

# Quelques résultats mathématiques et numériques sur la sensibilité paramétrique de la POD

Nissrine Akkari, Aziz Hamdouni, Erwan Liberge, Mustapha Jazar

► **To cite this version:**

Nissrine Akkari, Aziz Hamdouni, Erwan Liberge, Mustapha Jazar. Quelques résultats mathématiques et numériques sur la sensibilité paramétrique de la POD. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722071

**HAL Id: hal-01722071**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01722071>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Quelques résultats mathématiques et numériques sur la sensibilité paramétrique de la POD

Nissrine AKKARI <sup>1,2a</sup>, Aziz HAMDOUNI <sup>1b</sup>, Erwan LIBERGE <sup>1c</sup>, Mustapha JAZAR <sup>2d</sup>

<sup>1</sup> Université de La Rochelle, Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement (LaSIE),

<sup>2</sup> Université Libanaise, Laboratoire de Mathématiques et Applications (LaMA), mjazar@ul.edu.lb

<sup>a</sup> nissrine.akkari@univ-lr.fr

<sup>b</sup> aziz.hamdouni@univ-lr.fr

<sup>c</sup> erwan.liberge@univ-lr.fr

<sup>d</sup> mjazar@ul.edu.lb

**Résumé** — Dans cette communication, nous établissons un résultat mathématique sur la sensibilité paramétrique des modèles d'ordre réduit (ROM) obtenus par la méthode de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Nous nous intéressons plus particulièrement aux équations de Navier-Stokes pour un écoulement fluide bidimensionnel et incompressible. Nous présentons aussi une comparaison avec des simulations numériques pour la configuration d'un écoulement instationnaire dans un canal autour d'un cylindre carré.

**Mots clés** — Modèle d'ordre réduit, POD, Navier-Stokes, évolution paramétrique, sensibilité, estimation d'erreurs

## 1 Introduction et résultat principal

### 1.1 Introduction

Les études des problèmes aux limites en mécanique avec évolution paramétrique interviennent dans différentes applications, comme l'étude de stabilité, l'optimisation de forme, le contrôle, les problèmes inverses, etc... La résolution du problème paramétré complet peut être très coûteuse. Par exemple en mécanique des fluides, ces études nécessitent la simulation des équations de Navier-Stokes pour différents nombres de Reynolds. Or pour des nombres de Reynolds assez grands, une simulation complète peut être onéreuse, et donc a fortiori quand ce nombre balaye un grand intervalle. Ainsi, depuis quelques années ces problèmes sont approchés par des techniques de réduction de modèle (ROM) type POD par exemple [7]. Le problème qui se pose alors, est de trouver le moyen pour tenir compte de l'évolution paramétrique dans ces modèles réduits. Il existe plusieurs algorithmes numériques qui génèrent un modèle d'ordre réduit, adapté et sensible à d'éventuels changements des paramètres caractéristiques d'un écoulement fluide ; Dans le cas où la technique de réduction est la POD, nous pouvons citer : L'algorithme numérique d'interpolation géométrique de modèles réduits à différentes valeurs paramétriques [3]. L'algorithme itératif de Greedy qui enrichit une base POD calculée à une certaine valeur paramétrique, en évaluant les erreurs obtenues a posteriori par projection orthogonale de solutions associées à d'autres valeurs paramétriques [1, 6].

Néanmoins, dans beaucoup d'applications comme par exemple les problèmes de contrôle optimal [2], le ROM est obtenu à partir d'une base POD de référence calculée pour une valeur déterminée du paramètre. D'où l'importance de déterminer au préalable une région de confiance d'un modèle ROM-POD à un paramètre donné, où il approche le problème complet à une précision fixée au préalable. Il est important aussi de se poser la question : Comment augmenter la dimension du modèle réduit, de manière à élargir la région de confiance sans que la réduction de modèles perde son sens ? Cette région de confiance peut servir dans les applications que nous venons de citer précédemment : Interpolation géométrique de modèles réduits valables chacun dans une région déterminée au préalable ; Initialisation de l'algorithme de Greedy, etc...

Nous proposons une réponse à ces deux questions, et nous nous plaçons dans le cadre des équations de Navier-Stokes pour un écoulement fluide bidimensionnel et incompressible. Le paramètre de ces équations est le nombre de Reynolds décrit par la variation de la viscosité  $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ , pour une longueur et une vitesse de référence fixes. Notre résultat principal établit une estimation a priori de l'erreur entre la solution du modèle réduit par POD et celle du problème semi-discret en espace associé aux équations de Navier-Stokes. Nous démontrons que cette erreur est contrôlée par la distance entre deux viscosités distinctes, multipliée par un terme qui décroît quand la dimension  $N$  du modèle réduit augmente (Résultat 1).

