



HAL
open science

Application des algorithmes "Contact Dynamics" aux milieux granulaires

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Application des algorithmes "Contact Dynamics" aux milieux granulaires. 14e Congrès Français de Mécanique, 1999, Toulouse, France. hal-01793645

HAL Id: hal-01793645

<https://hal.science/hal-01793645>

Submitted on 16 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

APPLICATION DES ALGORITHMES “CONTACT DYNAMICS” AUX MILIEUX GRANULAIRES

Jean Jacques MOREAU

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UMR 5508,
Case 048, Université Montpellier II, 34095 Montpellier Cedex 5, France.

RESUMÉ “Contact Dynamics” est une approche numérique de la dynamique de collections de corps, supposés ici rigides, prenant en compte le caractère unilatéral des liaisons d’impénétrabilité, le frottement sec en cas de contact et certaines lois de restitution en cas de collision. On en explique le principe et on montre son application à un sujet actuellement très discuté, la construction et la statique d’un tas de grains.

ABSTRACT “Contact Dynamics” is a numerical approach to the dynamics of collections of bodies, here assumed rigid, taking into account the unilateral character of non-interpenetrability constraints, dry friction in the event of contact and certain restitution laws in the event of collision. After explaining the principle, one shows its application to the building of a grain pile and the statics of the granular material inside, questions which currently are the subject of active research.

MOT-CLÉS contact unilatéral, éléments discrets, tas de sable, unilateral contact, discrete elements, sand pile.

I. INTRODUCTION

Dans des domaines d’application divers, le besoin apparaît de calculer le mouvement, ou de discuter l’équilibre, de collection de corps rigides ou déformables entre lesquels des contacts, usuellement affectés de frottement, sont susceptibles de s’établir ou de se rompre.

L’approche traditionnelle de tels problèmes à *liaisons unilatérales* consiste à identifier des intervalles de temps sur chacun desquels l’ensemble des contacts effectifs demeure constant. Sur chacun de ces intervalles, le mouvement est calculé comme s’il s’agissait de liaisons classiques (bilatérales). On surveille les signes des composantes normales des réactions : si l’un d’entre eux devient incompatible avec l’unilatéralité, on conclut que le mouvement subséquent doit être calculé autrement. E. Delassus montra, au début de ce siècle, que s’il y a plusieurs contacts, ceux qui cessent ne sont pas nécessairement ceux qui ont déclenché l’alerte. Aujourd’hui, les arguments de Delassus sont remplacés par ce qu’on appelle, en Analyse Non Régulière et en Théorie de l’Optimisation, des *problèmes de complémentarité*. De même, si un *frottement sec*, régi par une loi à seuil telle que la loi de Coulomb, affecte les contacts, d’autres instants critiques peuvent déclencher aussi

une révision du mode de calcul.

Cette stratégie, parfois désignée par le sigle *ED* (pour *Event Driven*), reste couramment employée en dynamique des machines (Pfeiffer, Glocker 1996). En ce qui concerne les granulates, on doit la restreindre à la dynamique de populations peu denses de grains interagissant par collisions. Pour les granulates denses, ou de façon analogue les maçonneries, le nombre des contacts en présence la rend impraticable.

Une approche très usuelle dans ce dernier cas, souvent intitulée *MD* en référence aux simulations numériques de la Dynamique Moléculaire, repose sur l'emploi d'*approximations régularisantes*. L'impénétrabilité des corps est remplacée par des lois de répulsion suffisamment raides qui entrent en jeu lorsque deux d'entre eux s'approchent. De même, la loi du frottement sec est communément remplacée par une loi de résistance moins abrupte. On est ainsi ramené à des équations différentielles justiciables de techniques numériques classiques. Mais, dans chaque cas d'espèce, un compromis doit être accepté entre l'exigence de précision et la raideur des équations approximantes. Cette raideur impose des pas de discrétisation très petits et, souvent, des inerties ou des viscosités artificielles sont introduites pour assurer la stabilité numérique. L'application d'un tel mode de calcul à des problèmes proprement dynamiques exige du savoir-faire ; on le réserve plutôt à la recherche d'états d'équilibre ou à l'approximation d'évolutions quasi-statiques, indifférentes à ce que la dynamique invoquée pour déterminer chaque quasi-équilibre peut avoir d'artificiel.

C'est ce qui a motivé le développement d'une nouvelle technique (Moreau 1988) intitulée *CD* (pour *Contact Dynamics*).

Nomenclature usuelle : en mécanique des granulates, des géomatériaux ou des maçonneries, les approches basées comme ici sur la prise en compte des grains ou des blocs sont qualifiés de méthodes *DM* (pour *Discrete Element* ou *Distinct Element*), par opposition avec les méthodes *FM* (*Finite Element*) utilisées lorsque des lois de comportement homogénéisées ont été choisies, assimilant le granulat ou la maçonnerie à un milieu continu.

Un exposé détaillé de la méthode *CD* ne peut trouver place ici. On se contente d'en expliquer le principe au moyen d'un exemple simple avant de présenter une contribution des simulations numériques *CD* à la *mécanique des tas de grains*. On pourra trouver des applications de la méthode à la dynamique des maçonneries dans les références : Jean 1995, Acary et Jean 1998.

II . UNE PARTICULE PONCTUELLE EN DIMENSION 3

1 . Confinement sans frottement: première approche

Le cas particulier suivant fournit une introduction à la méthode *CD*.

