



Sur une méthode de résolution de certains problèmes physiques basée sur la performance des égalités fonctionnelles dans le plan complexe

Henri Poncin, Jean Jacques Moreau, X Bourot

► To cite this version:

Henri Poncin, Jean Jacques Moreau, X Bourot. Sur une méthode de résolution de certains problèmes physiques basée sur la performance des égalités fonctionnelles dans le plan complexe. Colloque international de mécanique, 1950, Poitiers, France. hal-01737191

HAL Id: hal-01737191

<https://hal.science/hal-01737191>

Submitted on 19 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR UNE MÉTHODE DE RÉOLUTION DE CERTAINS PROBLÈMES PHYSIQUES BASÉE SUR LA PERMANENCE DES ÉGALITÉS FONCTIONNELLES DANS LE PLAN COMPLEXE

par

M. PONCIN

PROFESSEUR À LA SORBONNE

et

MM. BOUROT et MOREAU

DOCTEURS ÈS SCIENCES, ATTACHÉS DE RECHERCHES DU C.N.R.S.

EXPOSÉ DE M. PONCIN

Je me propose d'indiquer les principes généraux qui nous ont conduits à mettre au point une méthode de résolution de certains problèmes physiques, dont la mise en équations fait intervenir des fonctions harmoniques à deux variables. MM. BOUROT et MOREAU donneront ensuite quelques exemples d'application de cette méthode, parleront des généralisations qu'ils en ont faites et montreront comment on doit procéder pour pousser les calculs jusqu'aux déterminations numériques.

Comme on pourra le constater, la méthode en question, basée sur la permanence des égalités fonctionnelles dans le plan complexe, permet d'obtenir rigoureusement, par le calcul, les caractéristiques des phénomènes physiques auxquels elle peut être appliquée. On peut aussi combiner le calcul aux opérations graphiques et arriver ainsi très rapidement au résultat. Je ferai remarquer à ce sujet que, si l'on adopte cette dernière méthode de travail, les constructions auxquelles on est conduit pour déterminer les caractéristiques du phénomène en différents points de l'espace sont indépendantes les unes des autres, si bien qu'il se produit, en général, une compensation entre les erreurs graphiques inévitables. Au contraire, dans d'autres méthodes, cependant classiques, les erreurs qui proviennent de la substitution des lois finies approchées aux lois infinitésimales vraies s'ajoutent aux erreurs graphiques, si bien qu'au fur et à mesure que l'on s'éloigne des éléments de départ il se produit une accumulation d'erreurs, systématiques et accidentelles, qui empêche d'apprécier, *a priori*, l'ordre de grandeur de l'intervalle d'indetermination de la solution obtenue. Cet inconvénient peut d'ailleurs disparaître si l'on compare, en un certain nombre de points convenablement répartis, les résultats

exacts que fournit la méthode que nous proposons aux résultats approchés que fournissent les méthodes purement graphiques. Elle se présente alors comme un auxiliaire précieux de contrôle des méthodes classiques auxquelles nous venons de faire allusion.

Si son application à des fins pratiques ne nécessite qu'un appareillage restreint, sa justification théorique complète conduit à des développements assez importants.

Fidèle à l'esprit de ce Colloque, je me bornerai à signaler les différents points à élucider, en renvoyant aux mémoires originaux les auditeurs qu'intéresse, à juste titre, la rigueur des démonstrations.

*
* *

Il arrive généralement que, dans les problèmes physiques, certaines courbes du plan soient appelées à jouer un rôle particulier. Dans les cas que nous avons eu à étudier, nous avons été ainsi conduits à diviser en deux groupes les constituants géométriques qui limitent la région de l'espace où se produit le phénomène. Les uns forment les constituants, dits « fondamentaux », les autres les constituants, dits « secondaires ». Nous verrons, tout à l'heure, la raison d'être de cette terminologie et les exemples traités montreront que, pratiquement, cette classification s'effectue de façon très naturelle et sans aucune ambiguïté, si l'on se réfère aux équations du problème étudié.

C'est ainsi que, dans l'étude de la lame liquide s'écoulant au-dessus du seuil d'un barrage déversoir, la surface libre sera classée comme constituant fondamental et la section du seuil comme constituant secondaire, ceci parce que l'équation de Bernoulli fournit une relation particulièrement simple entre les paramètres géométriques de la surface libre et les caractéristiques cinématiques du mouvement des particules fluides qui se déplacent sur cette surface.