## 1.2 Formulation du problème

Notons,  $X = [L^2(\Omega)]^2$ ,  $V = \{v \in [H_0^1(\Omega)]^2, \operatorname{div} v = 0\}$  où  $\Omega$  est un ouvert borné, connexe et lipschitzien de  $\mathbb{R}^2$  et  $V_h$  un sous espace de  $V$  de dimension  $M$ . Soient  $\lambda > 0$ ,  $u_0$  donnée dans  $V$  et  $f$  donnée dans  $L_{loc}^2([0, +\infty[, X)$ . Pour simplifier, on supposera que  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ .

Soient  $a$ ,  $b$  et  $F_t$  trois formes sur  $X$  respectivement bilinéaire coercive, trilinéaire et linéaire, définies par :

- $\forall v_1, v_2 \in X, a(v_1, v_2) = (\nabla v_1, \nabla v_2)_{[L^2(\Omega)]^4}$ .
- $\forall v_1, v_2, v_3 \in X, b(v_1, v_2, v_3) = (\operatorname{div}(v_1 \otimes v_2), v_3)_X$ .
- $\forall v \in X, F_t(v) = (f(t), v)_X$ .

(,) désigne un produit scalaire dans l'espace correspondant.

Nous notons  $C_p$  la constante relative à la coercivité de la forme bilinéaire  $a$ , qui n'est autre ici que le carré d'une constante de Poincaré.

Nous considérons les équations de Navier-Stokes pour un écoulement fluide bidimensionnel et incompressible données par leur formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, v \right)_X + b(u_\lambda(t), u_\lambda(t), v) = -\lambda a(u_\lambda(t), v) + F_t(v) \quad \forall v \in V \\ (u_\lambda(0), v)_X = (u_0, v)_X \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, on démontre qu'il existe une unique solution globale des équations de Navier-Stokes vérifiant :  $u_\lambda \in C^0([0, +\infty[, V) \cap L_{loc}^2([0, +\infty[, ([H^2(\Omega)]^2 \cap V))$ ,  $\frac{du_\lambda}{dt} \in L_{loc}^2([0, +\infty[, X)$  [4].

L'approximation Galerkin des équations de Navier-Stokes dans  $V_h$  est donnée par :

$$\begin{cases} \left( \frac{du_\lambda^h}{dt}, v \right)_X + b(u_\lambda^h(t), u_\lambda^h(t), v) = -\lambda a(u_\lambda^h(t), v) + F_t(v) \quad \forall v \in V_h \\ (u_\lambda^h(0), v)_X = (u_0^h, v)_X \quad \forall v \in V_h \end{cases}$$

Nous désignons par  $K$  une borne supérieure de  $\|u_\lambda^h\|_X$ , sur un intervalle de temps  $\mathbf{T} = (0, T)$ . Nous notons  $(\mu_n^{\lambda_0})_{n=1, \dots, M}$  et  $\Phi^{\lambda_0} = (\Phi_n^{\lambda_0})_{n=1, \dots, M}$  respectivement les deux suites des valeurs propres et vecteurs propres POD associées à une solution de référence  $u_{\lambda_0}^h$  sur l'intervalle de temps  $\mathbf{T}$ . Nous supposons que la base POD  $\Phi^{\lambda_0}$  est hilbertienne dans l'espace  $V_h$  et orthonormale au sens du produit scalaire de l'espace  $X$ . Nous nous intéressons à l'étude paramétrique du modèle réduit par POD qui décrit l'évolution d'une approximation  $\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t)$  de  $u_\lambda^h(t)$ , dans le sous espace POD de référence dont la dimension est  $N \ll M$ . Plus précisément, nous nous basons sur l'étude de la sensibilité paramétrique de l'approche Galerkin appliquée à  $u_\lambda^h$  par la base POD  $\Phi^{\lambda_0}$  de référence. Il apparaît alors implicitement le problème du contrôle du rythme de décroissance de l'erreur obtenue à cause de cette approximation.

