RÉFUTATION DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN.

CLAUDE HENRI PICARD

Abstract. The hypothesis $M(x) = O(x^\beta)$ with $\beta < 1$ contradicts the Gegenbauer's theorem (see [10] §18.6),

$$N(u) = \sum_{n \leqslant u} |\mu(n)| = \frac{6}{\pi^2}u + O(\sqrt{u})$$

As the Riemann's Hypothesis implies $M(x) = O(x^{1/2+\epsilon})$ for all $\epsilon > 0$, the Riemann's Hypothesis is false.

1• La fonction ζ de Riemann, définie par

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}} \tag{1}$$

lorsque $\sigma > 1$ fait l'objet d'une conjecture non démontrée de Riemann datant de 1859, l'hypothèse de Riemann selon laquelle $\sup_\rho \Re e(\rho) = 1/2$ où ρ désigne un zéro de la fonction ζ de Riemann.

Les zéros de ζ se répartissent en deux ensembles infinis, d'une part les zéros dits triviaux de la forme $\rho = -2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, et d'autre part les zéros dits non triviaux qui sont tous dans la bande $]0, 1[$.

Dans son mémoire de 1859 [19], Bernard Riemann laissa cinq problèmes ouverts [1]. Le premier fut résolu par Hadamard en 1893 [7], trois autres par Von Mangoldt entre 1894 et 1905 [3, page 37]. Il reste aujourd'hui un seul problème non résolu : l'hypothèse de Riemann. On sait qu'il existe une infinité de zéros non triviaux dans la bande $]0, 1[$ mais on n'a jamais réussi à montrer qu'il existait un $\beta_0 \in [1/2, 1[$ tel que tout zéro ait une partie réelle $\leqslant \beta_0$.

Hardy, en 1914, a montré qu'il y avait une infinité de zéros de parties réelles 1/2 et Conrey, en 1989 [1], montra qu'au moins 40,77% des zéros non triviaux sont de parties réelles 1/2.

Les tentatives de démonstration de l'hypothèses de Riemann ont, jusqu'à maintenant, échoué. Elles semblent commencer par l'annonce de Halphen (1883) qui restera sans lendemain, suivi, dans une lettre à Hermite de 1885, de Stieltjes qui lui écrit qu'il a démontré que $M(u) = \sum_{n \leqslant u} \mu(n) = O(\sqrt{u})$ et, appliquant la

Date: 9 mars 2018.

1. Edwards [3] en indique six.

formule

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{M(u)}{u^s}du,$$

qui fait le lien entre $M(x)$ et l'hypothèse de Riemann, il en déduit facilement l'hypothèse de Riemann. Mais quand Mittag-Leffler lui demande des explications, celles-ci sont vagues. À la mort de Stieltjes le 31 décembre 1894, on ne découvrit pas de démonstration de l'hypothèse de Riemann ni de preuve de son affirmation sur $M(x)$. La même mésaventure survient à Jensen en 1899, dans le mémoire qui démontre la formule qui porte son nom [13]. Mertens, en 1897 [15], énonce une hypothèse de croissance de la fonction $M(x)$ à partir de constatations numériques. $M(x)$ serait majorée par $\sqrt{x}$. Cela entraine, comme pour Stieltjes, l'hypothèse de Riemann et la simplicité des zéros. Au congrès international de mathématiques de 1912, Von Sterneck [22] va plus loin et propose $M(x) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Cette conjecture est numériquement réfutée par Neubauer [16] en 1963 en montrant que $M(7760000000) = 47465 > \frac{1}{2}\sqrt{7760000000} = 44045,\dots$ alors que Jurkat [14] avait montrer, en 1961, que la conjecture de Von Sterneck avait une infinité de contre-exemples, mais sans en exhiber un seul.

En 1985, Odlysko & Te Riele [17] réfutent la conjecture de Mertens en montrant que $\limsup_{x\to\infty} M(x)/\sqrt{(}x) > 1,06$ et $\liminf_{x\to\infty} M(x)/\sqrt{(}x) < -1,009$. Depuis, ces valeurs ont été améliorées à, respectivement, 1,826054 et -1,837625 (Hurst [11]) alors qu'on conjecture que les vraies valeurs sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$ comme l'a montré Ingham [12] en 1942, sous l'hypothèse de Riemann et une hypothèse d'indépendance linéaire des zéros.