Dans l'étude de problèmes d'équilibre contraint d'un massif de retenue, c'est le parement du massif qui constituera le constituant fondamental parce que, d'une part, les équations de l'élasticité fournissent une expression particulièrement simple du tenseur des contraintes en tout point de ce parement et parce que, d'autre part, les mesures extensométriques y sont plus simples que dans la masse.

Nous verrons, en effet, que les résultats de mesures expérimentales effectuées sur le constituant fondamental peuvent être utilisées directement dans l'application de la méthode en question et, par suite, la facilité et la précision avec lesquelles elles peuvent être effectuées doit être prise en considération dans la classification dont nous parlons. Ajoutons à ces préliminaires que la répartition des éléments géométriques dans les deux groupes en question doit être faite de façon telle que la connaissance des constituants fondamentaux, jointe à celle des conditions fournies par les équations de la mécanique, soit suffisante pour déterminer complètement les solutions du problème et, en particulier, pour calculer les éléments caractéristiques en tous les points des constituants secondaires. On voit donc apparaître une première exigence d'ordre théorique, à savoir la nécessité de démontrer les théorèmes relatifs à l'existence et l'unicité des solutions ainsi définies.

La méthode de calcul que nous indiquerons n'a pu prendre une forme pratique, directement utilisable par des ingénieurs, que par l'introduction d'une représentation

du plan basée sur la symétrie analytique à travers les constituants fondamentaux. Aussi, allons-nous très rapidement donner quelques indications sur cette transformation. Pour la définir, nous considérerons une base e_1, e_2, e_3 de l'espace et, dans cette base, une représentation analytique $L(x_1, x_2) = 0$ du continu géométrique considéré. Nous déterminerons un champ vectoriel $u(M)$ par les conditions :

$$(1) \quad \begin{aligned} a) \quad & \overline{M} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2}; \\ b) \quad & \overline{u} = u_1 \overline{e_1} + u_2 \overline{e_2}; \\ c) \quad & L(x_1 + iu_1, x_2 + iu_2) = 0, \end{aligned}$$

puis nous construirons les deux points M_1 et M_2 définis par :

$$\overline{MM_1} = -\overline{MM_2} = \overline{e_3} \wedge \overline{u}(M).$$

Nous constatons immédiatement que si M fait partie du continu (L) , M_1 et M_2 sont confondus, que si M est au voisinage de (L) , M_1 et M_2 sont de part et d'autre de cette courbe, que si (L) est une droite, la correspondance $M_1 \rightarrow M_2$ est une symétrie au sens ordinaire de la géométrie élémentaire, et que si M est infiniment voisin de (L) , M_1 et M_2 sont, au second ordre près, symétriques l'un de l'autre par rapport à la courbe L . Ces constatations immédiates, et d'autres propriétés dont je n'ai pas le temps de parler, justifient le nom de symétrie analytique de base L , donné à la transformation qui associe l'ensemble des points M_2 à l'ensemble des points M_1 . Nous dirons également que l'un de ces points est l'image de l'autre à travers L , et nous écrirons :

$$M_2 = I_L(M_1), \quad M_1 = I_L(M_2).$$

Pour appliquer pratiquement la méthode de résolution que nous avons en vue, nous dessinerons les réseaux de courbes orthogonales dont les nœuds, situés de part et d'autre de L et caractérisés par des coordonnées curvilignes identiques, sont images l'un de l'autre. Supposons que nous ayons construit un tel graphique sur un papier millimétré : nous pouvons alors inscrire, à côté de chaque point M_1 , deux nombres complexes, l'un représentant l'affixe de M dans le plan complexe, associé à la base (e_1, e_2) , l'autre représentant le nombre complexe qui est conjugué de l'affixe dans ce même plan du point $M' = I_L(M)$.