## 1.3 Résultat principal

Sous les hypothèses précédentes, nous démontrons le résultat suivant :

## Résultat 1

$$\|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq f_1^{\lambda_0}(N) + f_2^{\lambda_0}(N) \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{\lambda_0},$$

où  $f_1^{\lambda_0}(N)$  est un terme qui s'exprime en fonction du reste de la série des valeurs propres POD associées à  $u_{\lambda_0}^h$  et  $f_2^{\lambda_0}(N)$  est le terme générale d'une suite décroissante, pour laquelle  $f_2^{\lambda_0}(0) < \frac{1}{2}$  et  $f_2^{\lambda_0}(N) = 0$  quand  $N = M$ . Qui s'écrit :

$$f_2^{\lambda_0}(N) = \sum_{n=N+1}^M \|f_n^{\lambda_0}\|_X^2, \quad f_n^{\lambda_0} = \left(f_n^{1, \lambda_0}, f_n^{2, \lambda_0}\right)^T :$$

$$f_n^{1, \lambda_0}(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^{1, \lambda_0}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad \text{et} \quad f_n^{2, \lambda_0}(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^{2, \lambda_0}(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Dans ce qui suit, nous donnons les grandes étapes de la preuve de ce résultat qui seront réparties selon plusieurs sections : Dans la section 2, nous établissons des estimations a priori d'erreurs POD-Galerkin. Dans la section 3, nous démontrons notre résultat principal. Dans la section 4, nous présentons des simulations numériques dans le cadre de l'étude d'un écoulement autour d'un cylindre carré.

## 2 Etude de l'approche POD-Galerkin pour un paramètre fixe

### 2.1 Résultats préliminaires

**Lemme 1**  $\forall v \in V_h$ ,  $\|\nabla v\|_X \leq \sqrt{\|S\|} \|v\|_X$ , où  $S$  est la matrice symétrique de dimension  $M$ , définie par :  $S_{ij} = a(\Phi_i^{\lambda_0}, \Phi_j^{\lambda_0})$  et  $\|S\|$  est sa norme spectrale.

**Preuve.** Pour la preuve de ce lemme, nous référons à [5].

**Lemme 2** Les deux formes  $a$  et  $b$  sont bornées sur l'espace  $V_h$  muni de la norme de l'espace  $X$  ; Nous notons  $C_a$  et  $C_b$  leurs bornes respectives.

**Preuve.** Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et nous utilisons l'injection continue de Sobolev  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  et le résultat du lemme 1. Alors, nous démontrons que :

–  $\forall v_1, v_2, v_3 \in V_h$  :

$$\begin{aligned} |b(v_1, v_2, v_3)| &\leq \|v_1\|_{[L^4(\Omega)]^2} \|\nabla v_2\|_{[L^2(\Omega)]^4} \|v_3\|_{[L^4(\Omega)]^2} \\ &\leq (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \|v_1\|_X \|v_2\|_X \|v_3\|_X, \end{aligned}$$

où  $C_4^1$  est la constante relative à l'injection continue précédente.

–  $\forall v_1, v_2 \in V_h$  :

$$\begin{aligned} |a(v_1, v_2)| &\leq \|\nabla v_1\|_X \|\nabla v_2\|_X \\ &\leq \|S\| \|v_1\|_X \|v_2\|_X \end{aligned}$$

Nous notons dorénavant,  $C_a = (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2}$  et  $C_b = \|S\|$ .

Ce qui termine la preuve du lemme.

### 2.2 Résultat de décroissance du carré de l'erreur POD-Galerkin à une viscosité $\lambda_0$

#### Proposition 1

$$\|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq f_1^{\lambda_0}(N),$$

où  $f_1^{\lambda_0}(N) = C(C_p, C_a, C_b, K, \lambda_0, T) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}$ .

**Preuve.** Dans tout ce qui suit,  $\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N$  désigne l'opérateur de la projection orthogonale sur le sous-espace POD de dimension  $N$ .

