



HAL
open science

Evolutions en présence de liaisons unilatérales : notions de base

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Evolutions en présence de liaisons unilatérales : notions de base. 4e Colloque National en Calcul des Structures, LMA Marseille, 1999, Giens, France. pp.25-40. hal-01795127

HAL Id: hal-01795127

<https://hal.science/hal-01795127>

Submitted on 18 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Evolution en présence de liaisons unilatérales : notions de base

Jean Jacques MOREAU

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UMR 5508,
case 048, Université Montpellier II, 34095 Montpellier Cedex 5, France
e-mail: moreau@lmgc.univ-montp2.fr

Résumé

On présente une approche numérique de la dynamique de collections de corps rigides, prenant en compte le caractère unilatéral des liaisons d'impénétrabilité, le frottement sec en cas de contact et certaines lois de restitution en cas de collision. La méthode est illustrée par des applications à des problèmes actuels de mécanique des milieux granulaires.

1 Introduction

Dans des domaines d'application divers, le besoin apparaît de calculer le mouvement, ou de discuter l'équilibre, de collection de corps rigides ou déformables entre lesquels des contacts, usuellement affectés de frottement, sont susceptibles de s'établir ou de se rompre. La réflexion théorique sur de tels problèmes à *liaisons unilatérales* remonte à E. Delassus [11], dans le premier quart de ce siècle. Quant aux techniques numériques, il faut citer le travail de pionnier de P. Cundall [8], motivé par la géomécanique.

Cette situation peut être qualifiée de *non régulière* pour les raisons suivantes.

Les conditions géométriques de non-interpénétration des membres du système et, éventuellement, celles de leur confinement unilatéral par des parois extérieures de mouvement imposé s'expriment par une famille d'inégalités concernant les paramètres de position. Dans la variété \mathcal{Q} de ces paramètres l'ensemble des positions permises, au lieu d'être une sous-variété régulière comme dans la Mécanique Analytique traditionnelle, est une région de \mathcal{Q} dont la frontière est faite de morceaux d'hypersurfaces (des millions de tels morceaux dans les applications usuelles aux granulats) se rejoignant selon des "arêtes". Cela peut s'appeler la *non-régularité spatiale*.

La réalisation mécanique des liaisons d'impénétrabilité implique des forces de contact, gouvernées par des lois très peu régulières. Par exemple dans le cas le plus

simple, celui d'un contact ponctuel à frottement nul, la loi consiste en la relation suivante entre le vecteur force de contact \mathbf{r} et l'interstice $g \geq 0$: si $g > 0$ on a $\mathbf{r} = 0$ tandis que si $g = 0$, \mathbf{r} est indéterminé sur la demi-droite normale aux corps en contact. Par ailleurs, si un frottement sec est pris en compte, il introduit une relation entre la force de contact et la vitesse relative locale des corps concernés dont le graphe n'est pas une variété régulière, mais est fait de parties à première vue hétéroclites. Tout cela peut s'appeler la *non régularité en loi*. Noter que les relations en question ne permettent d'exprimer aucune des variables concernées comme fonction univoque des autres.

Enfin, si une *collision* survient entre des corps traités comme rigides, on attend des sauts de vitesse: c'est la *non régularité temporelle*.

Dans la majorité des techniques numériques employées à ce jour, ces difficultés sont abordées au moyen d'approximations régularisantes. L'impénétrabilité des corps est remplacée par des lois de répulsion suffisamment abruptes qui entrent en jeu lorsque deux d'entre eux s'approchent. De même, la loi de Coulomb est usuellement adoucie. On est ainsi ramené à des équations différentielles justiciables de techniques numériques classiques. Mais, dans chaque cas d'espèce, un compromis doit être accepté entre l'exigence de précision et la raideur des équations approximantes. Cette raideur impose des pas de discrétisation très petits et, souvent, des inerties ou des viscosités artificielles sont introduites pour assurer la stabilité numérique. L'application d'une telle stratégie de calcul à des situations proprement dynamiques demande beaucoup de précautions et de savoir-faire. Son application est moins problématique dans la recherche d'états d'équilibre ou le calcul d'évolutions quasi-statiques, indifférentes à ce que la dynamique invoquée pour passer d'un quasi-équilibre à un autre peut avoir d'artificiel.

Les techniques numériques basées sur la régularisation des liaisons d'impénétrabilité sont souvent désignées par le sigle *MD* (pour *Molecular Dynamics*, en référence à leur usage dans les simulations numériques de dynamique moléculaire [30]).

Noter que, dans des logiciels de dynamique des machines, des approximations régularisantes sont communément appliqués aussi à des liaisons bilatérales, si les fonctionnalités du programme font introduire ces liaisons dans un système mécanique antérieurement paramétrisé [13].

Dans ce dernier domaine d'applications, le nombre d'objets concernés dépassant rarement une dizaine, une mise en équations exacte des problèmes à liaisons unilatérales reste également praticable. On cherchera à identifier des intervalles de temps sur lesquels l'ensemble des contacts effectifs demeure constant. Sur chacun de ces intervalles, le mouvement est calculé comme s'il s'agissait de liaisons bilatérales classiques, éventuellement avec frottement. On surveille les signe des composantes normales des réactions: si l'un d'entre eux devient incompatible avec l'unilatéralité, on conclut que le mouvement subséquent doit être calculé autrement. Delassus montra qu'en présence de plusieurs contacts, ceux qui cessent ne sont pas nécessairement ceux qui ont déclenché l'alerte et proposa un mode de détermination du nouveau statut des contacts n'exigeant pas l'essai de toutes les combinaisons. Aujourd'hui, les arguments de Delassus sont remplacés par ce qu'on appelle, en Analyse Non Régulière, des *problèmes de complémentarité* [15][23].

Le frottement sec, ou tout autre phénomène impliquant des lois à seuil, peut de la même façon faire apparaître des instants critiques.

Un autre signal exigeant que les équations écrites soient reconsidérées est l'apparition d'un nouveau contact, c'est-à-dire une collision. Le calcul du nouvel état de vitesse exige des informations phénoménologiques sur le processus de choc. Il est facile d'en imaginer sous la forme de relations entre les vitesses avant et après le choc, mais leur conformité à la réalité reste à discuter selon les circonstances [29].