Ce faisant, nous définissons numériquement, dans une certaine bande entourant (L) , une fonction complexe de la variable z . Cette fonction, que nous désignerons par $\zeta(z)$, est définie analytiquement par la condition :

$$\zeta[z(M)] = \overline{z[I_L(M)]},$$

et elle satisfait à la relation :

$$L\left[\frac{z+\zeta}{2}, i\frac{\zeta-z}{2}\right] = 0.$$

Comme je l'ai précisé dans l'introduction, les problèmes que nous considérons sont ceux pour lesquels les caractéristiques du phénomène étudié font intervenir des fonctions harmoniques à deux variables $P_1(M) P_2(M) \dots P_k(M)$. Nous leur adjoindrons les fonctions harmoniques associées $Q_1(M) Q_2(M) \dots Q_k(M)$, et les fonctions analytiques de la variable complexe z (affixe de M) telles que :

$$R[F_k(z)] = P_k(M),$$

et enfin les fonctions analytiques $\Phi_k(z)$ définies, à partir des F_k , par un processus analogue à celui qui nous a permis de définir la fonction ζ à partir de z , c'est-à-dire par la relation :

$$\Phi[z(M)] = \bar{F} : z[h(M)];$$

Considérons maintenant une des conditions relatives au constituant fondamental L : en un point donné de ce constituant, cette condition fait intervenir un certain nombre d'éléments numériques liés aux caractéristiques du phénomène et, en raison de son origine physique, qui entraîne son indépendance à l'égard des systèmes de représentation, elle peut être exprimée à l'aide des champs scalaires $P_k(M)$, $Q_k(M)$ et de leurs dérivées tensoriels successifs.

Il est donc possible d'exprimer la condition fondamentale considérée sous une forme qui fait intervenir uniquement la fonction $\zeta(z)$, et les fonctions $F_k(z)$ et leurs dérivées successives.

Cette expression s'obtiendra en utilisant les relations suivantes (où les accents ' et '' indiquent les dérivées premières et secondes) :

$$\bar{M} = \frac{z + \bar{\zeta}}{2} \bar{e}_1 + \frac{i\zeta - z}{2} \bar{e}_2,$$

$$\bar{D}_1 \bar{P} = \text{grad } P = \frac{1}{2} \left[F' + \frac{\Phi'}{\zeta'} \right] \bar{e}_1 + \frac{i}{2} \left[F' - \frac{\Phi'}{\zeta'} \right] \bar{e}_2,$$

$$\bar{D}_2 \bar{P} = \frac{1}{2} \left[F'' + \frac{\Phi''}{\zeta'^2} - \frac{\zeta''}{\zeta'^3} \Phi' \right] (\bar{e}_{11} - \bar{e}_{22}) + \frac{i}{2} \left[F'' - \frac{\Phi''}{\zeta'^2} + \frac{\zeta''}{\zeta'^3} \Phi' \right] (\bar{e}_{12} + \bar{e}_{21}).$$

D'une façon générale le tenseur dérivé d'ordre n s'exprimera à l'aide des n premières dérivées des fonctions ζ , F et Φ .

Sur (L) , la deuxième forme écrite, faisant intervenir z , ζ , F , Φ ..., est absolument équivalente à la première forme, fournie directement par les équations du problème et qui faisait intervenir les éléments géométriques M , et les champs $P_k(M)$.

On utilise alors — et c'est là le point fondamental de la méthode — le fait que, dans le plan complexe, les égalités fonctionnelles sont permanentes. Il en résulte que l'on peut définir, à partir d'une telle égalité, les différents éléments des fonctions qui y figurent en partant d'un élément quelconque de la fonction et en prolongeant cet élément de proche en proche par les méthodes classiques exposées dans les traités d'analyse.

Dans le cas actuel, les relations fonctionnelles, dont les conditions fondamentales nous ont fourni une expression uniquement sur (L), restent vraies sous la forme obtenue, en tout point de l'espace où se produit le phénomène étudié. Or, ces relations constituent un système d'équations différentielles. Suivant la forme de ces équations, on peut, soit en déduire l'expression explicite des fonctions F_k , soit en déduire un procédé de calcul numérique de ces fonctions. Dans l'un ou l'autre cas, on pourra, par l'application des formules :

$$F = P + iQ, \quad \frac{dF}{dz} = \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y} \dots$$

en déduire la valeur numérique de tous les éléments qui caractérisent le phénomène physique étudié.