Sur l'ordre, sans hypothèse, de $M(x)$, on a réussi à montrer que $M(x) = O(x\exp(-c\sqrt[8+\epsilon]{\ln x})$ au début du XXe siècle (Landau [6]) qu'on ramena à $M(x) = O(x\exp(-c\sqrt{\ln x})$ avant que la région sans zéro de Vinogradov et Korobov ne soit connue et permette d'avoir $M(x) = x\exp(-c(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-1/5})$ (Walfisz [23], 1963) qui reste, en 2018, le meilleur résultat connu. Mais on ne connaît toujours pas l'ordre exact de $M(x)$ qui est lié à l'hypothèse de Riemann de manière étroite.

2• L'objet de ce mémoire est de démontrer que l'hypothèse de Riemann est fausse. Pour cela, il est montré que $M(x)$ ne peut être $O(x^\beta)$, pour $\beta < 1$ sans qu'on ait une contradiction. Les calculs se feront à partir de la fonction $1/\zeta$ selon la formule, valable pour $\sigma > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(\sigma+it)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}} = (\sigma+it)\int_1^{\infty} \frac{M(u)}{u^{\sigma+it}}du, \tag{2}$$

où $\mu(n)$ est la fonction de Möbius définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1. \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ se décompose en } r \text{ nombres premiers distincts.} \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré entier autre que 1.} \end{cases} \tag{3}$$

La fonction $\zeta(s)$ admet un unique pôle, qui est simple, en $s = 1$. On étend donc par continuité la fonction $1/\zeta(s)$ en $s = 1$ en posant $1/\zeta(1) = 0$ (zéro simple). Le principe de symétrie de Schwarz permet de ne regarder que le cas des $t > 0$, ce que nous ferons.

On pose $\beta^* = \sup_\rho \Re e(\rho)$. On sait que $\beta^* \in [1/2, 1]$, la valeur $1/2$ correspondant à l'hypothèse de Riemann. β^* est également l'infimum des β tels que $|M(u)| = O(u^\beta)$.

Le schéma de la preuve est le suivant :

On commence par admettre que $M(x) \leqslant mx^\beta$ avec $\beta < 1$. La preuve commence par généraliser le théorème 8.7 du traité de Titschmarsh qui exprime que

$$\sup_t \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}} \right| = \frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)},$$

dans le but de minorer pour certains t l'intégrale

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it}} du \right|,$$

en utilisant le théorème de Gegenbauer,

$$N(u) = \sum_{n \leqslant u} |\mu(n)| = \frac{6}{\pi^2} u + O(\sqrt{u}).$$

On majore l'intégrale sans trop de difficulté et on obtient ainsi un encadrement. À partir de l'encadrement, le rapport du minorant sur le majorant doit rester toujours plus petit que 1. Or ce rapport a son terme principal $O(x^{1-\beta})$ et donc tend vers l'infini, si $\beta < 1$, quand $x \to \infty$, ce qui est la contradiction cherchée. On en déduit que $\beta^* = 1$ et donc que l'hypothèse de Riemann est fausse ainsi que les conjectures de Mertens.

3• On rappelle la formule sommatoire d'Abel. Soient a, b deux nombres positifs, une suite (a_n) de nombres complexes et $\varphi(u)$ une fonction à valeurs complexes continue dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

Soit $A(u) = \sum_{n=1}^{u} a_n$. On a l'identité

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant b} a_n \varphi(n) = [A(u)\varphi(u)]_{u=a}^{u=b} - \int_a^b A(u)\varphi'(u) du. \tag{4}$$

Cette formule permet de démontrer, par application directe, la formule

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}} = \frac{M(x)}{x^{\sigma+it}} + (\sigma + it) \int_1^x \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du. \tag{5}$$

4• Le traité de Titchmarsh sur la fonction zêta de Riemann [20] contient la proposition suivante comme théorème 8.7, où $s = \sigma + it$.

Proposition 1. *Si $\sigma > 1$, alors*

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leqslant \frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)} \tag{6}$$

pour toute les valeurs de t, alors que, quel que soit $\epsilon \in]0,1[$,

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| > (1-\epsilon)\frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)} \tag{7}$$

pour des valeurs de t aussi grandes qu'on veut.

Dans la suite on utilisera le résultat suivant, dans la même veine que la proposition 1.