Dans l'espace rapporté aux axes galiléens Ox_1, x_2, x_3 , une particule ponctuelle Q de masse m , soumise à un champ de forces $x \mapsto X(x)$, est confinée dans la région $\Phi = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid f(x) \leq 0\}$ par une paroi matérielle (fixe, pour simplifier) d'équation $f(x) = 0$. L'inconnue principale de la dynamique est la fonction *vitesse* $t \mapsto u \in \mathbf{R}^3$, dont la fonction *position*, soit $t \mapsto q \in \mathbf{R}^3$, se déduit par $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t u(s) ds$. Sur tout intervalle de temps où u est suffisamment régulière (précisons : *absolument continue*), l'équation de la dynamique s'écrit

$$m \frac{du}{dt} = X(q(t)) + r. \tag{1}$$

L'inconnue $r \in \mathbf{R}^3$ est la *force de liaison*, c'est-à-dire en cas de contact la réaction de la paroi. Supposons-la régie par les stipulations suivantes :

Le confinement qui a pour effet géométrique

$$f(q) \leq 0 \quad (2)$$

est supposé réalisé par *contact*,

$$f(q) < 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0. \quad (3)$$

On admet de plus que le contact éventuel est sans frottement, i.e.

$$f(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbf{R} : r = \lambda \nabla f(q) \quad (4)$$

(le *gradient* $\nabla f(q)$, vecteur normal dans le sens sortant de Φ , sera supposé non nul). Enfin le contact est supposé *non adhésif*,

$$\lambda \leq 0. \quad (5)$$

Le système de conditions (2) à (5) constitue une *relation*, vérifiée à tout instant, entre les inconnues q et r et en laquelle se résume la totalité des informations disponibles concernant la liaison invoquée. On va voir que ces conditions ne sont pas aussi hétéroclites qu'il paraît.

Pour tout q appartenant à la surface frontière $f = 0$, la demi-droite engendrée dans \mathbf{R}^3 par le vecteur $\nabla f(q)$ constitue le *cône normal sortant* de la région Φ au point q , noté $N_\Phi(q)$. Il se révèle cohérent d'étendre comme suit la définition de ce cône pour tout q dans \mathbf{R}^3 : on pose $N_\Phi(q) = \emptyset$ si $q \notin \Phi$ et $N_\Phi(q) = \{0\}$ si $q \in \text{int } \Phi$. Moyennant quoi on constate que le système de conditions (2) à (5) se condense en

$$-r \in N_\Phi(q). \quad (6)$$

L'objectif traditionnel de la Mécanique Analytique, à savoir l'élimination des réactions des liaisons sans frottement, est atteint ici en rapprochant (1) et (6): les mouvements recherchés sont les solutions de l'*inclusion différentielle*

$$X(q(t)) - m \frac{du}{dt} \in N_\Phi(q(t)). \quad (7)$$

(plus précisément une *inclusion intégro-différentielle*, vu la relation entre q et u).

2 . Confinement sans frottement: deuxième approche

L'inclusion différentielle (7) est d'un traitement difficile, tant du point de vue de l'existence des solutions que celui de la construction d'algorithmes d'approximation. L'essence de la méthode *CD* est de lui substituer un équivalent plus traitable.

Pour un instant t_1 tel que $f(q(t_1)) < 0$, la permanence de (2) n'impose aucune restriction à la vitesse $u(t_1)$. Mais si $f(q(t_1)) = 0$, la *vitesse à droite* $u^+(t_1)$, supposée exister, vérifie nécessairement $\nabla f(q(t_1)).u^+(t_1) \leq 0$ et la *vitesse à gauche* $u^-(t_1)$ l'inégalité opposée. Quel que soit q , même ne vérifiant pas (2), posons

$$\mathcal{K}(q) := \begin{cases} \{v \in \mathbf{R}^3 \mid v \cdot \nabla f(q) \leq 0\} & \text{si } f(q) \geq 0 \\ \mathbf{R}^3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la première alternative, $\mathcal{K}(q)$ est un demi-espace fermé ; le cône normal $N_{\mathcal{K}(q)}$ évalué au point 0 de \mathbf{R}^3 est alors la demi-droite engendrée par $\nabla f(q)$. Dans la seconde, $N_{\mathcal{K}(q)}(0)$ égale l'ensemble $\{0\}$. La loi (6) équivaut donc à

$$-r \in N_{\mathcal{K}(q)}(0). \quad (8)$$

Remarque cruciale: si $t \mapsto (q, u, r)$ est une solution du problème formulé, on a pour presque tout t

$$-r \in N_{\mathcal{K}(q)}(u). \quad (9)$$

En effet, tant que la fonction u est continue, elle égale la dérivée (bilatérale) de $t \mapsto q(t)$, d'où $u^+ = u^- = u \in \mathcal{K}(q) \cap -\mathcal{K}(q)$, plan frontière du demi-espace $\mathcal{K}(q)$, ce qui entraîne $N_{\mathcal{K}(q)}(u) = N_{\mathcal{K}(q)}(0)$ (égalité triviale si $\mathcal{K}(q) = \mathbf{R}^3$).

Réciproquement, (9) entraîne (8) car $N_{\mathcal{K}(q)}(u)$ est contenu dans $N_{\mathcal{K}(q)}(0)$ quel que soit u . On peut donc remplacer (7) par

$$X(q(t)) - m \frac{du}{dt} \in N_{\mathcal{K}(q)}(u). \quad (10)$$

3 . Un modèle d'algorithme *CD*

Soit $[t_i, t_f]$, de longueur h , un pas de temps. Le pas antécédent ayant livré des valeurs u_i and q_i pour les fonctions u et q à $t = t_i$, l'objectif est d'évaluer u_f et q_f . On adopte $q_m := q_i + \frac{1}{2}hu_i$ comme estimation de la position à mi-pas et on discrétise (10) sous une forme *implicite* relativement à l'inconnue u_f

$$X(q_m) - \frac{m}{h}(u_f - u_i) \in N_{\mathcal{K}(q_m)}(u_f), \quad (11)$$

ce qui, élémentairement, caractérise u_f comme le *point proximal* d'un certain élément de \mathbf{R}^3 dans l'ensemble convexe $\mathcal{K}(q_m)$

$$u_f = \text{prox}(\mathcal{K}(q_m), u_i + \frac{h}{m}X(q_m)). \quad (12)$$

Calcul facile ; on termine le pas par $q_f = q_m + \frac{h}{2}u_f$.