$$\|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq 2 \|u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 + 2 \|\Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2.$$

$$\begin{aligned}
& - \left\| u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 = T \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0} \text{ est la partie négligée de l'énergie contenue dans la solution} \\
& u_{\lambda_0}^h. \\
& - \left\| \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \text{ vérifie l'égalité différentielle suivante :}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 = -b \left( u_{\lambda_0}^h(t), u_{\lambda_0}^h(t), \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right) \\ \quad + b \left( \hat{u}_{\lambda_0}(t), \hat{u}_{\lambda_0}(t), \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right) \\ \quad - \lambda_0 a \left( \left( u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t), \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right) \\ \left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(0) \right\|_X^2 = 0 \end{array} \right.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &= -b \left( \left( u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t), u_{\lambda_0}^h(t), \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right) \\
& - b \left( \hat{u}_{\lambda_0}(t), \left( u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t), \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right) \\
& - \lambda_0 a \left( \left( u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t), \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right).
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des deux formes  $a$  et  $b$ , et en appliquant une inégalité de Young, nous obtenons les trois majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
-b \left( \left( u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t), u_{\lambda_0}^h(t), \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right) &\leq C_b K \left( \frac{1}{2} \left\| \left( u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h \right)(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_X^2 \right) \\
& + C_b K \left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_X^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-b \left( \hat{u}_{\lambda_0}(t), \left( u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t), \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right) &\leq C_b K \left( \frac{1}{2} \left\| \left( u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h \right)(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_X^2 \right) \\
& + C_b K \left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_X^2,
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
-\lambda_0 a \left( \left( u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t), \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right) &\leq \frac{\lambda_0^2 C_a^2}{2} \left\| \left( u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h \right)(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_X^2 \\
& - \lambda_0 C_p \left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_X^2
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{d}{dt} \left\| \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 \leq (6C_b K + 1 - 2\lambda_0 C_p) \left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_X^2 + (2C_b K + \lambda_0^2 C_a^2) \left\| \left( u_{\lambda_0}^h - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h \right)(t) \right\|_X^2$$

En intégrant sur un intervalle  $(0, t) \subset \mathbf{T}$ , nous obtenons :

$$\left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_X^2 \leq \int_0^t (6C_b K + 1 - 2\lambda_0 C_p) \left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(s) \right\|_X^2 ds + (2C_b K + \lambda_0^2 C_a^2) T \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}.$$

Par application du lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\left\| \left( \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_X^2 \leq \exp[(6C_b K + 1 - 2\lambda_0 C_p)t] (2C_b K + \lambda_0^2 C_a^2) T \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition.

### 3 Etude paramétrique de l'approche Galerkin par une base POD de référence

#### 3.1 Sensibilité paramétrique des solutions d'un problème semi-discret associé aux équations de Navier-Stokes

**Proposition 2** Nous fixons  $\beta$  un réel strictement positif, très proche de zéro. Alors, l'application définie par :

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{\beta}{2C_p}, +\infty \\ \lambda \end{array} \right] \begin{array}{l} \longrightarrow L^2(\mathbf{T}, X) \\ \mapsto u_\lambda^h \end{array}$$

est localement lipschitzienne. Et à un voisinage de  $\lambda_0$ , nous avons l'inégalité suivante :

$$\|u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq \mathcal{B} \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{\lambda_0}.$$

$$\mathcal{B} := \frac{TC_a^2 K \lambda_0}{4C_b \gamma} [\exp(4C_b K T) - 1],$$

$\gamma$  est un réel strictement positif qui vérifie :  $\gamma = \beta$ .

**Preuve.**

Notons  $w^h(t) = (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t)$ , qui vérifie le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d}{dt} w^h, v \right)_X + b(u_\lambda^h(t), u_\lambda^h(t), v) - b(u_{\lambda_0}^h, u_{\lambda_0}^h, v) + \lambda a(w^h(t), v) + (\lambda - \lambda_0) a(u_{\lambda_0}^h(t), v) = 0 \quad \forall v \in V_h \\ w^h(0) = 0 \end{array} \right.$$

Par suite,

$$\left( \frac{d}{dt} w^h, v \right)_X + b(w^h(t), u_\lambda^h(t), v) + b(u_{\lambda_0}^h, w^h(t), v) + \lambda a(w^h(t), v) + (\lambda - \lambda_0) a(u_{\lambda_0}^h(t), v) = 0.$$

En remplaçant  $v$  par  $w^h(t)$ , nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w^h\|_X^2 = -b(w^h(t), u_\lambda^h(t), w^h(t)) - b(u_{\lambda_0}^h(t), w^h(t), w^h(t)) - \lambda a(w^h(t), w^h(t)) - (\lambda - \lambda_0) a(u_{\lambda_0}^h(t), w^h(t)).$$