Proposition 2. *Soient $x > 1$ et $\sigma > 1$ deux réels. On a pour tout $t > 0$*

$$\left|\sum_{n\geqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant x}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}}, \tag{8}$$

et il existe pour tout $\epsilon \in]0,1[$ au moins une valeur de $t > 0$ telle que

$$\left|\sum_{n\geqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}}\right| \geqslant (1-\epsilon)\sum_{n\geqslant x}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}}. \tag{9}$$

Démonstration. Supposons au contraire que la seconde partie de la proposition ne soit pas exacte. Soient $\sigma > 1$, $x > 1$ et $\epsilon \in]0,1[$ donnés tels que pour tout $t > 0$ on ait

$$\left|\sum_{n\geqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}}\right| < (1-\epsilon)\sum_{n\geqslant x}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}}. \tag{10}$$

Coupons la série en deux parties

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}} = \sum_{n<x}\frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}} + \sum_{n\geqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}}. \tag{11}$$

la somme est majorée en module par

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}}\right| < \sum_{n<x}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}} + (1-\epsilon)\sum_{n\geqslant x}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}}. \tag{12}$$

Soit

$$\theta(x) = \sum_{n\geqslant x}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}} \Big/ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(\sigma)}\sum_{n\geqslant x}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}} < 1. \tag{13}$$

La proposition 1 nous dit qu'il existe des $t > 0$ tels que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}}\right| > (1-\epsilon\theta(x))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}} = \sum_{n<x}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}} + (1-\epsilon)\sum_{n\geqslant x}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}}, \tag{14}$$

ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse formulée (10) à travers (12). L'hypothèse (10) est donc fausse et la proposition 2 est démontrée. ☐

Corollaire 3. *Pour un $\epsilon \in]0,1[$ donné, l'ensemble $\mathscr{T}_\epsilon(x)$ des $t > 0$ qui satisfont à l'inégalité*

$$\left|\sum_{n\geqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}}\right| \geqslant (1-\epsilon)\sum_{n\geqslant x}\frac{|\mu(n)|}{n^\sigma} \tag{15}$$

n'est jamais vide, quel que soit $x \in [1,\infty[$.

Démonstration. Immédiat, le cas $x = 1$ étant la proposition 1. ☐

Remarque 4. *$\mathscr{T}_\epsilon(x)$ n'a pas de raison, à priori, d'être le même pour une autre valeur de x.*

5• Tout ce mémoire repose une la seule hypothèse suivante

Hypothèse 5.

$$\beta^* < 1. \tag{16}$$

Un corollaire immédiat est l'existence d'un β tel que

$$|M(u)| = \left|\sum_{n\leqslant u}\mu(n)\right| \leqslant mu^\beta \tag{17}$$

où $\beta^* < \beta < 1$, $m = m(\beta) > 0$ étant un réel approprié.

6• Soient $x > 1$, $\sigma > 1$ et $t \geqslant 0$ trois réels. De la formule sommatoire d'Abel, on tire, en posant $s = \sigma + it$,

$$\left|s\int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{s+1}}du\right| = \left|\frac{1}{\zeta(s)} - \sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^s} + \frac{M(x)}{x^s}\right| \leqslant \zeta(\sigma) + mx^{\beta-\sigma} \leqslant \zeta(\sigma) + m \tag{18}$$

car pour la somme partielle, comme $|\mu(n)| \leqslant 1$, il en résulte la majoration

$$\left|\sum_{n>x}\frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma} \leqslant \zeta(\sigma) \tag{19}$$

dans la région $\sigma > 1$; enfin $x^{\beta-\sigma}$, qui est décroissante, est majorée par 1. Donc il existe un $B(x)$ tel que

$$\left|\int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}}du\right| \leqslant \frac{B(x)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}}. \tag{20}$$

7• Soient les ensembles fonctionnels

$$\mathscr{L} = \left\{B(x) : x \in [1,\infty[\to \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \left|\int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}}du\right| \leqslant \frac{B(x)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}} \quad \forall t\right\},$$

et

$$\mathscr{G} = \left\{ G(x) : x \in [1, \infty[\to \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant G(x) \quad \forall t \right\}.$$

Ces ensembles ne sont pas vides. $\mathscr{L}$ contient toutes les fonctions constantes $\geqslant \zeta(\sigma) + m$ par la formule (18). Et par suite du lemme 6, $\mathscr{G}$ contient toutes les fonctions constantes $\geqslant [\zeta(\sigma) + m]/\sigma$. On pose

$$A(x) = \sup_t \sqrt{\sigma^2 + t^2} \left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right|$$

et

$$\alpha(x) = \sup_t \left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right|$$

qui sont respectivement l' infimum de $\mathscr{L}$ et l'infimum de $\mathscr{G}$. Comme les ensembles $\mathscr{L}$ et $\mathscr{G}$ ne sont pas vides, $A(x)$ et $\alpha(x)$ sont finis pour tout $x \in [1, \infty[$.

