncertain environment using constitutive relation error method », rapport n° 258, 2003, LMT-Cachan.
- [LAD 04] LADEVÈZE P., PELLE J., *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*, Springer NY, 2004.
- [LOE 48] LOEVE M., « Fonctions aleatoires du second ordre », *Supplement to P. Levy, Processus Stochastic et Mouvement Brownien, Paris, Gauthier Villars*, , 1948.
- [SCH 97] SCHUELLER G., « A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. », *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 12, 1997, p. 197–321.