Cet algorithme gère automatiquement le maintien de la condition (2) et la cessation possible du contact. *Cela est dû à ce que la loi de contact (9) assure $u \in \mathcal{K}(q)$* (Moreau 1988, 1999a) ; nous disons que cette loi est *de type prospectif*.

La forme de $\mathcal{K}(q_m)$ dépend du signe de $f(q_m)$. Lorsque $f(q_m) < 0$, $\mathcal{K}(q_m)$ égale \mathbf{R}^3 entier et (12) reflète simplement la dynamique d'un point libre soumis au champ X . S'il n'en est plus de même au pas suivant, c'est qu'une *collision* s'est produite et la valeur correspondante de u_f la prend en compte. Vu (12), la nouvelle vitesse appartient au demi-plan frontière de $\mathcal{K}(q_m)$, c'est-à-dire que la collision est traitée ici comme de *restitution nulle*.

Noter que, à la différence d'une approche du problème du mouvement d'un point dans une surface par les méthodes traditionnelles de la dynamique, l'algorithme n'invoque pas la courbure de la paroi. Cette courbure intervient implicitement par le fait que, d'un pas au suivant, la direction de $\nabla f(q_m)$ varie.

4 . Frottement

Une des sources de l'intérêt du remplacement de (6) par (9) est de conduire à des calculs invoquant des ensembles convexes dans l'espace des vitesses éventuelles du système, lequel est par essence un espace vectoriel, alors que, dans la variété des configurations, la notion de convexité, utile pour les techniques numériques, n'a pas de sens mécanique. De plus, ce type de formulation en termes de vitesses locales se prête directement à la prise en compte de *frottements*.

Il est facile d'énoncer la loi de Coulomb en une liste de conditions constituant une loi de contact de type prospectif, de sorte que l'algorithme résultant gèrera automatiquement la non-interpénétration et la cessation éventuelle du contact. La cohérence théorique de cette approche du frottement est confirmée par l'application à loi de Coulomb du formalisme des *bi-potentiels* (de Saxcé, Feng 1991) : ce dernier engendre automatiquement une loi de contact de type prospectif.

III . INDICATIONS SUR LE CAS GENERAL

Au lieu de la simple inégalité (2), la dynamique d'une collection de corps met aux prises avec un systèmes d'inégalités exprimant leurs impénétrabilités mutuelles, avec même la possibilité de plusieurs points de contacts pour chaque paire de corps.

Déjà dans le cas d'une simple particule ponctuelle confinée comme ci-dessus dans une région de \mathbf{R}^3 , la paroi peut se composer de plusieurs parties régulières, éventuellement mobiles, imposant respectivement des inégalités de la forme

$$f_\alpha(t, q) \leq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Si les surfaces $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ se rejoignent selon une arête anguleuse, une position q appartenant à cette arête est un point singulier de la frontière de la région Φ . En ce cas $N_{\Phi(q)}$ est le cône engendré par les deux vecteurs $\nabla f_1(q)$ et $\nabla f_2(q)$. Si le contact avec chacune des deux portions de surface est sans frottement, $-N_{\Phi(q)}$ est l'ensemble des valeur possibles pour la réaction totale. La construction d'algorithmes aboutit finalement à des formules semblables à (12).

Dans le cas d'une collection de corps, éventuellement confinés aussi par des parois, la non-pénétration s'exprime par des inégalités du type (13) concernant la configuration $q \in \mathbf{R}^n$ du système. A la possibilité du contact $f_\alpha(t, q) = 0$ doit répondre une *loi de contact* que la méthode *CD* accueille sous la forme d'une relation entre la *vitesse relative locale* \mathcal{U}_α et la *force de contact* correspondante \mathcal{R}^α .

Dans les applications usuelles, les loi de contact décrivent des frottements de Coulomb, de sorte que les relations en question sont positivement homogènes relativement aux \mathcal{R}^α . Pour la construction d'algorithmes à temps discrétisé de type *implicite* on écrit que la loi de contact met la valeur *finale* de \mathcal{U}_α en relation avec la valeur moyenne de \mathcal{R}^α sur le pas ou, de façon équivalente, avec l'intégrale de cette réaction, c'est-à-dire l'*impulsion de contact*. Un procédé itératif est employé pour déterminer à la fois les diverses impulsions de contact et l'élément u_f de \mathbf{R}^n .

En cas de collision, un tel algorithme traite automatiquement les chocs comme inélastiques. Un artifice théoriquement cohérent pour exhiber des restitutions non nulles consiste à invoquer la loi de contact sous la forme d'une relation entre l'impulsion de contact et une *moyenne pondérée* des valeurs initiale et finale de \mathcal{U}_α . Dans le cas traditionnel

d'une collision entre deux objets libres, les coefficients de cette pondération se relient directement aux coefficients de restitution classiques (vu la présence du frottement, on peut distinguer une restitution normale et une restitution tangentielle). Ne pas oublier toutefois que, si un corps affecté par une collision en touche déjà d'autres, des percussions doivent être attendues en tous les points de contact. L'artifice de la moyenne pondérée gère cette situation, mais sa validité phénoménologique reste à estimer selon les cas.