$A(x) \in \mathscr{L}$ d'après sa définition. De même $\alpha(x) \in \mathscr{G}$ d'après sa définition.

Par conséquent, pour tout $B(x) \in \mathscr{L}$ et tout t,

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant \frac{A(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} \leqslant \frac{B(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}}. \tag{21}$$

et, pour tout $g(x) \in \mathscr{G}$ et tout t,

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant \alpha(x) \leqslant g(x). \tag{22}$$

Lemme 6. *De tout élément de $\mathscr{L}$ on peut déduire un élément de $\mathscr{G}$.*

Démonstration. Soit $B(x) \in \mathscr{L}$. On a

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant \frac{B(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} \leqslant \sup_t \frac{B(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} = \frac{B(x)}{\sigma} \in \mathscr{G}.$$

□

Lemme 7. *$\sigma\alpha(x) = A(x)$.*

Démonstration. On a

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant \frac{A(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} \leqslant \sup_t \frac{A(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} = \frac{A(x)}{\sigma} \in \mathscr{G}$$

et $\alpha(x)$, étant le plus petit des majorants de $\mathscr{G}$, est tel que $\alpha(x) \leqslant A(x)/\sigma$.

Admettons que l'inégalité soit stricte : $\sigma\alpha(x) < A(x)$. Alors, soit on a

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant \frac{\sigma\alpha(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} < \frac{A(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}}$$

mais cela viole manifestement la définition de $A(x)$ en tant qu'infimum de $\mathscr{L}$, soit on a

$$\frac{\sigma\alpha(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} < \left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant \frac{A(x)}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}}$$

qui viole la définition de $\alpha(x)$ en tant qu'infimum de $\mathscr{G}$. En effet, faisant $t = 0$, l'inégalité donne

$$\alpha(x) < \left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+1}} du \right|$$

ce qui est impossible. Donc $\sigma\alpha(x) = A(x)$. □

On a

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant \int_x^\infty \frac{|M(u)|}{u^{\sigma+1}} du = K(x) \in \mathscr{G}.$$

Proposition 8. *Pour tout* t

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant \frac{\sigma m x^{\beta-\sigma}}{(\sigma-\beta)\sqrt{\sigma^2+t^2}}. \tag{23}$$

Démonstration. Comme $K(x)$ est un majorant de l'intégrale, c'est un majorant de $\alpha(x) = A(x)/\sigma$. Donc

$$A(x) \leqslant \sigma K(x),$$

D'où

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| \leqslant \frac{A(x)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}} \leqslant \frac{\sigma K(x)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}} = \frac{\sigma m x^{\beta-\sigma}}{(\sigma-\beta)\sqrt{\sigma^2+t^2}}. \tag{24}$$

□

8• La formule sommatoire d'Abel donne, pour tout $x \geqslant 1$, l'égalité

$$\sum_{n \geqslant x} \frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}} + \frac{M(x)}{x^{\sigma+it}} = (\sigma+it) \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du. \tag{25}$$

On lui applique la proposition 2 et l'hypothèse 5. On en déduit que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, quel que soit $t \in \mathscr{T}_\epsilon(x)$, on a

$$\left| \int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du \right| > \frac{(1-\epsilon)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}} \sum_{n \geqslant x} \frac{|\mu(n)|}{n^\sigma} + R(x,t), \tag{26}$$

$$\text{avec} \qquad |R(x,t)| = \frac{|M(x)|}{x^\sigma \sqrt{\sigma^2+t^2}} \leqslant \frac{m x^{\beta-\sigma}}{\sqrt{\sigma^2+t^2}}.$$