L'approche décrite ci-dessus est communément désignée par le sigle *ED* (pour *Event Driven*).

Le présent exposé vise à donner une idée d'une technique numérique plus récente [17][18] intitulée *CD* (pour *Contact Dynamics*), basée elle aussi sur la mise en équations exacte, mais capable au stade actuel de traiter des systèmes d'une dizaine de milliers de solides. Elle permet de prendre en compte aussi la déformabilité des corps en présence [14][1]. Elle incorpore des procédures très simples pour traiter les collisions, mais la validité phénoménologique de ces procédures appelle naturellement les mêmes réserves que celle des autres formalisations.

En mécanique des granulates, des géomatériaux ou des maçonneries, les simulations numériques basées sur la prise en compte individuelle des grains ou des blocs, qu'elles soient de type *MD*, *ED* ou *CD*, sont qualifiées de méthodes *DM* (pour *Discrete Element* ou *Distinct Element*), par opposition avec la stratégie *FM* (*Finite Element*) utilisée lorsqu'une loi de comportement homogénéisée a été choisie, assimilant le granulat ou la maçonnerie à un milieu continu.

2 Exemple élémentaire : une particule ponctuelle en dimension 3

2.1 Confinement sans frottement : première approche

Le cas particulier suivant fournit une introduction à la méthode *CD*.

Dans l'espace rapporté aux axes galiléens Ox_1, x_2, x_3 , une particule ponctuelle Q de masse m , soumise à un champ de forces $x \mapsto X(x)$, est confinée dans la région $\Phi = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid f(x) \leq 0\}$ par une paroi matérielle (fixe, pour simplifier) d'équation $f(x) = 0$. L'inconnue principale de la dynamique est la fonction *vitesse* $t \mapsto u \in \mathbf{R}^3$, dont la fonction *position* se déduit par

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t u(s) ds. \quad (1)$$

Sur tout intervalle de temps où u est suffisamment régulière (précisons : *absolument continue*), l'équation de la dynamique s'écrit

$$m \frac{du}{dt} = X(q(t)) + r. \quad (2)$$

L'inconnue $r \in \mathbf{R}^3$ est la *force de liaison*, c'est-à-dire la réaction de la paroi en cas de contact. Supposons-la régie par les conditions suivantes :

Le confinement dont l'effet géométrique est

$$f(q) \leq 0 \tag{3}$$

est supposé réalisé par *contact*,

$$f(q) < 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0. \tag{4}$$

On admet de plus que le contact éventuel est sans frottement, i.e.

$$f(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbf{R} : r = \lambda \nabla f(q) \tag{5}$$

(le *gradient* $\nabla f(q)$, vecteur normal dans le sens sortant de Φ , sera supposé non nul). Enfin le contact est supposé *non adhésif*,

$$\lambda \leq 0 \tag{6}$$

Le système de conditions (3) à (6) constitue une *relation*, vérifiée à tout instant, entre les inconnues q et r et en laquelle se résume la totalité des informations disponibles concernant la liaison invoquée. On va voir que ces conditions ne sont pas aussi hétéroclites qu'il paraît.

Pour tout q appartenant à la surface frontière $f = 0$, la demi-droite engendrée dans \mathbf{R}^3 par le vecteur $\nabla f(q)$ constitue le *cône normal sortant* de la région Φ au point q , noté $N_\Phi(q)$. Il se révèle cohérent d'étendre comme suit la définition de ce cône pour tout q dans \mathbf{R}^3 : on pose $N_\Phi(q) = \emptyset$ si $q \notin \Phi$ et $N_\Phi(q) = \{0\}$ si $q \in \text{int } \Phi$. Moyennant quoi on constate que le système de conditions (3) à (6) se condense en

$$-r \in N_\Phi(q). \tag{7}$$

L'objectif traditionnel de la Mécanique Analytique, à savoir l'élimination des réactions des liaisons sans frottement, est atteint ici en rapprochant (2) et (7): les mouvements recherchés sont les solutions de l'*inclusion différentielle*

$$X(q(t)) - m \frac{du}{dt} \in N_\Phi(q(t)), \tag{8}$$

plus précisément une *inclusion intégro-différentielle*, vu (1). Noter que cette écriture impose $q(t) \in \Phi$, puisqu'autrement le second membre serait vide.

2.2 Confinement sans frottement : deuxième approche

L'inclusion différentielle (8) est d'un traitement difficile, tant du point de vue mathématique (existence et unicité éventuelle des solutions, convergence des approximations, etc.) que celui de la construction d'algorithmes numériques. L'essence de la méthode *CD* est de lui substituer un équivalent plus traitable.

Pour un instant t_1 tel que $f(q(t_1)) < 0$, la permanence de (3) n'exige rien de la vitesse $u(t_1)$. Mais si $f(q(t_1)) = 0$, la *vitesse à droite* $u^+(t_1)$, supposée exister, vérifie nécessairement $\nabla f(q(t_1)) \cdot u^+(t_1) \leq 0$ et la *vitesse à gauche* $u^-(t_1)$ l'inégalité opposée. Quel que soit q , même ne vérifiant pas (3), posons

$$\mathcal{K}(q) := \begin{cases} \{v \in \mathbf{R}^3 \mid v \cdot \nabla f(q) \leq 0\} & \text{si } f(q) \geq 0 \\ \mathbf{R}^3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la première alternative, $\mathcal{K}(q)$ est un demi-espace fermé ; le cône normal $N_{\mathcal{K}(q)}$ évalué au point 0 de \mathbf{R}^3 est alors la demi-droite engendrée par $\nabla f(q)$. Dans la seconde, $N_{\mathcal{K}(q)}(0)$ égale l'ensemble $\{0\}$. On constate donc que la loi (7) équivaut à

$$-r \in N_{\mathcal{K}(q)}(0). \quad (9)$$

La remarque cruciale est la suivante : si $t \mapsto (q, u, r)$ est une solution du problème formulé, on a pour presque tout t

$$-r \in N_{\mathcal{K}(q)}(u). \quad (10)$$

En effet, tant que la fonction u est continue, elle égale la dérivée (bilatérale) de $t \mapsto q(t)$, d'où $u^+ = u^- = u \in \mathcal{K}(q) \cap -\mathcal{K}(q)$, plan frontière du demi-espace $\mathcal{K}(q)$, ce qui entraîne $N_{\mathcal{K}(q)}(u) = N_{\mathcal{K}(q)}(0)$ (égalité triviale si $\mathcal{K}(q) = \mathbf{R}^3$).