En utilisant les propriétés des deux formes  $a$  et  $b$ , et en appliquant une inégalité de Young, nous obtenons les trois majorations suivantes :

$$-b(w^h(t), u_\lambda^h(t), w^h(t)) \leq C_b K \|w^h(t)\|_X^2,$$

$$-b(u_{\lambda_0}^h(t), w^h(t), w^h(t)) \leq C_b K \|w^h(t)\|_X^2,$$

et,

$$-\lambda a(w^h(t), w^h(t)) - (\lambda - \lambda_0) a(u_{\lambda_0}^h(t), w^h(t)) \leq -\lambda C_p \|w^h(t)\|_X^2 + \frac{\gamma}{2} \|w^h(t)\|_X^2 + |\lambda - \lambda_0|^2 \frac{C_a^2 K^2}{2\gamma}.$$

Sous les conditions imposées sur  $\gamma$  dans l'énoncé de la proposition, nous pouvons démontrer que  $-2\lambda C_p + \gamma < 0$ .

Par suite,

$$\frac{d}{dt} \|w^h\|_X^2 \leq 4C_b K \|w^h(t)\|_X^2 + \frac{C_a^2 K^2}{\gamma} |\lambda - \lambda_0|^2.$$

En intégrant sur un intervalle  $(0, t) \subset \mathbf{T}$ , nous obtenons :

$$\|w^h(t)\|_X^2 \leq \int_0^t 4C_b K \|w^h(s)\|_X^2 ds + \frac{TC_a^2 K^2}{\gamma} |\lambda - \lambda_0|^2.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\|w^h(t)\|_X^2 \leq TC_a^2 K^2 \frac{\lambda_0}{\gamma} \exp(4C_b K t) \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{\lambda_0}.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition.

### 3.2 Preuve du résultat principal

**Lemme intermédiaire 1** Soit  $(\Phi_n)_{n=1, \dots, M}$  une base hilbertienne dans  $V_h$  et orthonormale au sens du produit scalaire de l'espace  $X$ . On note  $\Phi_n = (\Phi_n^1, \Phi_n^2)^T$ . Nous définissons la fonction  $f_n = (f_n^1, f_n^2)^T$  :

$$f_n^1(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^1(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad \text{et} \quad f_n^2(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^2(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Alors,  $\sum_{n=1}^M \|f_n\|_X^2 < \frac{1}{2}$ .

**Preuve.**  $\int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^1(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = (\Phi_n^1, \mathbf{1}_{[0, x_1] \times [0, x_2]})_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \|f_n\|_X^2 = \int_0^1 \int_0^1 |(\Phi_n, \mathbf{1}_{[0, x_1] \times [0, x_2]})_X|^2 dx_1 dx_2$   
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^M \|f_n\|_X^2 < \int_0^1 \int_0^1 \|\mathbf{1}_{[0, x_1] \times [0, x_2]}\|_X^2 dx_1 dx_2.$

Ce qui termine la preuve du lemme.

### Preuve de notre résultat

$$\begin{aligned} \|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 &\leq 2 \|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \\ &\quad + 2 \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \\ &\quad + 2 \left\| \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \end{aligned}$$

– L'erreur POD-Galerkin  $\|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2$  est estimée par  $f_1^{\lambda_0}(N)$ , d'après la proposition 1.

$$- \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 = \sum_{n=N+1}^M \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0})_X \right\|_{L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R})}^2.$$

En appliquant la formule de Green suivie de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant le fait que  $u_\lambda^h \in L^2(\mathbf{T}, [H^2(\Omega)]^2 \cap V)$ , il est clair que :

$$\left( (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X = - \left( \partial x_2 \partial x_1 (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t), f_n^{\lambda_0} \right)_X.$$

Alors,  $\sum_{n=N+1}^M \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0})_X \right\|_{L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R})}^2$  est contrôlé par  $\frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} \sum_{n=N+1}^M \|f_n^{\lambda_0}\|_X^2$ .

– L'erreur Galerkin  $\left\| \Pi_{\Phi^{\lambda_0}}^N \left( u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h \right) - \left( \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0} \right) \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2$  est contrôlée par  $\sum_{n=N+1}^M \left\| \left( u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \right\|_{L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R})}^2$  ;

Ceci est démontré en réduisant le modèle semi-discret décrivant l'évolution de  $\left( u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h \right) (t)$ , par projection sur le sous-espace POD de référence de dimension  $N$ .

Ce qui termine la preuve du résultat principal de cette communication.

### 3.3 Résultat heuristique : Précision sur le rythme de décroissance de l'erreur ROM-POD en fonction de la régularité des solutions.