Noter que la stratégie numérique qu'on vient de présenter se prête parfaitement à la détection de positions d'équilibre, notamment en présence de frottement de Coulomb : si q_i est une telle position, le pas de calcul lancé avec $u_i = 0$ fournit $u_f = 0$ et $q_f = q_m = q_i$. C'est un des bénéfices qu'on retire de l'usage d'un algorithme *de type implicite relativement aux vitesses*.

IV . APPLICATION AUX MILIEUX GRANULAIRES

1 . Usage de simulations numériques

La méthode *CD* a été appliquée ces dernières années à diverses questions de mécanique des granulats *secs*: granulats secoués (ségrégation des tailles, surfaces libres paradoxales, etc.; Moreau 1994, 1995), écoulement sur une pente (Prochnow et al. 1999), déformations quasistatiques (notamment zones de cisaillement localisé; Moreau 1997). L'aptitude des algorithmes *CD* à traiter des collections de grains *exempts de déformation élastique* a pu être mise à profit pour démontrer par des simulations numériques que les dites déformations sont étrangères à tel ou tel effet observé. Le rebond éventuel lors de collisions est calculé par des lois de restitution et non par analyse de déformations microscopiques. A contrario, la propagation du son dans un granulat échappe totalement à cette approche.

La distribution des forces de contact a été particulièrement étudiée, ainsi que la distribution des directions des plans de contact entre grains, révélatrice d'une anisotropie éventuelle de l'assemblage (Roux, Radjai 1998) résultant de l'histoire du granulat.

Illustrons la présente communication par une contribution à un sujet actuel et controversé, la transmission des efforts dans un tas de 'sable', construit sur un sol horizontal en amenant des grains par un ajustage d'axe Oz . A chaque instant de la construction la forme du tas est, en première approximation, un cône d'axe Oz . Un grand intérêt s'est manifesté dans la littérature récente (Claudin 1999) pour le phénomène suivant : les pressions exercées par le tas aux divers points du sol ne sont pas en relation directe avec les hauteurs de granulat à l'aplomb. On va jusqu'à observer un minimum local de la pression dans la région centrale.

Ce phénomène ne nous paraît pas en lui-même surprenant : bien qu'un granulat soit susceptible de couler, la statique d'un tel milieu n'est pas l'hydrostatique. La preuve en est que la surface libre du tas en équilibre n'est pas horizontale. Par ailleurs, s'il est constaté qu'une portion centrale du tas exerce sur le sol une force inférieure à son poids, c'est nécessairement qu'une partie de ce poids est supportée par un arc-boutement du talus périphérique. Notre contribution présente est d'observer que cet effet d'arc-boutement et l'inclinaison de la surface libre sont liés de manière essentielle.

Il est admis que, à l'échelle macroscopique où l'on traite le milieu granulaire comme un continu, le vecteur de traction (en Génie Civil ou en Géomécanique, on considère plutôt le vecteur de pression) sur une surface de coupe idéale issue d'un point du milieu

dépend de la direction de cette coupe de la même manière que dans un milieu continu classique, c'est-à-dire qu'elle peut se calculer à partir d'un tenseur contrainte de Cauchy. Microscopiquement, la présence des *chaînes de forces* contredit cette assertion, mais il a été constaté numériquement (Moreau 1997, 1999b) qu'une moyenne faite sur une plage d'épreuve dont la dimension n'est qu'un petit nombre de fois supérieur à l'espacement type des chaînes fournit une estimation de ce tenseur, acceptable pour calculer la force transmise sur des coupes de ce même ordre de grandeur.

Soient (en dimension 2 ou 3) deux directions de coupe définies par leurs vecteurs unité normaux \mathbf{n} et \mathbf{n}' ; soient \mathbf{T} et \mathbf{T}' les vecteurs tension (ou pression) associés. La symétrie du tenseur de Cauchy entraîne $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}' = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T}$. En particulier, avec les deux membres nuls, il vient :

LEMME DES COUPES RÉCIPROQUES: *La coupe de normale \mathbf{n} est parallèle au vecteur \mathbf{T}' si et seulement si la coupe de normale \mathbf{n}' est parallèle au vecteur \mathbf{T} .*

Bien entendu, la distribution du tenseur de Cauchy dans un massif granulaire dépend de manière essentielle de l'histoire, en particulier du *processus de préparation*.

2 . Une expérience tridimensionnelle

La Figure 1 montre une vue de l'expérience numérique suivante. On construit un tas comportant environ 14000 grains sphériques en créant les grains un par un à vitesse nulle, le plus bas possible au contact d'un grain déjà existant.