Réciproquement, (10) entraîne (9) car $N_{\mathcal{K}(q)}(u)$ est contenu dans $N_{\mathcal{K}(q)}(0)$ quel que soit u . On peut donc remplacer (8) par

$$X(q) - m \frac{du}{dt} \in N_{\mathcal{K}(q)}(u) \quad (11)$$

à ceci près que cette écriture n'implique plus directement $q(t) \in \Phi$. Mais la non-vacuité du second membre entraîne $u \in \mathcal{K}(q)$ et il est facile d'établir (voir, dans un cadre plus général, [18][21]) :

LEMME D'INTÉGRATION. *Soit u , Lebesgue-intégrable sur un intervalle I d'origine t_0 et soit q construit par (1). Si $q(t_0) \in \Phi$ et si pour presque tout $t \in I$ on a $u(t) \in \mathcal{K}(q(t))$, alors $q(t) \in \Phi$ pour tout $t \in I$.*

De façon générale, nous dirons qu'une *loi de contact*, c'est-à-dire une relation gouvernant la réaction r , est de *type prospectif* si elle assure $u \in \mathcal{K}(q)$. Bien noter que tout ce qu'on vient de faire prend en compte l'orientation du temps : $\mathcal{K}(q)$ est l'ensemble des valeurs de la vitesse à *droite* compatibles avec la condition géométrique (3).

2.3 Un modèle d'algorithme CD

Soit $[t_i, t_f]$, de longueur h , un pas de temps. Le pas antécédent ayant livré des valeurs u_i and q_i pour les fonctions u et q à $t = t_i$, l'objectif est d'évaluer u_f et q_f . On adopte $q_m := q_i + \frac{1}{2}hu_i$ comme estimation de la position à mi-pas et on discrétise (11) sous une forme *implicite* relativement à l'inconnue u_f

$$X(q_m) - \frac{m}{h}(u_f - u_i) \in N_{\mathcal{K}(q_m)}(u_f), \quad (12)$$

ce qui caractérise u_f comme *point proximal* dans l'ensemble convexe $\mathcal{K}(q_m)$

$$u_f = \text{prox}(\mathcal{K}(q_m), u_i + \frac{h}{m}X(q_m)), \quad (13)$$

de calcul facile. On termine le pas par $q_f = q_m + \frac{h}{2}u_f$.

Cet algorithme gère automatiquement le maintien de la condition (3) et la cessation possible du contact. Pour le problème théorique, cela est dû au Lemme d'intégration et à ce que la loi de contact (10) est de type prospectif. Ici, ces arguments ne se retrouvent qu'à travers la discretisation et on pourrait craindre, de pas en pas, une accumulation de violations de la condition (3). En pratique, si h n'est pas trop grand, cette accumulation ne se produit pas. L'algorithme ci-dessus, *de type implicite* par rapport à u , tire beaucoup de son efficacité de ce que, alors que les positions q sont évaluées aux extrémités de l'intervalle $[t_i, t_f]$, le traitement de u s'effectue à mi-pas.

La forme de $\mathcal{K}(q_m)$ dépend du signe de $f(q_m)$. Lorsque $f(q_m) < 0$, $\mathcal{K}(q_m)$ égale \mathbf{R}^3 entier et (13) reflète simplement la dynamique d'un point libre soumis au champ X . S'il n'en est plus de même au pas suivant, c'est qu'une *collision* s'est produite et la valeur correspondante de u_f la prend en compte. Vu (13), la nouvelle vitesse appartient au demi-plan frontière de $\mathcal{K}(q_m)$, c'est-à-dire que la collision est traitée comme de *restitution nulle* [16]. On reviendra plus loin sur le concept de restitution.

Noter que, à la différence d'une approche du problème du mouvement d'un point dans une surface par les méthodes traditionnelles de la dynamique, l'algorithme n'invoque pas la courbure de la paroi. Cette courbure intervient implicitement par le fait que, d'un pas au suivant, $\nabla f(q_m)$ change de direction.

2.4 Frottement de Coulomb

Une des sources de l'intérêt du remplacement de (7) par (10) est de conduire à des calculs invoquant des ensembles convexes dans l'espace des vitesses éventuelles du système, lequel est un espace vectoriel, alors que, dans la variété des configurations, la notion de convexité, utile dans diverses techniques numériques, n'a pas de sens. De plus, ce type de formulation en termes de vitesses locales se prête directement à la prise en compte de frottements, régis par des lois empiriques.

Il est facile d'énoncer la loi de Coulomb en une liste de conditions constituant une loi de contact de type prospectif. L'algorithme résultant gèrera automatiquement la non-interpénétration. Au plan théorique, on peut trouver plus convaincant d'appliquer à la loi de Coulomb le formalisme des *bi-potentiels* [12]. Ce formalisme engendre automatiquement une loi de contact de type prospectif et, lorsqu'on arrive à la construction d'un algorithme, il remplace la formule de proximation (13) par une caractérisation qui est encore de type extrémal (voir aussi [17]).

Le cas particulier très simple traité dans ce paragraphe permet également de constater l'aptitude de l'algorithme *CD* à tester les équilibres. Si, à l'instant t_i , le point q_i est, compte tenu d'un frottement de Coulomb, une position d'équilibre, l'algorithme lancé avec $u_i = 0$ fournit $u_f = 0$ et $q_f = q_i$.

3 Indications sur le cas général

3.1 Contacts multiples

Au lieu de la simple inégalité (3), la dynamique d'une collection de corps met aux prises avec un système d'inégalités exprimant leurs impénétrabilités mutuelles, avec même la possibilité de plusieurs contacts pour chaque paire de corps.

