



**HAL**  
open science

## Un modèle de poutre à section mince flexible pour l'étude du comportement 3D des mètres rubans

Elia Picault, Stéphane Bourgeois, Bruno Cochelin, François Guinot

### ► To cite this version:

Elia Picault, Stéphane Bourgeois, Bruno Cochelin, François Guinot. Un modèle de poutre à section mince flexible pour l'étude du comportement 3D des mètres rubans. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01722068

**HAL Id: hal-01722068**

**<https://hal.science/hal-01722068>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Un modèle de poutre à section mince flexible pour l'étude du comportement 3D des mètres rubans

Elia PICAULT<sup>1</sup>, Stéphane BOURGEOIS<sup>1,2</sup>, Bruno COCHELIN<sup>1,2</sup>, François GUINOT<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS UPR 7051, Marseille, France, picault@lma.cnrs-mrs.fr

<sup>2</sup> École Centrale Marseille, Marseille, France, stephane.bourgeois, bruno.cochelin@centrale-marseille.fr

<sup>3</sup> Thales Alenia Space, Cannes la Bocca, France, Francois.Guinot@thalesalieniaspace.com

**Résumé** — On s'intéresse à la modélisation du pliage et du déploiement des mètres rubans, dont la section peut présenter de fortes variations de forme. A partir d'un modèle de coque, on dérive un modèle de poutre à section mince flexible prenant en compte le gauchissement. Ce modèle est développé dans le cadre des grands déplacements et des grandes rotations en statique. Il permet de simuler des comportements complexes comme l'apparition, la migration le long du ruban, la duplication et la disparition de pliages localisés. Ce modèle est une généralisation au 3D du modèle plan proposé par Guinot et al. [3].

**Mots clés** — poutre à section flexible, gauchissement, mètre ruban, déploiement, grands déplacements.

## 1 Introduction

De nos jours les structures souples déployables représentent, dans de nombreux domaines, une alternative intéressante aux structures mécaniques classiques rigides et articulées. En effet l'élasticité géométrique de ces structures rend inutile l'apport d'énergie extérieure pour leur déploiement et réduit fortement le nombre de pièces nécessaires à la conception d'un tel mécanisme. On peut également ajouter à ces avantages une meilleure compacité, obtenue par des solutions mécaniques comme le pliage ou l'enroulement, ainsi qu'un poids réduit par rapport aux mécanismes traditionnels. Ces avantages motivent l'intérêt des industriels comme Thales Alenia Space pour les structures souples déployables et expliquent l'apparition de nouveaux concepts comme les structures à base de mètres rubans.

Les pièces longues à profils minces (ouverts ou fermés) sont particulièrement adaptées à ce type d'utilisations puisqu'elles peuvent subir de grandes variations de forme tout en conservant un comportement élastique, grâce à une grande flexibilité de leur section. Les mètres rubans, avec leur section mince en arc de cercle, en sont un exemple très pertinent comme l'illustre la Figure 1. En effet lorsque l'on sollicite un ruban en flexion dans son plan de symétrie avec les courbures globale et de la section de sens opposés (flexion en *opposite sense*), son comportement est dans un premier temps celui d'une poutre classique, mais le flambement de la structure se produit beaucoup plus tôt avec l'apparition de pliages localisés qui diminuent drastiquement la raideur globale du ruban [5]. La création de ces plis est permise par un aplatissement de la section qui a pour conséquence de diminuer fortement l'inertie quadratique de la section relative à cette flexion et de concentrer localement la déformation : en dehors des zones de pliage la section retrouve sa forme initiale.