Sous les deux hypothèses de régularité des solutions  $u_\lambda^h \in L^2(\mathbf{T}, [H^2(\Omega)]^2 \cap V)$  et de la périodicité des modes POD, le reste  $\sum_{n=N+1}^M \left\| \left( u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \right\|_{L^2(\mathbf{T}, \mathbb{R})}^2$  est de l'ordre du reste  $\sum_{n=N+1}^M c_n$  de la série de Fourier de Fourier de  $\left( u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h \right) (t)$ , quand  $N$  devient proche de  $M$ . Nous obtenons alors, la majoration suivante :

#### Proposition 3

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2 \leq f_{\lambda_0}^1(N) + c(N) \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{\lambda_0},$$

où  $c(N)$  est de l'ordre de  $\frac{1}{N}$ , quand  $N$  devient proche de  $M$ .

## 4 Validation numérique

### 4.1 Configuration d'étude

Notre configuration d'étude est l'écoulement laminaire dans un canal autour d'un cylindre carré. La condition d'entrée au canal, est un écoulement parabolique de Poiseuille. Des conditions homogènes sont imposées sur les deux murs parallèles du canal ( $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ). Un flux nul est imposé à la sortie du canal.

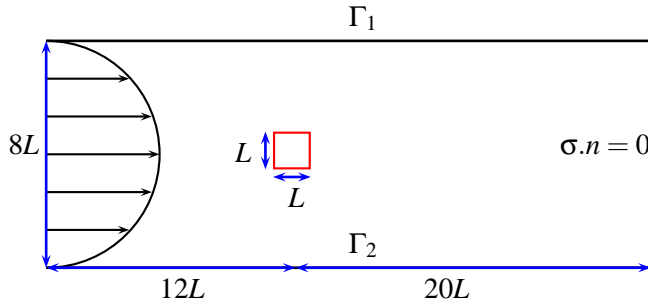


Fig. 1 – Configuration d'étude

Le Reynolds critique  $Re_0$  associé à la viscosité de référence  $\lambda_0$  est égal à 100 et il est basé sur la vitesse maximale de l'écoulement de Poiseuille  $U_{max}$ .

Pour des Reynolds variant dans l'intervalle [70, 180] discrétisé avec un pas  $\Delta Re = 5$ , nous traçons respectivement l'évolution de l'erreur  $\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}$  en fonction de la variation du Reynolds et la variation du logarithme de l'erreur paramétrique,  $\ln \left( \left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(\mathbf{T}, X)} \right)$  en fonction de  $\ln(N)$ . Nous obtenons les deux figures (2a) et (2b).

A partir de la figure (2a), nous retrouvons le comportement annoncé dans notre résultat concernant la dépendance linéaire de l'erreur ROM-POD vis-à-vis l'évolution paramétrique.

## 5 Conclusion

Dans cette communication, nous avons présenté des résultats mathématiques et numériques sur la sensibilité des modèles réduits par POD des équations de Navier-Stokes pour un écoulement bidimensionnel et incompressible. Nous avons démontré que l'erreur paramétrique du ROM-POD est contrôlée par la distance entre le paramètre  $\lambda$  et celui de référence  $\lambda_0$ . Nous avons obtenu aussi, une estimation a priori du rythme de décroissance de cette erreur en fonction du nombre de modes : Ce rythme dépend de celui du reste  $f_2^{\lambda_0}(N)$ . En plus, par un raisonnement heuristique nous avons montré que la vitesse de décroissance de cette erreur est fortement liée à la régularité des solutions : Pour une régularité de type