Déjà pour une simple particule confinée comme ci-dessus dans une région de \mathbf{R}^3 la paroi, éventuellement mobile, peut se composer de plusieurs parties régulières imposant respectivement des inégalités de la forme

$$f_\alpha(t, q) \leq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Si, par exemple, les parties $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ de cette paroi se rejoignent selon une arête anguleuse, une position q appartenant à cette arête est un point singulier de la frontière de la région Φ . En ce cas $N_{\Phi(q)}$ est le cône engendré par les deux vecteurs $\nabla f_1(q)$ et $\nabla f_2(q)$. Si le contact avec chacune des deux portions de surface est sans frottement, l'ensemble des valeurs possibles pour la réaction totale égale $-N_{\Phi(q)}$. La construction d'algorithmes aboutit finalement à des formules semblables à (13) qu'on peut, si on veut, rapprocher du "Principe de Moindre Contrainte" de Gauss [15].

Dans le cas d'une collection de corps, éventuellement confinés aussi par des parois de mouvement imposé, la non-pénétration s'exprime par des inégalités du type (14) concernant la configuration $q := (q^1, q^2, \dots, q^n)$ du système. A la possibilité du contact $f_\alpha(t, q) = 0$ doit répondre une *loi de contact* que la méthode *CD* accueille sous la forme d'une relation entre la vitesse relative locale \mathcal{U}_α et la force de contact correspondante \mathcal{R}^α , relation pouvant dépendre du temps et de la position atteinte, soit

$$\text{loi}_\alpha(t, q, \mathcal{U}_\alpha, \mathcal{R}^\alpha) = \text{vrai}, \quad (15)$$

qu'on supposera naturellement être *de type prospectif*.

Comme dans le cas d'un simple point, l'inconnue centrale du problème est la fonction vitesse $t \mapsto u := (u^1, u^2, \dots, u^n)$ à partir de laquelle q se reconstruit comme en (1). La vitesse locale en chaque point de contact éventuel s'exprime sous la forme

$$\mathcal{U}_\alpha = G_\alpha u + \mathcal{W}_\alpha, \quad (16)$$

où G_α est une application linéaire de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^3 et où $\mathcal{W}_\alpha \in \mathbf{R}^3$ rend compte du mouvement possible d'une paroi. Ces éléments dépendent de manière connue de t et q . L'équation de la dynamique du système, tenant le rôle que jouait (2) dans notre exemple initial, demande que chaque réaction \mathcal{R}^α soit représentée par ses composantes généralisées formant un élément r^α de \mathbf{R}^n . Selon la machinerie classique de la Mécanique Analytique,

$$r^\alpha = G_\alpha^* \mathcal{R}^\alpha, \quad (17)$$

où l'application linéaire G_α^* de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^n est la transposée de G_α .

L'approximation numérique du problème d'évolution s'effectue comme précédemment par un schéma de discrétisation du temps, de type implicite relativement à

la fonction u . A chaque pas de temps, la partie lourde du calcul est la résolution des relations (15) à (17), couplées avec l'équations de la dynamique. Les matrices des G_α sont calculées au point $t_m := t_i + h/2$, $q_m := q_i + hu_i/2$ et c'est en ce point aussi que sont effectués les tests des inégalités (14) pour déterminer quels contacts doivent être traités comme "actifs" sur le pas concerné. Conformément au parti d'une discrétisation implicite relativement aux vitesses, c'est l'inconnue $\mathcal{U}_\alpha^f = G_\alpha u_f + \mathcal{W}_\alpha$ qui est mise à la place de \mathcal{U}_α dans la loi de contact (15).

On prend usuellement pour (15) la loi de Coulomb, convenablement complétée pour en faire une loi de type prospectif. Comme on l'a dit précédemment, cela peut se réaliser par le formalisme des bi-potentiels, avec l'avantage de ramener le gros problème numérique non linéaire ci-dessus à une minimisation. Mais l'implémentation de la méthode CD la plus employée à ce jour ne repose pas sur une minimisation. Elle consiste en une relaxation du genre Gauss-Seidel ramenant itérativement à des solutions de problèmes à un seul contact [19][22].

Le traitement n'implique pas le stockage de grosses matrices. En effet, chacune des application linéaires G_α implique au plus une paire de corps solides. La partie non nulle de la matrice correspondante est donc au plus un rectangle de taille 12×3 pour des simulations tridimensionnelles et 6×2 pour des simulations bidimensionnelles.

3.2 Collisions

On a vu dans le cas spécial du Parag. 2.3 comment un algorithme CD peut faire face formellement à une collision. La difficulté ne se situe pas dans le fait que le calcul doit aboutir à un saut de vitesse, mais dans la nécessité d'élaborer des lois phénoménologiques maniables résumant avec assez de précision la complexité de l'interaction brève que constitue la collision.

Déjà dans le cas le plus simple, celui de la collision entre deux corps par ailleurs libres, les formules impliquant un *coefficient de restitution* (qu'il soit de Newton, de Poisson ou d'autres) n'ont guère de portée pratique hors du cas des corps sphériques [29]. Si une collision affecte des objets faisant par ailleurs partie d'amas de corps déjà en contact, des percussions de liaison doivent être attendues en tous les contacts, situation encore plus difficile à analyser.

Pragmatiquement, l'implémentation la plus usuelle de la méthode CD traite les collisions comme suit.

Si (15) consiste dans la à la loi de Coulomb, cette relation est positivement homogène de degré 1 par rapport aux variables \mathcal{U}_α et \mathcal{R}^α . Cela permet de conduire le pas de calcul en traitant \mathcal{R}^α non pas comme la force de contact, mais comme l'*impulsion totale* transmise par le contact sur l'intervalle $[t_i, t_f]$. Le parti adopté ci-dessus de construire une discrétisation de type *implicite* a conduit à porter dans la loi de contact la valeur (inconnue) \mathcal{U}_α^f de la vitesse locale en fin de pas. On a vu dans le cas spécial du Parag. 2.3 qu'une collision éventuelle se trouve alors automatiquement traitée comme inélastique. Si, au lieu de cela, on porte dans la loi de contact la *demi-somme* de \mathcal{U}_α^f et de la valeur (connue) \mathcal{U}_α^i de la vitesse locale en début de pas, on obtient un choc *élastique*. De façon générale, en portant dans la loi de contact une

moyenne pondérée de \mathcal{U}_α^i et \mathcal{U}_α^f on crée une loi de choc impliquant frottement et restitution (en appliquant des pondérations différentes aux composantes normales et tangentielles, on peut même distinguer une restitution normale et une restitution tangentielle). L'avantage principal de ce traitement est sa cohérence dans le cas où de multiples contacts sont impliqués dans une collision, mais il ne faudrait pas y voir la proposition d'une théorie générale des chocs.