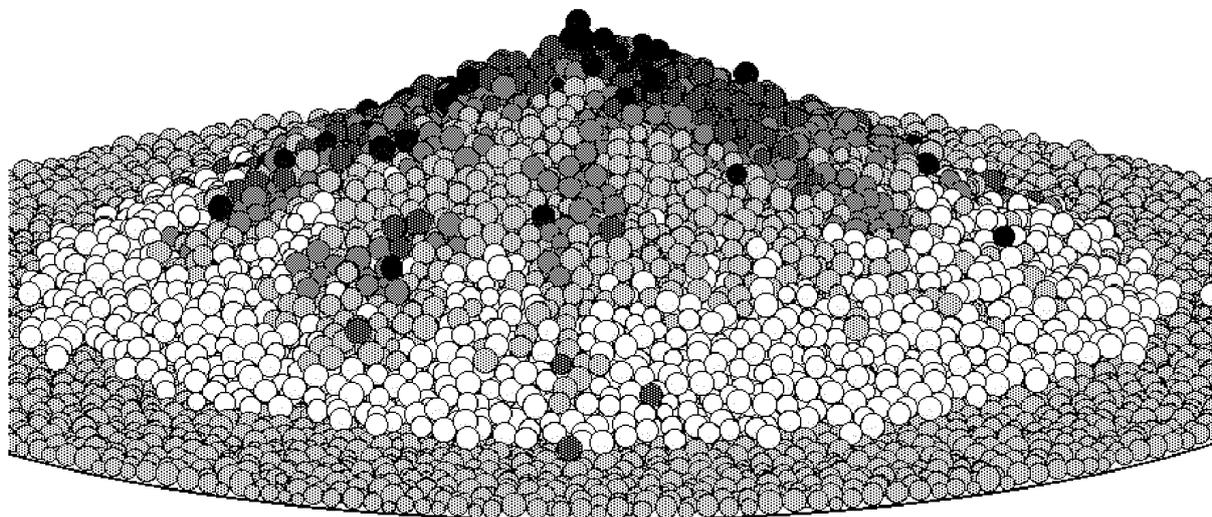


Figure 1: Tas tridimensionnel

Les diamètres des grains sont distribués aléatoirement de façon uniforme entre 0,25 et 0,50 cm. La rugosité du sol est simulée par un pavage aléatoire de grains fixes ayant cette même distribution de tailles. Coefficient de frottement : 0,4 partout ; restitution des collisions : 0 ; pesanteur : 981 cm/s². La verticale du centre d'un grain au moment de sa création est choisie aléatoirement au voisinage de l'axe Oz dans un rayon de 0,8 cm. Fréquence de création : 200 grains par seconde.

Une partie des grains s'écoulent sur les flancs du tas en déclenchant des avalanches visualisées sur la Figure 1 par des niveaux de gris correspondant pour chaque grain à la grandeur de sa vitesse. La plus grande vitesse égale 23,6 cm/s, en noir ; pour une lisibilité convenable, les 4 seuils successifs associés aux niveaux de gris jusqu'au blanc sont choisis en multipliant cette valeur par des puissances de 0,18. Noter que le mode de positionnement des grains à leur création et la fréquence de création font que la plupart d'entre eux sont créés en vol et atteignent le tas avec une vitesse non nulle mal identifiable : c'est un défaut de ce protocole.

Le phénomène simulé dure environ 72 s. Pour un calcul suffisamment précis de la dynamique des avalanches, le pas de temps est choisi à 2×10^{-4} s, ce qui fait 360000 pas. Le temps de calcul pour chaque pas dépend du nombre de grains présents et surtout du nombre de points de contacts (entre grains ou avec le sol rugueux), pour chacun desquels on doit calculer les 3 composantes de la force de contact, ce qui permettra de réactualiser les vitesses et les positions. Vers la fin de la simulation, le calcul devient très lent car le nombre de contacts est alors de l'ordre de 33000, d'où à chaque pas la résolution d'un problème fortement non linéaire ayant environ 100000 inconnues. Cela demande 16 secondes sur un PowerBook G3/300 MHz. L'algorithme itératif employé demeure praticable pour un système de cette taille parce que la plus grande partie du tas est en quasi-équilibre : les itérations sont lancées à partir des valeurs des réactions calculées au pas précédent pour les contacts qui existaient déjà.

La Figure 2 montre, à 4 époques de la construction, une tranche d'épaisseur 2 cm, contenant Oz . Les grains qui ont été créés entre les instants $t = 15,5$ et $t = 18,7$ et qui, à l'instant considéré, ont leurs centres dans cette tranche sont représentés en noir.

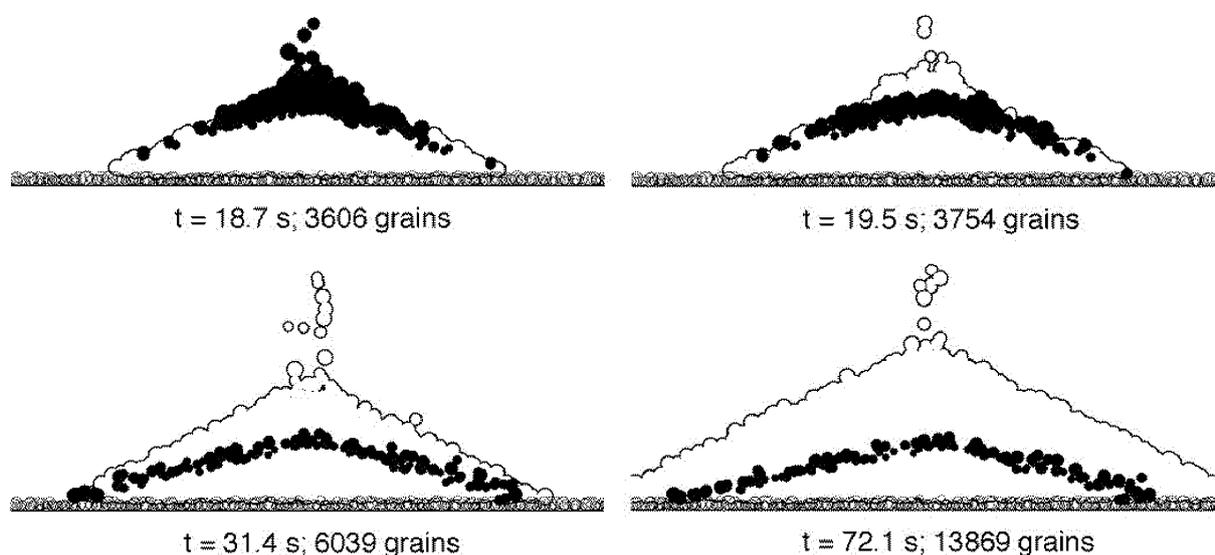


Figure 2: Etapes de la construction

On observe qu'une proportion importante d'entre eux ne s'écoulent pas sur les flancs du tas mais s'amoncellent sur place. Le paquet ainsi constitué s'enfonce en provoquant dans le granulat une déformation plastique dont on se fait une idée par la distribution des grains noirs aux époques ultérieures. Appelons *couches fossiles* ces collections de grains,

observés à une certaine époque et ayant leurs dates de naissance dans un intervalle de temps antérieur donné.