Avant de passer aux applications, j'indiquerai rapidement les points principaux qu'il importait de préciser et auxquels je faisais allusion au début de cet exposé. J'ai déjà signalé la nécessité de démontrer les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions définies par les conditions « fondamentales ». La symétrie analytique de base L, dont dépend la fonction ζ , faisant intervenir une représentation analytique de (L) dans le plan $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, il importe de préciser certains points concernant cette représentation lorsque (L) est déterminée expérimentalement. A ce sujet, nous avons utilisé, avec fruit, les indications données par M. VERRONNE dans diverses notes récemment publiées. Nous avons pu ainsi démontrer que les solutions étaient stables dans tout le domaine utile, c'est-à-dire qu'une petite différence entre les courbes de base se traduisait par des différences également faibles entre les valeurs caractéristiques calculées aux différents points du système en appliquant la méthode à ces courbes de base. Ce résultat est particulièrement important pour les applications. Toutefois, cette stabilité disparaît lorsque l'on atteint des régions voisines des points singuliers des systèmes différentiels obtenus. L'exemple simple du problème de Cauchy montre que de tels points existent dans la quasi-totalité des cas. En effet, pour que, dans ce problème, l'on puisse prolonger la fonction dans tout le domaine limité par (L), il est nécessaire que les valeurs des dérivées normales coïncident avec celles qui correspondent à la solution de Dirichlet. On trouvera, dans la bibliographie indiquée, l'exemple d'une étude complète où l'on a attaché au constituant fondamental une surface de Riemann dont la structure permet de répondre à toute question de ce genre. Toutefois, dans les problèmes pratiques que nous avons eu à traiter, il n'a jamais été nécessaire de prolonger la solution aussi loin et les difficultés, dues à l'instabilité signalée des solutions, ne se sont jamais présentées.

APPLICATION A UN PROBLÈME DE LA MÉCANIQUE DES SOLIDES, DANS LE DOMAINE DES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES

Considérons un massif de retenue dont la section, par le plan $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, est constituée par deux courbes Γ_1 et Γ_2 situées de part et d'autre de l'axe support de $\bar{e}_2$, et ces deux courbes se raccordant l'une à l'autre au point O situé sur cet axe.

Nous admettons que, sous l'influence des actions mécaniques qui s'exercent sur Σ_1 , il s'établit un équilibre contraint du massif, et nous nous proposons de déterminer

les caractéristiques essentielles de cet état d'équilibre. Les déformations locales, que nous supposons élastiques, sont caractérisées par la rotation $\omega(P)$ et la dilatation cubique $\theta(P)$, et l'étude du problème montre que le déplacement local, à partir de l'état naturel, peut s'écrire sous la forme :

$$(1) \quad \delta P = \left[2 f_1(P) + g_2(P) - \frac{1+\nu}{2} \omega(P) y(P) \right] \bar{e}_1 + \left[(1-\nu) g_1(P) + f_2(P) - \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} y(P) \theta(P) \right] \bar{e}_2.$$

Dans cette relation, ν désigne le coefficient de Poisson de la matière dont est constitué le massif étudié. $f_1(P)$, $g_1(P)$, d'une part, $f_2(P)$ et $g_2(P)$, d'autre part, sont des fonctions harmoniques associées, les premières étant liées aux caractéristiques $\omega(P)$ et $\theta(P)$. Ceci posé, plaçons-nous en un point M du parement Σ_1 et désignons par $\bar{E}(M)$ la matrice associée au tenseur des contraintes en ce point, par $\bar{n}(M)$ le vecteur unitaire normal à Σ_1 et par $\bar{F}(M)$ le vecteur qui représente les actions mécaniques exercées sur le parement au voisinage de M .

La condition d'équilibre $\bar{F}(M) = \bar{n}(M) \bar{E}(M)$ s'exprime analytiquement par deux relations où figurent les éléments géométriques de (Σ) et les valeurs en M des tenseurs dérivées d'ordre 2 associés aux champs scalaires $f_1(M)$ et $f_2(M)$. Nous prendrons donc Σ_1 comme constituant fondamental, les conditions fondamentales nous étant fournies par les deux relations en question, jointes aux résultats de mesures extensométriques effectuées sur Σ . Les transformations signalées dans l'exposé général nous permettent d'écrire un système de quatre relations fonctionnelles valables en tout point M intérieur au massif. Une fois ce système écrit, les formules (1), et celles qui définissent les contraintes, nous permettront, à partir de ce système fonctionnel, de caractériser numériquement l'état de la matière en tout point du massif.