4 Simulations numériques de milieux granulaires

4.1 Microstructure

La visualisation photoélasticimétrique des contraintes dans un empilement de cylindres de Pyrex [9], ce qui constitue un modèle bidimensionnel d'arrangement granulaire, a révélé un phénomène maintes fois confirmé par la suite : la transmission des forces par un granulat ne met pas tous les grains à contribution de la même manière. La charge extérieure appliquée à un massif granulaire est supportée prioritairement par une sous-population, formant des chaînes immergées dans un bain de grains peu chargés. En situation bidimensionnelle, ces *chaînes de forces* dessinent des cellules, usuellement allongées dans la direction de la contrainte majeure. Les expériences tridimensionnelles, plus difficiles [2], montrent également des chaînes de forces, mais sans tendance visible à l'organisation de cellules.

Eu égard aux temps de calcul et à la lisibilité des résultats, beaucoup de simulations numériques sont faites en situation bidimensionnelles, ce qui correspond à des montages expérimentaux semblables à celui qu'on vient de mentionner. Le *milieu de Schneebeli* est un modèle expérimental de granulat constitué par un empilement de buchettes parallèles de même longueur. En photographiant la tranche de cet empilement, on accède à la géométrie d'un milieu granulaire bidimensionnel et à l'évolution que peut provoquer un déplacement des parois [4][10]. D'autres montages expérimentaux, dans lesquels des objets sont emprisonnés entre deux glaces parallèles, sont également employés pour réaliser des assemblages granulaires bidimensionnels [3][25]. La comparaison des mesures faites sur de tels montages avec les résultats correspondants des simulations permet de caler ces dernières, qui ont l'intérêt de produire aussi des valeurs pour des grandeurs expérimentalement inaccessibles.

La Figure (1) montre la simulation par un programme *CD* d'une collection de 3322 grains polygonaux convexes irréguliers (formes engendrées au hasard, 8 côtés au maximum) en équilibre dans les conditions suivantes : frottement entre grains 0,3, frottement sur les parois 0. Les parois latérales et la paroi basse sont bloquées; la paroi haute est libre de se mouvoir parallèlement à elle-même et est soumise à une force de contention verticale. Pesanteur nulle.

Une vue d'ensemble montre les forces intergranulaires, représentées par des segments centrés aux points de contact. Une vue de détail montre les images des grains remplies en niveaux de gris correspondant à la *charge* de chacun d'eux, avec des seuils en progression géométrique de raison 2. La charge est définie comme la somme des

composantes normales des forces de contact subies par le grain : cette quantité serait constante le long d’une chaîne rectiligne de grains de tailles variées en équilibre.

De telles simulations de massifs granulaires à deux ou trois dimensions, en équilibre ou déformés lentement sous l’effet du mouvement imposé à certaines parois, ont permis une analyse statistique des grandeurs des forces de contact, de leurs directions et des directions des normales aux divers contacts. Ces analyses, corroborées par des simulations *MD*, ont conduit, entre autres résultats, à concevoir le milieu granulaire comme constitué de deux “phases” : l’une d’entre elles est formée par les grains fortement chargés, organisés en un réseau de chaînes de force et capable de soutenir des contraintes de cisaillement, tandis que la population des grains “spectateurs” serait comparable à un fluide [24].

4.2 Tenseur de contrainte de Cauchy

Lorsqu’un milieu granulaire est considéré à l’échelle de la mécanique des sols, il est classique de le traiter comme un milieu continu et donc, à cette échelle, d’associer à chaque point de l’espace occupé une valeur du tenseur de contrainte de Cauchy. La définition de ce tenseur par l’analyse d’un échantillon microscopique tel que le fournissent les simulations numériques n’est pas évidente et a fait l’objet d’un certain nombre de travaux (voir entre autres [31][26]). Il s’agit ici de granulats denses et le tenseur attendu résume seulement un bilan des forces (ou percussions) de contact que les grains exercent les uns sur les autres, sans référence à la “convection de quantité de mouvement” qu’il faudrait prendre en compte si on voulait appréhender des régimes dynamiques à libre parcours moyen non négligeable.

Plutôt que de fonder l’analyse sur une revue des points de contacts présents dans le domaine d’épreuve choisi, une approche reposant sur une revue des grains, a été présentée dans [20]. Elle est basée sur le *moment interne* d’un système mécanique quelconque, une quantité tensorielle douée de la propriété d’additivité relativement à la réunion de deux systèmes lorsque ces derniers interagissent seulement *par contact*. La définition du moment interne repose sur une application banale du formalisme des puissances virtuelles. Disons seulement que pour le système constitué en particulier par une portion de milieu continu classique, le moment interne égale l’intégrale du champ tensoriel de Cauchy (changé de signe si on emploie les conventions d’orientation de la mécanique générale des milieux continus plutôt que celles de la géomécanique) par rapport à la mesure de Lebesgue. Une intégration par parties assez classique montre que, si la portion de milieu est en *équilibre*, le tenseur en question peut s’évaluer par l’examen des seules forces extérieures qu’elle subit.

Pour un échantillon de milieu granulaire, le tenseur de Cauchy moyen sera défini comme le quotient du moment interne total de cette collection de solides par le volume apparent de l’échantillon.

La mesure tensorielle “moment interne” ressort ainsi comme objet primitif. C’est elle qu’on invoque implicitement lorsqu’on déclare écrire les équations aux dérivées partielles de la mécanique des milieux continus au sens des distributions de Schwartz. Il n’est pas nécessaire qu’elle admette une densité relativement à la mesure de Lebesgue.