Fig. 1 – Pliage d'un mètre ruban par flexion

L'apparition de ces plis ainsi que leur évolution (migration, disparition...) sont le résultat de multiples instabilités qu'il est nécessaire de pouvoir anticiper grâce à la modélisation. L'approche naturelle consiste à modéliser le ruban comme une coque mince par la méthode des éléments finis [5], mais cela conduit à des modèles difficiles à piloter et coûteux en terme de temps de calcul. Une autre approche basée sur un modèle discret [6], dans laquelle les plis sont modélisés par des ressorts spiraux et les zones non déformées du ruban par des barres rigides de longueur variable, permet de rendre compte de la migration des plis le long du ruban lors du déploiement en dynamique. Beaucoup moins coûteux en temps de calcul, ce type de modèle simplifié ne permet par contre pas de simuler la création d'un pli. Récemment, un modèle de poutre à section flexible [3] a été développé pour la simulation du pliage et du déploiement de mètres rubans en dynamique. Cependant ce modèle est limité au comportement plan et ne prend notamment pas en compte les phénomènes liés à la torsion et au gauchissement.

Le modèle présenté ici est une extension du modèle précédant ([3], [1]) au comportement en trois dimensions des rubans. A partir d'un modèle de coque en statique, en grands déplacements et en grandes rotations, on établit le modèle de poutre en introduisant des hypothèses cinématiques et sthéniques sur le comportement de la section. La déformation de la section dans son plan est régie par un modèle type *Elastica*, qui permet de rendre compte des fortes variations de formes de la courbe section. La déformation hors plan repose quant à elle sur une formulation du gauchissement étendue au cadre des grandes rotations. D'autre part, on fait l'hypothèse que les contraintes axiales sont prépondérantes devant les autres composantes, comme pour une théorie classique de poutre. Ces hypothèses, une fois injectées dans l'énergie de déformation du modèle de coque, permettent d'obtenir un modèle de poutre par intégration analytique de l'énergie de déformation sur la section. Le modèle est implémenté dans COMSOL [2] qui permet d'exploiter directement l'expression de l'énergie en formulant le problème à l'aide du principe de stationnarité de l'énergie potentielle. Quelques exemples de résultats sont présentés.

## 2 Présentation du modèle

### 2.1 Cinématique

Comme pour un modèle de coque mince, on s'intéresse aux déplacements des points appartenant au feuillet moyen du mètre ruban, supposé d'épaisseur  $h$  constante. Dans l'idée d'un modèle de poutre, ce feuillet moyen est vu comme l'extrusion suivant une ligne de référence initialement droite d'une courbe section initialement circulaire, comme illustré dans la Figure 2. Le repère fixe  $(O, e_1, e_2, e_3)$  est défini de telle sorte que l'axe  $Oe_1$  contienne la ligne de référence, que le vecteur  $e_3$  soit dirigé suivant l'axe de symétrie de la section et que le vecteur  $e_2$  complète le repère orthonormé direct.

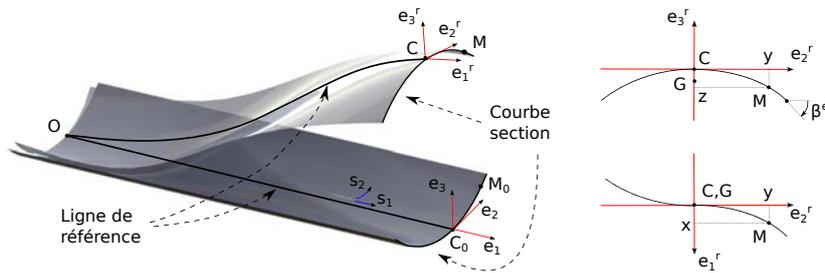


Fig. 2 – Description du mètre ruban.

Pour décrire la géométrie du mètre ruban, on introduit le système de coordonnées curvilignes  $(s_1, s_2) \in [0, L] \times [-a, a]$ , où  $L$  est la longueur initiale de la ligne de référence et  $2a$  la longueur initiale de la courbe section. Soit  $M$  un point matériel attaché au feuillet moyen de la coque, sa position dans la configuration initiale est donnée par le vecteur  $OM_0$  :

$$OM_0(s_1, s_2) = OC_0(s_1) + C_0M_0(s_2), \quad (1)$$

avec  $C_0$  le point de la courbe section appartenant à la ligne de référence. On définit alors les coordonnées locales initiales  $y_0$  et  $z_0$  du point  $M_0$  dans le plan de la section  $(C_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbf{OC}_0(s_1) &= s_1 \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{C}_0\mathbf{M}_0(s_2) &= y_0(s_2) \mathbf{e}_2 + z_0(s_2) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2)$$