9• Comme Gegenbauer a montré que (voir [5] et [10] §18.6)

$$N(u) = \sum_{n \leqslant u} |\mu(n)| = \frac{6}{\pi^2} u + O(\sqrt{u}), \tag{27}$$

on en conclut par la formule sommatoire d'Abel

$$\sum_{n \geqslant x} \frac{|\mu(n)|}{n^\sigma} = \sigma \int_x^\infty \frac{N(u)}{u^{\sigma+1}} du - \frac{N(u)}{x^\sigma} = \frac{6x^{1-\sigma}}{\pi^2(\sigma-1)} + O\left(x^{1/2-\sigma}\right). \tag{28}$$

10• Résumons. Pour tout $x \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du\right| \leqslant \frac{\sigma m x^{\beta-\sigma}}{(\sigma-\beta)\sqrt{\sigma^2+t^2}}. \tag{29}$$

Mais, après report de (28) dans (26), pour le même x, quel que soit $\epsilon \in]0,1[$, quel que soit $t \in \mathscr{T}_\epsilon(x)$, on a

$$\left|\int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du\right| > \frac{(1-\epsilon)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}}\left[\frac{6x^{1-\sigma}}{\pi^2(\sigma-1)} + O\left(x^{1/2-\sigma}\right)\right] - \frac{m x^{\beta-\sigma}}{\sqrt{\sigma^2+t^2}}. \tag{30}$$

Nous allons montrer que c'est impossible. Rappelons pour cela que, quel que soit $x \geqslant 1$, l'ensemble $\mathscr{T}_\epsilon(x)$ n'est jamais vide. On prend donc toujours $t \in \mathscr{T}_\epsilon(x)$ à partir de maintenant. On a donc l'encadrement défini par (29) et (30), valable pour tout $x \geqslant 1$:

$$\frac{m x^{\beta-\sigma}}{(\sigma-\beta)\sqrt{\sigma^2+t^2}} \geqslant \left|\int_x^\infty \frac{M(u)}{u^{\sigma+it+1}} du\right| > \frac{(1-\epsilon)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}}\left[\frac{6x^{1-\sigma}}{\pi^2(\sigma-1)} + O\left(x^{1/2-\sigma}\right)\right] - \frac{m x^{\beta-\sigma}}{\sqrt{\sigma^2+t^2}}.$$

Considérons uniquement les seconds membres de (29) et (30). Le rapport du second membre de (30) sur le second membre de (29) est donc toujours plus petit que 1, pour tout $x \geqslant 1$. Après simplification, ce rapport vaut

$$(1-\epsilon)\frac{6(\sigma-\beta)}{m\pi^2(\sigma-1)} x^{1-\beta} + O\left(x^{1/2-\beta}\right) - \sigma + \beta. \tag{31}$$

et on voit bien que, lorsque x tend vers l'infini, si $\beta < 1$, cette quantité tend vers l'infini et donc dépasse 1 à un moment donné, ce qui est impossible. Donc β ne peut être choisi tel que $\beta^* < \beta < 1$, ce qui impose, comme $\beta^* \leqslant 1$, $\beta^* = 1$.

Théorème 9.

$$\beta^* = \sup\{\rho \mid \zeta(\rho) = 0\} = \sup\{\beta \mid M(u) = O(u^\beta)\} = 1.$$

L'hypothèse de Riemann est fausse. Plus précisément

- $M(x) = \Omega_\pm(x^\delta)$ *pour tout* $\delta < 1$ *;*
- *L'abscisse de convergence simple de la série de Dirichlet* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$ *coïncide avec son abscisse de convergence absolue ;*
- *La fonction* ζ *admet une suite infinie de zéros* $\{\rho_n\}$ *dans la bande critique telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \Re e(\rho_n) = 1; \tag{32}$$

- *Les hypothèses de Mertens généralisée* $M(u) = O(\sqrt{u})$ *et de Mertens affaiblie*

$$\int_1^x \frac{M^2(u)}{u^2} du = O(\ln(x)) \tag{33}$$

sont fausses.

Démonstration. On a montré précédemment que $\beta^* = 1$, or l'hypothèse de Riemann implique $M(x) = O(x^{1/2+\epsilon})$ ([20], théorème 14.25(C), page 370), quel que soit $\epsilon > 0$. Donc elle implique $\beta^* = 1/2$. Elle est donc fausse ainsi que la conjecture de Mertens généralisée selon laquelle $M(x) = O(\sqrt{x})$.

Le premier point résulte de $\beta^* = 1$ par application du corollaire standard du théorème de Phragmen-Landau ([2], page 33-04).