La surface libre est inclinée de 26° sur l'horizontale, sans différence perceptible si on laisse le tas se relaxer après arrêt des dépôts ; seul le sommet s'arrondit.

3 . Analyse de la transmission des forces

Dans un plan passant par Oz , le programme permet de choisir un segment. La bande de surface, tronc-conique ou cylindrique, engendrée par la rotation de ce segment autour de Oz est interprétée comme une séparatrice : sont retenus pour analyse les contacts entre deux grains ayant leurs centres de part et d'autre de cette séparatrice, pourvu que le point de contact se projette sur le cône ou le cylindre en un point appartenant à la bande. Le demi-plan méridien contenant le point de contact est invoqué pour une décomposition de la force de contact en une composante R_z selon Oz et une composante axifuge R_r ; la composante perpendiculaire au plan méridien, en principe de moyenne nulle, ne nous occupe pas ici. La somme des R_z et la somme des R_r pour tous les contacts retenus sont divisées par l'aire de la bande. Cela donne les composantes d'un vecteur méridien, *densité méridienne de force transmise à travers la bande*. Dans un milieu continu, possédant en chaque point un tenseur contrainte de Cauchy, une telle moyenne méridienne du vecteur traction (ou du vecteur pression, selon les conventions de signe employées) serait reliée au vecteur normal \mathbf{n} de la bande par l'intermédiaire d'un tenseur de contrainte méridienne moyenne et la *réciprocité des coupes* formulée dans ce qui précède serait mathématiquement assurée.

La Figure 3 montre une exploration du tas relaxé après l'arrêt des dépôts. Le but est de vérifier que les aléas de l'échantillonnage n'altèrent pas trop cette réciprocité.

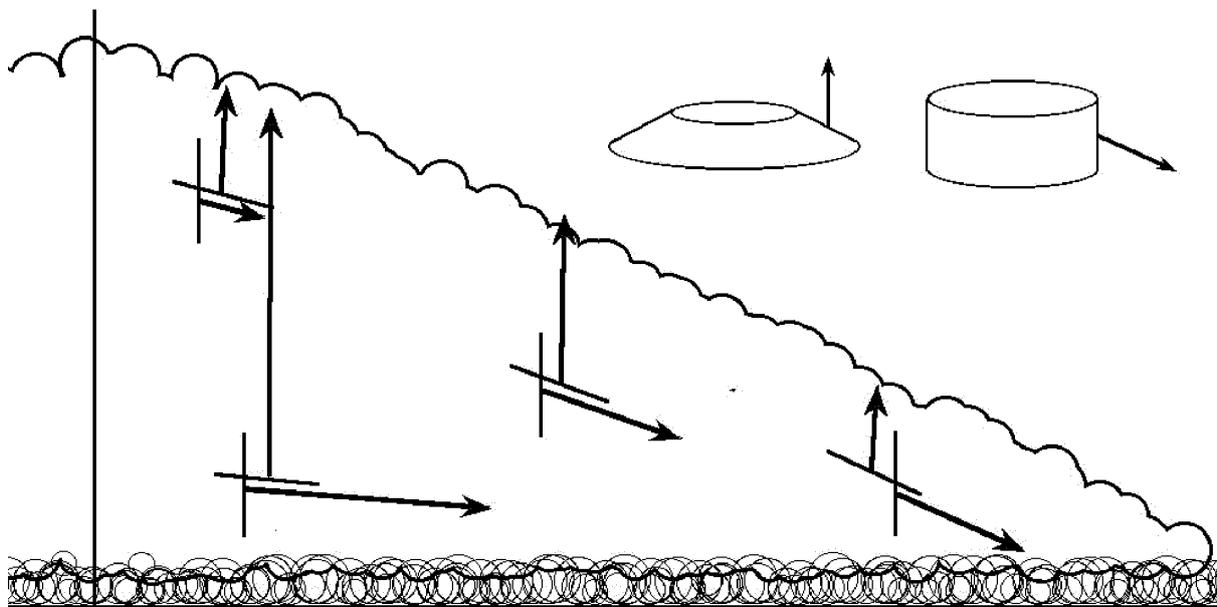


Figure 3: Coupes réciproques

La constatation faite, on se borne à observer les vecteurs densités de force sur des

coupes cylindriques d'axe Oz . La Figure 4 montre la même tranche d'épaisseur 2 cm que précédemment (prélevée cette fois dans le tas non relaxé, ce qui ne fait pas ressortir de différence significative). On y a dessiné les contours de grains formant deux couches fossiles d'âges différents. L'observation de cette figure suggère une loi, forcément approximative et qui demanderait à être précisée par une analyse statistique :

En chaque point du tas, le vecteur densité de force correspondant à une coupe cylindrique d'axe Oz a la même direction que la section méridienne d'une couche fossile avoisinant ce point.