A ce stade, il est commode d'introduire l'angle  $\beta_0$  entre l'axe  $\mathbf{e}_2$  et le vecteur  $\mathbf{t}_0$  tangent à la courbe section en  $M_0$  tel que :

$$\mathbf{t}_0(s_2) = y_{0,2}(s_2) \mathbf{e}_2 + z_{0,2}(s_2) \mathbf{e}_3 = \cos(\beta_0(s_2)) \mathbf{e}_2 + \sin(\beta_0(s_2)) \mathbf{e}_3, \quad (3)$$

où la notation  $X_{,i}$  désigne la dérivée partielle de  $X$  par rapport à  $s_i$ . La courbe section étant initialement circulaire et symétrique par rapport à  $\mathbf{e}_3$  (cf. Figure 2), il est possible d'exprimer l'angle  $\beta$  à partir de l'angle  $\beta_0^e = \beta_0(s_2 = a)$  :

$$\beta_0(s_2) = \beta_0^e \frac{s_2}{a}, \quad (4)$$

ce qui conduit aux expressions suivantes de  $y_0$  et  $z_0$  :

$$y_0(s_2) = \frac{a}{\beta_0^e} \sin\left(\beta_0^e \frac{s_2}{a}\right) \quad \text{et} \quad z_0(s_2) = \frac{a}{\beta_0^e} \left[1 - \cos\left(\beta_0^e \frac{s_2}{a}\right)\right]. \quad (5)$$

Dans la configuration déformée, la position du point matériel  $M$  est donné par le vecteur  $\mathbf{OM}$  :

$$\mathbf{OM}(s_1, s_2, t) = \mathbf{OC}(s_1, t) + \mathbf{CM}(s_1, s_2, t), \quad (6)$$

où  $C$  est l'image du point  $C_0$  dans la configuration déformée. Dans le cas d'une cinématique 3D avec prise en compte du gauchissement, les vecteurs  $\mathbf{OC}$  et  $\mathbf{CM}$  prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{OC}(s_1, t) &= [s_1 + u_1(s_1, t)] \mathbf{e}_1 + u_2(s_1, t) \mathbf{e}_2 + u_3(s_1, t) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{CM}(s_1, s_2, t) &= x(s_1, s_2, t) \mathbf{e}_1^r(s_1, t) + y(s_1, s_2, t) \mathbf{e}_2^r(s_1, t) + z(s_1, s_2, t) \mathbf{e}_3^r(s_1, t), \end{aligned} \quad (7)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées du point  $M$  dans le repère local  $(C, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$  attaché à la courbe section dans la configuration déformée.

Ce repère local est obtenu par une rotation dans l'espace 3D du repère fixe  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  correspondant à la rotation de solide rigide de la courbe section non déformée. Cette rotation peut être paramétrée à l'aide d'un angle  $\theta$  et d'un vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  qui définit l'axe orienté autour duquel à lieu la rotation, ou bien par les trois paramètres  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  tels que :

$$\theta_i(s_1, t) = \theta(s_1, t) \mathbf{u}(s_1, t) \cdot \mathbf{e}_i. \quad (8)$$

Les vecteurs de la base locale sont alors liés aux vecteurs de la base fixe par le biais de la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  (construite à partir des paramètres  $\theta_i$ ) :

$$\mathbf{e}_i^r(s_1, t) = \mathbf{R}^T(s_1, t) \cdot \mathbf{e}_i. \quad (9)$$

Comme il est habituel en théorie des poutres, on fait l'hypothèse que :

- Hyp. 1 : le plan de la courbe section non gauchie reste orthogonal à la ligne de référence, i.e. que le vecteur  $\mathbf{e}_1^r$  normal au plan de la courbe section non gauchie est colinéaire au vecteur  $\mathbf{a}_1^r$  tangent à la ligne de référence en  $C$ .