L'intérêt d'une définition réside dans l'usage qu'on en fait. La référence la plus usuelle au tenseur de Cauchy en un point concerne les coupes planes imaginées dans un voisinage de ce point. Le tenseur sert à exprimer le vecteur densité surfacique de force sur une telle coupe comme une fonction linéaire du vecteur unité normal. La simulation bidimensionnelle présentée sur la Figure (1) a été utilisée comme test. Le tenseur de Cauchy moyen, au sens ci-dessus, est calculé pour la portion de granulat comprise dans une plage d'épreuve circulaire. Cette plage doit évidemment être assez grande pour que les hétérogénéités liées aux chaînes de forces soient estompées. Pour 21 coupes imaginées dans le granulat selon des diamètres de la plage, le programme calcule la composante normale et la composante tangentielle de la résultante des forces de contact exercées par les grains dont le centre de gravité est situé d'un côté sur celles dont il est de l'autre. Les graphes de ces deux composantes, comme fonctions de l'angle, sont comparés aux sinusoides fournies par le calcul qu'on peut faire à partir du tenseur estimé. La coincidence est suffisamment significative pour qu'on puisse s'appuyer dans la suite sur cette définition du tenseur de Cauchy.

4.3 Distribution des contraintes dans un tas

La statique des tas de sable est un sujet présentement actif, donnant lieu à des controverses parfois acerbes [28][5][6]. L'effervescence actuelle en ce domaine a été déclenchée par l'observation expérimentale suivante: la distribution des pressions exercées par un tas conique sur le sol horizontal qui le supporte n'est pas en relation directe avec la hauteur de granulat à l'aplomb, comme cela serait le cas en hydrostatique. Dans certain cas, un minimum local de la pression est constaté à la verticale du sommet. Cela veut dire nécessairement que la région centrale du tas est partiellement portée par un arc-boutement du talus périphérique.

Que la statique d'un tas de sable ne soit pas de l'hydrostatique est attesté par le fait que la surface libre n'est pas horizontale! Notre contribution ici est de faire voir que *l'arc-boutement ci-dessus et l'inclinaison du talus sont liés de façon essentielle.*

La Figure (2) montre d'abord une simulation bidimensionnelle de tas. 3145 grains de forme polygonale convexe aléatoire (8 sommets au maximum) ont été déposés un par un sur le tas à mesure de sa croissance, à une abscisse choisie au hasard dans un petit intervalle autour de zéro. Les grains dévalent l'un ou l'autre des deux versants en déclenchant parfois des avalanches.

Le programme dessine la résultante des forces transmises le long d'une coupe verticale imaginée dans un des talus: *elle est sensiblement parallèle à la surface libre*, ce qui correspond bien à l'arc-boutement attendu. Une autre coupe, parallèle à la surface libre montre une *force verticale*. En fait, un calcul immédiat, basé sur la *symétrie du tenseur de Cauchy* montre que ces deux constatations sont mathématiquement équivalentes.

De telles propriétés de réciprocité, impliquant deux directions de coupe au voisinage d'un point d'un milieu continu, étaient déjà connues de Cauchy lui-même [7], bien que le concept de tenseur n'ait été formalisé que plus tard.

Qu'une couche créée par une avalanche s'arrêtant sur les flancs du tas, manifeste un équilibre entre son poids, vertical, et les forces qu'elles subit de la part du substrat

paraît bien naturel. Il paraît naturel aussi que le chargement de cette couche par le dépôt des suivantes qui possèdent la même propriété produise le phénomène constaté.

Une simulation tridimensionnelle (effectuée avec des grains sphériques) produit les mêmes résultats.

Cela dédramatise la situation mais ne suffit pas pour calculer la distribution des contraintes dans tout le tas, d'autant que la région centrale, qui montre des caractéristiques intermédiaires, se forme dans des conditions moins claires.

Un autre apport des simulations est de faire voir que la matière granulaire créée par dépôt sur les flancs du tas est fortement *anisotrope*. Cela est attesté par l'histogramme des directions des normales aux points de contacts entre grains, montré sur la même figure.

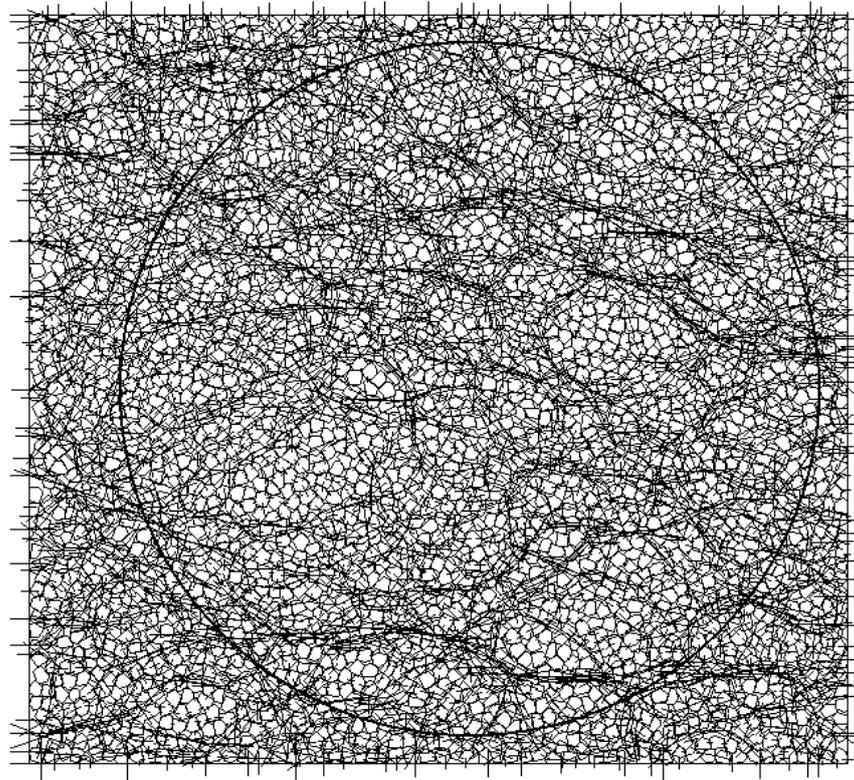
On ne peut s'empêcher dans ces conditions de comparer l'accrétion du tas à la *croissance d'un cristal*.