Le deuxième point résulte de $\beta^* = 1$ par les formules qui donnent les abscisses de convergence simple et absolue d'une série de Dirichlet ([9], théorèmes 7 et 8 page 8).

Pour le troisième point, s'il existait une ligne verticale $\Re e(s) = \sigma < 1$ tel que $1/\zeta(s)$ n'ait aucun pôle à droite de cette ligne, on pourrait déduire $M(x) = O(x^\sigma)$ et $\beta^* \leqslant \sigma$. Comme ceci n'a pas lieu et que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur $\Re e(s) = 1$, la bande $[1-\delta, 1[$ admet au moins un pôle pour tout $\delta > 0$. Il existe donc une infinité de pôles au voisinage immédiat de la droite $\Re e(s) = 1$.

Les hypothèses de Mertens, de Mertens généralisée et de Mertens affaiblie impliquent l'hypothèse de Riemann, elles sont donc fausses. □

Remarque 10. *Charles Pisot, d'après Saffari* [18], *a conjecturé que l'ensemble des parties réelles des zéros non triviaux de la fonction* ζ *de Riemann est dense dans* $[0, 1]$.

Remerciements 11. *Je remercie monsieur Jacques Gélinas d'avoir assuré la relecture attentive de ce mémoire tout au long de sa réalisation.*

Références

[1] J. B. Conrey, *At least two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 20, no. 1, 79–81, 1989.

[2] F. Dress, *Théorèmes d'oscillations et fonction de Möbius*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux 1983-1984, exposé n° 33.

[3] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Dover publication, Mineola, New York, réimpression 2001 de Academic press, 1974.

[4] W. J. Ellison & M. Mendès-France, *les nombres premiers*, Hermann, Paris, 1975.
W. J. Ellison & F. Ellison, *Prime Numbers*, John Wiley and Sons, New York,1985.

[5] Gegenbauer, *Asymptotiche gesetze der zahlentheorie*, Denkschriften Akad. Wien, 49, abt 1, 37-80, 1885.

[6] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 2 volumes, Teubner, 1909.

[7] J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 9, p. 171-216, 1893.

[8] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction* ζ *de Riemann*, Comptes rendus hebdomadaires de l'académie des sciences de Paris, séance du 6 avril 1914, Tome 158, page 1012-1014.

[9] G. H. Hardy & M. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge tracts n° 18, 1915.

[10] G. H. Hardy & E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*,5^e édition, Clarendon press, Oxford,1979.

[11] G. Hurst,*Computations of the Mertens function and improved bounds on the Mertens conjecture*. arXiv :1610.08551, 2016.

[12] A. E. Ingham, *On two conjectures in the theory of numbers*, American journal of mathematics, 64 :313-319, 1942.

[13] J. Jensen, *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions*, Acta Mathematica, 22 (1) : 359–364, 1899.

[14] W. B. Jurkat, *Eine Bemerkung zur Vermutung von Mertens*, Nachrichten der Österr. Math. Ges., Sondernummer Ber. ü.d. V. Österr. Mathematikerkongress, p. 11, Vienna, 1961.

[15] F. Mertens,*Über eine zahlentheoretische Funktion*, Sitzungsberichte Akad. Wien 106, Abt. 2a, 761-830, 1897.

[16] G. Neubauer,*Eine empirische Untersuchung zur Mertensschen Funktion*, Numer. Math. 5,1-13, 1963.

[17] Odlysko & Te Riele, *Disproof of the Mertens conjecture*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 357 : 138–160, 1985.

[18] B. Saffari, *An Ω-theorem of the 'non-effective' type*, Proceedings of the London Mathematical Society, Volume s3-35, Issue 1, 1 July 1977, Pages 181–192.

[19] B. Riemann,*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, Monatsberichte der Berliner Akademie 1859, Berlin, 671–680, 1860.

[20] E. C. Titchmarsh,*The theory of the Riemann zeta function*, Oxford, Clarendon press, 1951.

[21] G. Valiron,*Théorie générale des séries de Dirichlet*, mémorial des sciences mathématiques n^o 17, Gauthier-Villars, Paris, 1924.

[22] R. D. von Sterneck, *Neue empirische Daten über die zahlentheoretischen funktion* $\sigma(n)$, Proc. 5th Int. Congress of Math., 341-343,Cambridge, 1913.

[23] Walfisz,*Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

26 rue de la Convention, 71130 Gueugnon, France
E-mail address, C. H. Picard: `claudeh5@free.fr`