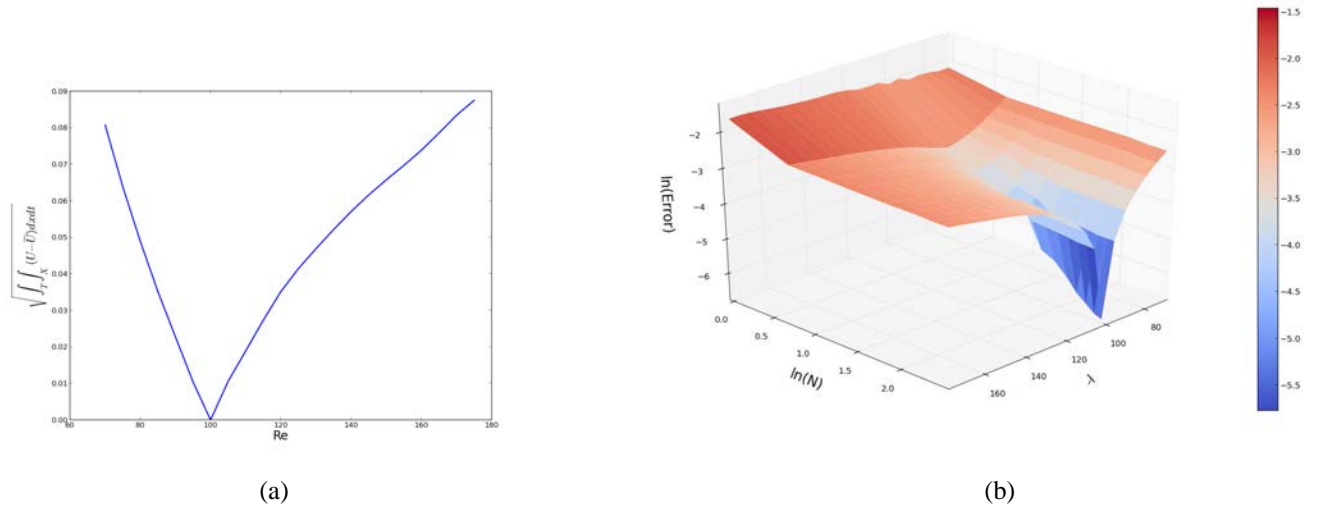


Fig. 2 – (a) : Evolution de l’erreur  $\|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}$  en fonction de la variation du Reynolds. (b) : Evolution de  $\ln\left(\|u_\lambda - \Pi_{\lambda_0}^N u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{T}, X)}^2\right)$  en fonction de  $\ln(N)$ , pour  $Re \in [70, 180]$ .

$u_\lambda^h \in L^2(\mathbf{T}, [H^m(\Omega)]^2 \cap V)$ , le taux de décroissance de l’erreur du ROM-POD est de l’ordre de  $\frac{1}{N^{2m-1}}$  lorsque  $N$  devient proche de  $M$ .

Une application de ce résultat sera de donner des validations pour des techniques d’interpolation de modèles ROM-POD, valables chacun dans une région de confiance autour d’un paramètre de référence. Nous nous intéressons aussi à améliorer cette estimation, surtout en fonction de l’évolution du nombre de modes  $N$ , en imposant des hypothèses de régularité moins fortes sur les solutions : Une des techniques que nous envisageons, est d’étudier mathématiquement la sensibilité d’un ROM-POD de référence construit à partir de snapshots associés à la fois à la solution pour une viscosité  $\lambda_0$  et à sa dérivée paramétrique en  $\lambda_0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \lambda}(\lambda_0)$ .

## 6 Références bibliographiques

### Références

- [1] Andrea Manzoni, Alfio Quarteroni, and Gianluigi Rozza : *Computational reduction for parametrized PDEs : strategies and applications*, Mathematics Institute of Computational Science and Engineering, (15), 2012.
- [2] C. Leblond, C. Allery, C. Béghein : *Contrôle optimal de la qualité de l’air dans une cavité bidimensionnelle par réduction de modèle*, 19ème Congrès Français de Mécanique.
- [3] David Amsallem, Julien Cortial, Kevin Carlberg, Charbel Farhat : *A method for interpolation on manifolds structural dynamics reduced-order models*, International journal for numerical methods in engineering, pp. 1241-1258, 2009.
- [4] F. Boyer, P. Fabrie : *Eléments d’analyse pour l’étude de quelques modèles d’écoulements de fluides visqueux incompressibles*, Springer, 2006.
- [5] K. Kunisch, S. Volkwein : *Galerkin Proper Orthogonal Decomposition methods for parabolic problems*, Numer. Math., 90 : pp. 117-148, 2001.
- [6] N. Nguyen, G. Rozza, P. Huynh, A. Patera : *Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for parametrized parabolic PDEs ; application to real-time bayesian parameter estimation*, Large-Scale Inverse Problems and Quantification of Uncertainty, 8 : pp. 151-178, 2010.
- [7] T. Braconnier, M. Ferrier, J.-C. Jouhaud, M. Montagnac, P. Sagaut : *Towards an adaptive POD-SVD surrogate model for aeronautic design*, Computer and Fluids, 40 : pp. 195-209, 2011.