3322 grains polygonaux convexes de formes aléatoires

Diamètre moyen: 0,48 cm

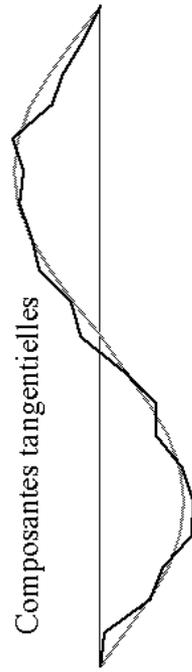
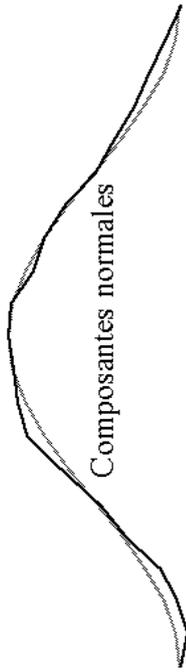
Frottement entre grains: 0,3. Frottement aux parois: 0

Confinement par la paroi supérieure mobile: 25 KPa



Forces sur 21 diamètres de la plage circulaire

(en gris: valeurs calculées à partir du tenseur de contrainte)



Détail des chaînes de forces

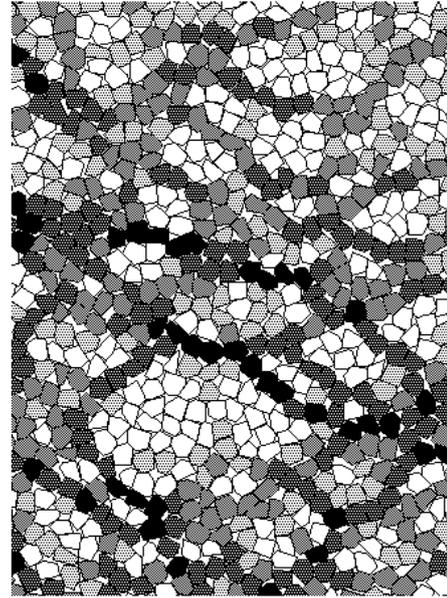


Figure 1

Investigation d'un tas de 3145 grains polygonaux. Formes aléatoires; diamètres de 0.41 à 0.55 cm. Frottement: 0.3; restitution des collisions: 0.1. Dépôt au voisinage du sommet du tas à raison de 20 grains par seconde.