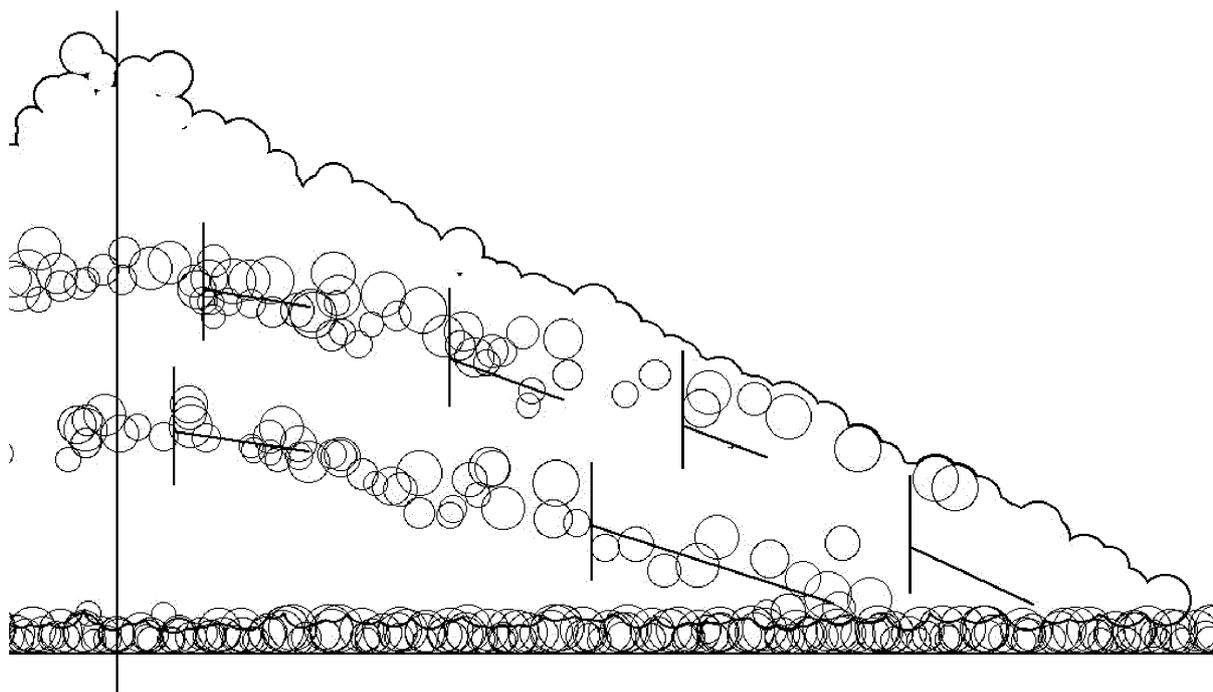


Figure 4: Deux couches fossiles

L'intérêt de cet énoncé est de caractériser la direction de l'arc-boutement, même dans la région centrale du tas, laquelle n'a pas été construite par des avalanches. Dans le talus périphérique, les couches fossiles sont presque parallèles à la surface libre ; on retrouve donc une assertion précédemment formulée par l'auteur (Moreau 1999b) relativement à cette région. Par le Lemme de Réciprocité, il est équivalent d'affirmer que, dans le talus, la densité de force sur une coupe tronc-conique parallèle à la surface libre est sensiblement verticale. Cette dernière propriété paraît naturelle vu que, dans la région concernée, le tas est fait de couches déposées par les avalanches. Lorsqu'une telle couche s'est arrêtée, la force qu'elle subit de la part du substrat doit équilibrer son poids et on s'attend à ce que cette verticalité subsiste lorsque d'autres couches possédant la même propriété sont venues la charger par dessus (argument qui demanderait bien sûr à être étayé par une étude approfondie du processus d'accrétion du tas par arrêt d'avalanches).

Enfin, la Figure 5 montre la distribution des pressions sur le sol. La région d'appui est découpée en couronnes concentriques d'axe Oz , de largeur uniforme. Pour l'ensemble des points de contact entre les grains du tas et le pavement qui se projettent dans une de

ces couronnes, la somme des composantes verticales des forces de contact est divisée par l'aire de la couronne.

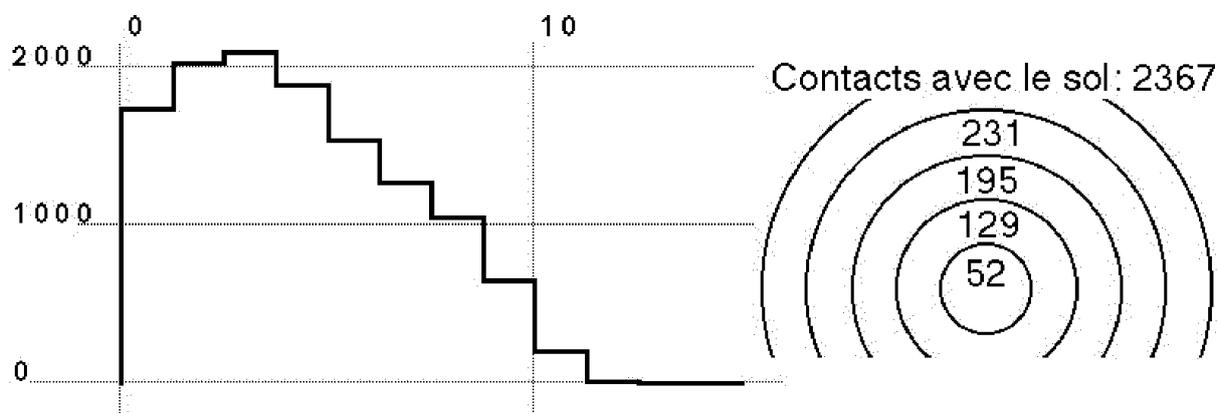


Figure 5: Pressions sur le sol

Les couronnes de petit rayon, en particulier la première qui se réduit à un disque, sont plus sujettes aux erreurs d'échantillonnage que les couronnes périphériques plus peuplées. Le graphe (abscisse: la distance à l'axe en cm; ordonnée: la pression en déciPascal) montre néanmoins un minimum local. La pression au centre est nettement inférieure à ce que serait la pression hydrostatique d'une colonne liquide de même hauteur ayant la masse volumique moyenne du granulat (à savoir 3320 dPa, pression correspondant à une masse volumique de 0,615 et une hauteur de 5.5 cm).