EXPOSÉ DE M. BOUROT

APPLICATION A UN PROBLÈME D'HYDRODYNAMIQUE ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT AU-DESSUS DU SEUIL D'UN BARRAGE DÉVERSOIR

Nous avons cherché à mettre au point un procédé pratique pour déterminer les caractéristiques de l'écoulement d'une masse liquide au-dessus du seuil d'un barrage déversoir et, en particulier, la répartition des pressions sur le parement aval du barrage. On sait que le choix du déversoir doit être fait en tenant compte des conditions suivantes :

1^o le seuil étant arasé à une cote H , le déversement doit pouvoir s'effectuer sans dommage pour le barrage lorsque la hauteur d'eau atteint en amont un niveau correspondant à une cote H' donnée;

- 2° le déversoir doit permettre d'évacuer un débit donné sous une charge donnée, et
 3° sous cette même charge, la lame déversante ne doit jamais décoller du parement aval du barrage.

On doit, en outre, prendre en considération la finesse du profil à cause de la quantité des matériaux qu'il faut mettre en œuvre pour construire le barrage et aussi à cause de ses relations avec le coefficient de débit. M. PONCEAU m'a proposé, il y a quelques années, d'appliquer la méthode de prolongement analytique qu'il vient d'exposer à la résolution de ce problème; j'ai d'abord étudié un cas concret pour lequel je possédais des clichés chronophotographiques reproduisant l'écoulement sur modèle réduit. J'ai obtenu une expression analytique du profil libre L sous la forme :

$$(1) \quad \begin{cases} x = 15,5 e^{0,06 t} - 15,25 e^{-0,084 t} - 0,15 \sin \pi (t + 0,4) - 0,1, \\ y = -17,2 \operatorname{th} t. \end{cases}$$

Les écarts entre la courbe définie par ces équations et le relevé dont j'étais parti, ne dépassent pas 0,3 cm pour une dénivellation totale de 34,4 cm.

J'ai défini la correspondance entre les plans complexes $t (\lambda, \mu)$ et $z (x, y)$ dans une série de tableaux numériques où sont donnés les résultats avec trois décimales, pour des valeurs de λ variant de $-1,6$ à $+1,8$ par saut de 0,2, et pour des valeurs de μ variant de 0 à $-0,7$ par saut de 0,1.

Les tableaux établis m'ont permis de construire, dans le plan de l'écoulement, le réseau homologue du réseau $\lambda = C^te$, $\mu = C^te$ recouvrant, avec des mailles suffisamment petites, la partie utile de l'écoulement.

La relation de Bernoulli (2) $V^2 + 2gy = 37,4 g$, utilisée comme condition fondamentale au sens indiqué par M. PONCEAU, m'a ensuite conduit à la relation fonctionnelle :

$$(3) \quad \frac{dF^2}{dz d\zeta} = 37,4 g + ig [z - \zeta],$$

et j'en ai déduit la correspondance entre la lame déversante et son hodographe complexe.

Le calcul effectué à partir de la courbe (1.) fournit des formules suivantes :

$$\rho = \sqrt{2g} \frac{r_1 r'}{r_2},$$

$$\theta = \frac{1}{2} [\omega' - \omega_1 + \omega_2],$$

$$r' e^{i\omega'} = 17,2 \left[1 + \frac{\operatorname{sh} 2\lambda + i \sin 2\mu}{\operatorname{ch} 2\lambda + \cos 2\mu} \right],$$

$$r_k \cos \omega_k = z + (-1)^{k+1} \gamma,$$

$$r_k \sin \omega_k = \beta + (-1)^k \delta,$$

$$z = 9,3 e^{0,06\lambda} \cos 0,06 \mu + 8,91 e^{-0,584\lambda} \cos 0,584 \mu - 0,47 \cos \pi (\lambda + 0,4) \operatorname{ch} \pi \mu,$$

$$\beta = 9,3 e^{0,06\lambda} \sin 0,06 \mu - 0,91 e^{-0,554\lambda} \sin 0,584 \mu + 0,47 \sin \pi (\lambda + 0,4) \operatorname{sh} \pi \mu,$$

$$\gamma = 34,4 \frac{\sin 2 \mu \operatorname{sh} 2 \lambda}{(\operatorname{ch} 2 \lambda + \cos 2 \mu)^2},$$

$$\delta = -34,4 \frac{1 + \cos 2 \mu \operatorname{ch} 2 \lambda}{(\operatorname{ch} 2 \lambda + \cos 2 \mu)^2}.$$