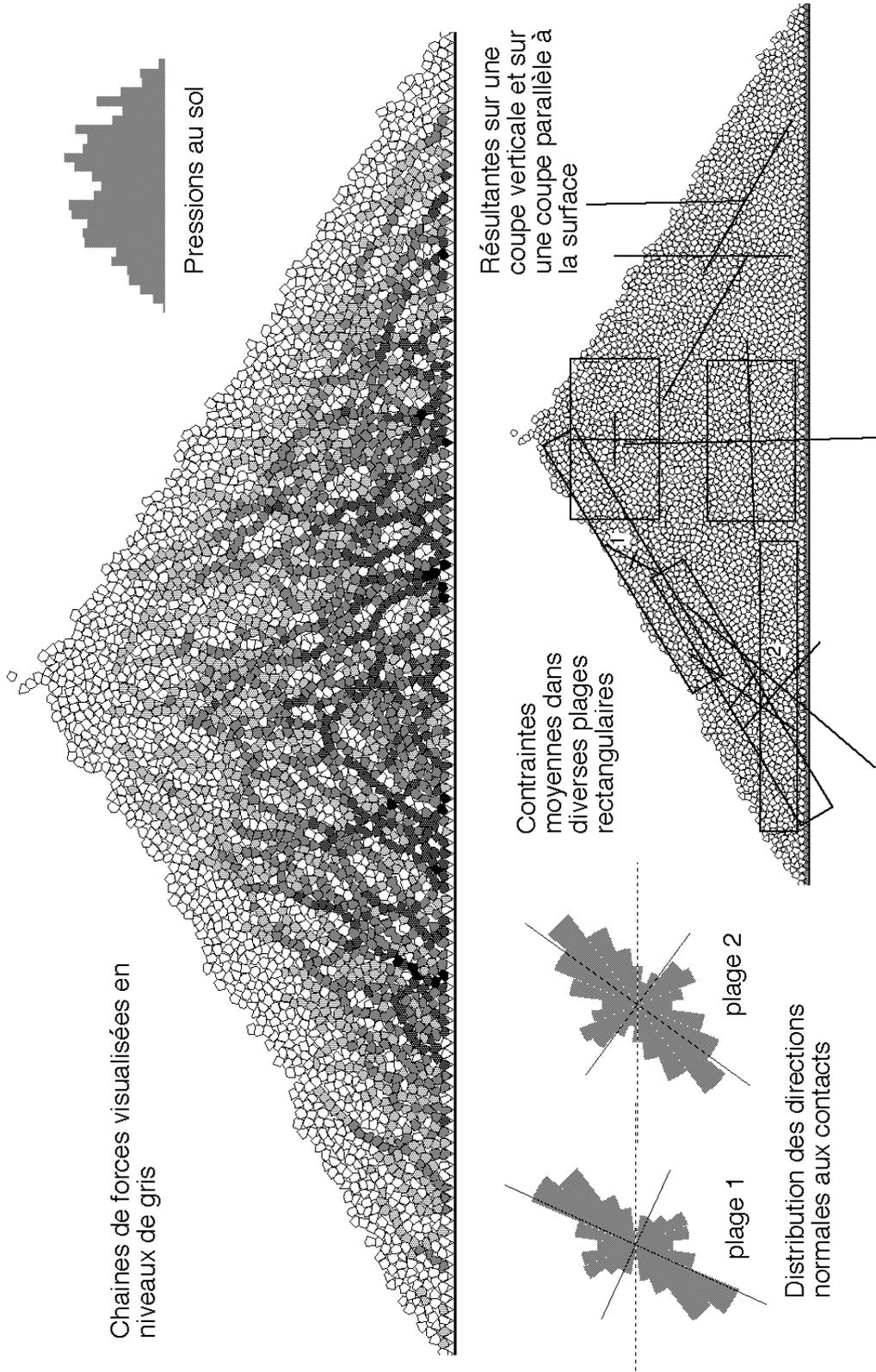


Figure 2

Références

- [1] V. Acary & M. Jean. Numerical simulation of monuments by the contact dynamics method, in *Monument-98, Workshop on Seismic Performance of Monuments*, Lisbon, 69-78, 1998.
- [2] H. G. B. Allersma. Photoelastic stress analysis and strain in model tests, *J. of Powders & Bulk Solids Technology*, 9, 7-14, 1985.
- [3] E. Azanza, F. Chevoir & P. Moucheron. Experimental study of rapid granular flows in a two-dimensional channel. In R. P. Behringer & J. T. Jenkins (eds.) *Powders & Grains 97*, Balkema, Rotterdam, 455-458, 1997.
- [4] F. Calvetti, G. Combe & J. Lanier. Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material: relation between structure evolution and loading path. *Mech. Cohesive-Frictional Materials*, 2, 121-163, 1997.
- [5] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J.-P. Bouchaud & P. Claudin. Development of stresses in cohesionless poured sand. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 356, 2535- , 1998.
- [6] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J.-P. Bouchaud & P. Claudin. Jamming and stress propagation in granular material. *Chaos*, à paraître.
- [7] A. Cauchy. Sur la relation qui existe entre les pressions ou tensions supportées par deux plans quelconques en un point donné d'un corps solide. *Exercices de Mathématiques*, Année 1829, De Bure, Paris. Réimprimé dans *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*, IIe Série, tome 9, Gauthier-Villars, Paris, 53-55, 1891.
- [8] P.A. Cundall, A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems, *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics*, (Nancy, France, 1971), Vol.1, 132-150.
- [9] P. Dantu, Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. *Proc.4th. Int. Conf. Soil Mechanics and Foundations Engineering*, Butterworths Sc. Pub., London, 1957.
- [10] D. Daudon, J. Lanier & M. Jean (1997) A micromechanical comparison between experimental results and numerical simulation of a biaxial 2D granular material, in R. P. Behringer and J. T. Jenkins (eds.), *Powders and Grains 97*, Balkema, Rotterdam, 219-222, 1997.
- [11] E. Delassus, Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 34, 95-179, 1917.
- [12] G. de Saxcé & Z. Q. Feng. New inequation and functional for contact with friction. *J. Mech. of Struct. and Machines*, 19, 301-325, 1991.
- [13] E. J. Haug. *Computer aided kinematics and dynamics, Vol. I: Basic methods*, Allyn and Bacon, Boston, 1989.

- [14] M. Jean. Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies: numerical simulation of geomaterials. In A. P. S. Selvadurai & M. J. Boulon (eds.) *Mechanics of Geomaterial Interfaces*. Elsevier, Amsterdam, 453-486, 1995.
- [15] J. J. Moreau. Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 256, 871–874, 1963.
- [16] J. J. Moreau. Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints. In G. Del Piero & F. Maceri (eds.), *Unilateral Problems in Structural Analysis*, CISM Courses and Lectures, Vol. 288, Springer-Verlag, Wien/New York, 173–221, 1985.
- [17] J. J. Moreau. Une formulation du contact à frottement sec; application au calcul numérique, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, Sér.II, 302, 799-801, 1986.
- [18] J. J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In J. J. Moreau & P. D. Panagiotopoulos (eds.), *Nonsmooth Mechanics and Applications*, CISM Courses and Lectures, Vol. 302, Springer-Verlag, Wien, New York, 1-82, 1988.
- [19] J. J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 13, n°4 - suppl., 93-114, 1994.
- [20] J. J. Moreau. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In P. Grassberger & D. E. Wolf (eds.), *Friction, Arching, Contact Dynamics*, World Scientific, Singapore, 233-247, 1997
- [21] J. J. Moreau. Some basics of unilateral dynamics. In F. Pfeiffer & C. Glocker (eds.) *Unilateral Multibody Dynamics*, Kluwer, Dordrecht, 1999, à paraître.
- [22] J. J. Moreau. Numerical aspects of the sweeping process. In J. A. C. Martins & A. Klarbring (eds.), *Computational Modeling of Contact and Friction*, special issue of *Computer Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, 1999, à paraître.
- [23] F. Pfeiffer & C. Glocker. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*, John Wiley and Sons, New York, 1996.
- [24] F. Radjai, D. E. Wolf, S. Roux, M. Jean & J. J. Moreau. Force networks in dense granular media. In R. P. Behringer & J. T. Jenkins (eds.) *Powders & Grains 97*, Balkema, Rotterdam, 211-214, 1997.
- [25] J. Rajchenbach, E. Clément & J. Duran. Velocity measurements on a bidimensional powder. In C. Thornton (ed.) *Powders & Grains 93*, Balkema, Rotterdam, 333-335, 1993.
- [26] L. Rothenburg & A. P. S. Selvadurai. A micromechanical definition of the Cauchy stress tensor for particulate media. In A. P. S. Selvadurai (ed.) *Proc. Int. Symp. on the Mechanical Behavior of Structured Media*, Ottawa, Canada, 1981.

- [27] S. Roux & F. Radjai. Texture-dependant rigid-plastic behavior. In H. J. Herrmann et al. (eds.), *Physics of Dry Granular Materials*. Kluwer, Dordrecht/Boston/London, 229-235, 1998.
- [28] S. B. Savage. Modeling and granular material boundary value problems. In H. J. Herrmann et al. (eds.), *Physics of Dry Granular Materials*. Kluwer, Dordrecht/Boston/London, 25-96, 1998.
- [29] D. Stoianovici & Y. Hurmuzlu. A critical study of the applicability of rigid body collisions theory. *A.S.M.E. J. Appl. Mech.*, 63, 307-316, 1996.
- [30] O. R. Walton. Application of molecular dynamics to macroscopic particles. *Int. J. Engng. Sci.*, 22:1097–1107, 1984.
- [31] J. Weber. Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents, *Cahiers du Groupe Français de Rhéologie*, 2, 161-170, 1966 (voir aussi une présentation détaillée sous le même titre dans *Bulletin de Liaison des Ponts et Chaussées*, 20, juil.-aout 1966, pp. 3-1 à 3-20).