4 . Critique de l'expérience

Trois longueurs caractéristiques ressortent de la description du protocole: le diamètre moyen des grains, le rayon de dispersion de leurs lieux de création autour de Oz et, à chaque époque, la hauteur du tas. Le rayon de dispersion est à peu près le double du diamètre moyen, ce qui revient à amener les grains par un ajustage très fin. Mais que la hauteur du tas soit seulement égale à 15 fois le diamètre moyen des grains nous place très loin des situations usuelles où le nombre de grains est des millions de fois supérieur à ce qu'il est ici. On a vu qu'une partie centrale du tas se construisait par fonçage, à la différence du talus périphérique qui s'accroît en fixant des avalanches. Il est réaliste que les grains atteignent le tas avec une vitesse non nulle, mais cela engage le sommet du tas dans un processus dynamique qui n'est sans doute pas étranger à la déformation plastique trouvée. Si on pouvait poursuivre la simulation jusqu'à la construction d'un tas beaucoup plus gros, il est probable que l'importance relative de cette zone centrale diminuerait. L'effet d'arc-boutement s'étendant alors dans une plus grande portion du tas engendrerait probablement une distribution des pressions au le sol ayant un minimum central plus accusé.

La simulation numérique de la construction d'un tas permet bien d'autres investigations qui ne peuvent trouver place ici. On se reportera à Moreau 1999b, où des simulations bidimensionnelles de construction avec des grains *polygonaux* irréguliers fournissent des surfaces libres plus inclinées que dans ce qui précède. Elles sont utilisées de la

même manière pour un examen de la transmission des forces dans le tas mais aussi pour l'analyse *microscopique* de la matière granulaire. On y retrouve le fait bien connu que les efforts dans un milieu granulaire sont transmis prioritairement par un réseau de *chaînes de forces* baignant dans une population de grains moins chargés.

Une nouveauté apportée par ces simulations est que la matière granulaire créée par le dépôt d'avalanches est fortement *anisotrope*, fait révélé par les *histogrammes des directions des plans de contact*. Des anisotropies géométriques de cette sorte (voir en particulier Radjai et al. 1996, Moreau 1997, Roux et Radjai 1998) ne doivent pas être ignorées si l'on cherche à élaborer des lois de comportement mettant en relation des descripteurs *mésoscopiques*, i.e. construits par des moyennes sur des volumes pas très grands mais 'représentatifs', avoisinant le point concerné : tenseur de contrainte, tenseur de déformation, etc. L'objectif ultérieur serait d'insérer ces lois de comportement dans les équations aux dérivées partielles de la Dynamique des Milieux Continus.

RÉFÉRENCES

ACARY, V., JEAN, M.; 1998, Numerical simulation of monuments by the contact dynamics method, in *Monument-98, Workshop on Seismic Performance of Monuments*, Lisbon, pp. 69-78.

CLAUDIN, P.; 1999, *La physique des tas de sable*, Thèse, Université de Paris-Sud, Orsay.

JEAN, M.; 1995, Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterials, in A. P. S. Selvadurai, M. J. Boulon (eds.) *Mechanics of Geomaterial Interfaces*. Elsevier, Amsterdam, pp. 453-486.

MOREAU, J. J.; 1988, Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, in: J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos (eds.), *Nonsmooth Mechanics and Applications*, CISM Courses and Lectures, Vol. **302**, Springer-Verlag, Wien/New York, pp. 1-82.

MOREAU, J. J.; 1994, Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **13**, n°4 - suppl., pp. 93-114.

MOREAU, J. J.; 1995, Numerical experiments in granular dynamics: vibration-induced size segregation, in: M. Raous et al. (eds.), *Contact Mechanics* (Plenum Press, New York), pp. 347-358.

MOREAU, J. J.; 1997, Numerical investigation of shear zones in granular materials, in: P. Grassberger, D. E. Wolf (eds.), *Friction, Arching, Contact Dynamics* (World Scientific, Singapore), pp. 233-247.

MOREAU, J. J.; 1999a, Some basics of unilateral dynamics, in: F. Pfeiffer, C. Glocker (eds.) *Unilateral Multibody Dynamics*, (Kluwer, Dordrecht) à paraître.

MOREAU, J. J.; 1999b, Evolution en présence de liaisons unilatérales : notions de base, in: D. Guédra-Degeorges, P. Ladevèze, M. Raous (eds.), *Actes du 4ème Colloque National en Calcul des Structures* (Teknea, Toulouse), à paraître.

PFEIFFER, F., GLOCKER, C.; 1996, *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*, (John

Wiley and Sons, New York).

PROCHNOW, M., CHEVOIR, F., MOREAU, J. J.; 1999, Micromécanique des écoulements granulaires denses sur un plan incliné, *ce volume*.

RADJAI, F., JEAN, M., MOREAU, J. J., ROUX, S.; 1996, Force distributions in dense two-dimensional granular systems, *Phys.Rev.Letters*, **77**, pp. 274–277.

ROUX, S., RADJAI, F.; 1998, Texture-dependant rigid-plastic behavior, in H. J. Herrmann et al. (eds.), *Physics of Dry Granular Materials*. Kluwer (Dordrecht/Boston/London), pp. 229–235.

DE SAXCÉ, G., FENG Z. Q.; 1991, New inequation and functional for contact with friction, *J. Mech. of Struct. and Machines*, **19**, pp. 301–325.