J'ai pu ainsi déterminer, en chaque nœud du réseau dessiné, l'inclinaison θ de la vitesse sur l'horizontale et sa grandeur, ainsi que la courbure des lignes de courant, ce qui m'a permis de tracer ces lignes avec une excellente approximation et de déterminer le débit d'écoulement entre ces différentes lignes. Nous avons constaté que si l'écoulement pouvait, effectivement, être irrotationnel dans la plus grande partie du plan, il se produisait un décollement au voisinage de la crête. Ce décollement, qui engendrait nécessairement, dans la nature, les phénomènes d'oscillation néfastes bien connus, pouvait être supprimé par une rectification appropriée du profil, rectification dont le calcul donnait toutes les caractéristiques. L'expérimentation sur modèle réduit a confirmé tous ces points.

Ces quelques indications suffisent, je pense, pour montrer que le procédé ainsi mis au point constitue un moyen rationnel pour analyser, *a posteriori*, un écoulement réalisé soit dans la nature, soit en modèle réduit. Il constitue également un moyen pour déterminer, *a priori*, au bureau de calculs, la forme d'un profil déversant rationnel satisfaisant à des conditions de finesse et de débit imposées à l'avance.

Lorsque l'on envisage le problème sous cet angle, on part d'expressions analytiques simples et l'on dresse un catalogue de profils pour lesquels on indique les caractéristiques essentielles (finesse, coefficients de débit, répartition des pressions sur le seuil). La connaissance de ces valeurs, jointe à l'application de règles plus ou moins empiriques, permet de prévoir les dangers de décollement et d'affouillement et de choisir, par suite, le profil qui est le mieux adapté au problème technique à résoudre. Le plan de travail est tout à fait analogue à celui qui a été accompli pour réaliser les catalogues de profils d'ailes sustentatrices.

APPLICATION A UN PROBLÈME D'AÉRODYNAMIQUE : ÉTUDE D'UN CONVERGENT DE SOUFFLERIES

On sait que, dans une soufflerie, le rôle du convergent est d'assurer une distribution de vitesse, aussi régulière que possible, dans la chambre d'expérience. Pour éviter l'encombrement et, plus encore, pour réduire l'influence néfaste du frottement de l'air sur les parois, on a intérêt à choisir des convergents courts mais, d'autre part, l'emploi de profils présentant une évolution trop accusée, entraîne des instabilités et parfois, même des décollements, qu'il faut à tout prix éviter. Il en résulte que le projet doit faire l'objet d'une étude très serrée de l'écoulement dans la zone de déflexion des filets gazeux, d'une part et dans la couche limite, d'autre part. Nous ne nous occuperons ici que du premier problème, et nous chercherons à déterminer des convergents qui

permettent un écoulement irrotationnel, sans variation de densité, avec une répartition de vitesse donnée sur l'axe de la veine.

Considérons le cas d'une veine à section rectangulaire très allongée. Dans la partie centrale, on désire réaliser une répartition de vitesse dont les variations sont définies par un développement de Taylor. Le champ cinématique en un point de la veine est alors défini par des formules du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \varphi(x) - \frac{y^2}{2} \varphi''(x) + \frac{y^4}{24} \varphi^{(4)}(x) \dots \\ v = -y \varphi'(x) + \frac{y^3}{6} \varphi'''(x) - \frac{y^5}{120} \varphi^{(5)}(x) + \dots \end{array} \right.$$

On peut dresser, comme il a été indiqué à propos des lames déversantes, un catalogue de collecteurs dont tous les éléments sont calculables, ce qui permet de comparer facilement leurs qualités en vue de leur adaptation à un projet déterminé.

Nous avons, par exemple, M. MOREAU et moi, calculé par cette méthode les collecteurs qui conduisent, sur l'axe de la veine, à des répartitions de vitesse de la forme $V = V_0 \sqrt{A + B \tanh x}$, pour des valeurs du coefficient de contraction égales à 2,75, 5 et 10. Dans la section d'entrée du collecteur, dont le rapport de contraction est égal à 5 et l'allongement à 48, le module de la vitesse est constant à 0,017 près et son inclinaison maximum, sur l'axe, ne dépasse pas 2 degrés; dans la section de sortie, le module est constant à 0,001 près et son inclinaison ne dépasse pas 0,2 degré. D'autre part, la vitesse varie très régulièrement dans le collecteur et les courbes isovitesse sont sensiblement des droites normales à l'axe du collecteur.

EXPOSÉ DE M. MOREAU

En complément à l'exposé de M. BOUJOR, j'indiquerai comment j'ai pu étendre le procédé d'étude des collecteurs plans à la conception d'un convergent de révolution assurant, dans les conditions voulues, le passage entre une tuyère cylindrique et une chambre d'expérience également cylindrique et, d'une façon plus générale, le passage entre une tuyère de forme quelconque et une chambre d'expérience dont la section est homothétique de celle de la tuyère.

On peut, pour étudier ce problème, transposer l'algorithme des fonctions analytiques que vient d'indiquer M. BOUJOR. La recherche d'un mouvement sans tourbillon ni variation de densité entraîne la recherche d'un champ méridien tel que l'on ait :

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x}(uy) + \frac{\partial}{\partial y}(vy) = 0.$$

Ces conditions prennent la place des conditions de monogénéité de Cauchy pour caractériser ce que nous appellerons un couple pseudo-analytique.

De la condition (1) résulte l'existence d'une fonction potentielle U telle que :

$$(3) \quad u = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial y};$$

— de la condition (2) résulte l'existence d'une fonction V , telle que :

$$(4) \quad u = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (Vy), \quad v = \frac{\partial V}{\partial x},$$

— et ces deux fonctions constituent elles-mêmes un couple pseudo-analytique, dont u et v formaient le couple dérivé. On a donc transposé la dérivation et l'intégration des fonctions analytiques.

Partant alors du couple unitaire :

$$u = 1, \quad v = 0,$$

on trouve, par intégrations successives, des couples qui prolongent les lois du type :

$$u = \frac{x^n}{n!},$$

d'où le prolongement de toute loi développable en série entière sur l'axe des x [l'existence de ce développement est essentielle au problème, l'harmonicité de la fonction $u(x, y, z)$ entraînant l'analyticité].

On en tire le développement de u et de v selon les puissances de y , lorsque la loi $u = \varphi(x)$ est connue :

$$(5) \quad \begin{cases} u(x, y) = \varphi(x) - \frac{y^2}{4} \varphi''(x) + \frac{y^4}{64} \varphi^{(iv)}(x) + \dots, \\ v(x, y) = -\frac{y}{2} \varphi'(x) + \frac{y^3}{16} \varphi'''(x) - \frac{y^5}{384} \varphi^{(v)}(x) + \dots \end{cases}$$

Le procédé s'utilise surtout quand les dérivées successives sont d'un calcul facile et n'atteignent pas des valeurs trop élevées.

Nous l'avons employé à partir de la fonction :

$$\varphi(x) = A + B \operatorname{erf} x,$$

$\operatorname{erf} x$ étant la fonction des erreurs, dont on possède des tables, ainsi que de ses six premières dérivées. Les convergents que l'on obtient ainsi sont parmi les plus avantageux.

Dans un autre ordre d'idées, on peut relier la solution du problème de révolution à celle du problème plan déjà traité.

Si $u_1(x, y)$ et $v_1(x, y)$ représentent la solution bidimensionnelle, il vient :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(x, y \cos \omega) d\omega, \\ v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_1(x, y \cos \omega) d\omega, \end{array} \right.$$

relations qui se prêtent au calcul numérique comme à l'évaluation graphique.

BIBLIOGRAPHIE

1^o *Sur la symétrie analytique :*

G. LÉRY. — Annales de l'École Normale Supérieure, 1915.

H. PONCIN. — Journal de mathématiques pures et appliquées, 1939.

2^o *Sur la permanence des égalités fonctionnelles dans le plan complexe :*

G. VALIRON. — Théorie des fonctions (Masson, édit.), p. 415.

3^o *Sur la détermination des points singuliers du système différentiel fondamental et la construction des surfaces de Riemann correspondantes :*

H. PONCIN. — *Sur les cavitations de forme permanente* (Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air).

4^o *Sur le problème des barrages déversoirs :*

ESCANDE. — Barrages (tome 3), Hermann, 1937.

N. B. — Ces indications ne visent pas à fournir une bibliographie complète de la question, mais seulement à indiquer les ouvrages où l'on trouvera cette bibliographie.