Cela se traduit par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^r(s_1, t) &= \mathbf{OC}_{,1}(s_1, t) = j^r(s_1, t) \mathbf{e}_1^r(s_1, t), \\ \text{avec } j^r(s_1, t) &= \|\mathbf{OC}_{,1}(s_1, t)\| = \sqrt{(1 + u_{1,1}(s_1, t))^2 + u_{2,1}(s_1, t)^2 + u_{3,1}(s_1, t)^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

ou bien par les deux relations ci-dessous :

$$\frac{1}{j^r(s_1, t)} \mathbf{a}_1^r(s_1, t) \cdot \mathbf{e}_2^r(s_1, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{j^r(s_1, t)} \mathbf{a}_1^r(s_1, t) \cdot \mathbf{e}_3^r(s_1, t) = 0. \quad (11)$$

On suppose par ailleurs que la courbe section n'est plus forcément plane après déformation. Les coordonnées locales  $x$ ,  $y$  et  $z$  du point  $M$  dans le repère  $(C, e_1^r, e_2^r, e_3^r)$  sont alors gouvernées par les hypothèses suivantes :

- Hyp. 2 : la projection de la courbe section dans le plan  $(C, e_2^r, e_3^r)$  reste une courbe inextensible de longueur  $2a$ , circulaire et symétrique par rapport à  $e_3^r$ .

Cette hypothèse permet, comme pour la configuration non déformée, d'introduire les angles  $\beta(s_1, s_2, t)$  et  $\beta^e(s_1, t)$ . On peut alors exprimer les coordonnées locales  $y$  et  $z$  en fonction de l'angle d'ouverture de la section  $\beta^e$  :

$$y(s_1, s_2, t) = \frac{a}{\beta^e(s_1, t)} \sin\left(\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a}\right) \quad \text{et} \quad z(s_1, s_2, t) = \frac{a}{\beta^e(s_1, t)} \left[1 - \cos\left(\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a}\right)\right]. \quad (12)$$

- Hyp. 3 : le déplacement hors plan des points de la courbe section est proportionnel à la courbure de torsion  $k_t^r$  et à une fonction de gauchissement  $\omega$  qui dépend de la forme de la courbe section déformée non gauchie :

$$x(s_1, s_2, t) = \omega(s_1, s_2, t) k_t^r(s_1, t). \quad (13)$$

En grands déplacements et en grandes rotations, la courbure de torsion est donnée par :

$$k_t^r(s_1, t) = e_{2,1}^r(s_1, t) \cdot e_3^r(s_1, t). \quad (14)$$

D'autre part, la fonction de gauchissement de Vlassov [7] est calculée à partir des coordonnées locales  $y$  et  $z$  de la courbe section déformée mais non gauchie :

$$\omega(s_1, s_2, t) = \int_0^{s_2} (y_{,2} z - z_{,2} y) d\xi = \left(\frac{a}{\beta^e(s_1, t)}\right)^2 \left[\sin\left(\beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a}\right) - \beta^e(s_1, t) \frac{s_2}{a}\right]. \quad (15)$$

**Remarque :** L'hypothèse 2, reprise du modèle plan [3], permet de caractériser la forme de la section avec un seul paramètre, l'angle d'ouverture  $\beta^e$ . Cette hypothèse permet d'estimer correctement l'inertie en flexion de la section, les déformations transverses étant négligeables. La variation de l'inertie en flexion de la section est un phénomène prépondérant dans la mécanique du ruban car cela permet la concentration de la déformation de flexion grâce à l'aplatissement de la section et la création d'un pli localisé. D'autre part, avec l'hypothèse 3 le gauchissement est introduit en s'inspirant de la théorie HPP des poutres à section mince [7] où le déplacement hors plan des points de la courbe section (porté par  $e_1$ ) est proportionnel à la courbure de torsion  $\theta_{1,1}$  et à une fonction de gauchissement  $\omega$  qui ne dépend que de la forme initiale de la courbe section :

$$\omega(s_2) = \int_0^{s_2} (y_{0,2} z_0 - z_{0,2} y_0) d\xi. \quad (16)$$

Finalement, la cinématique est entièrement décrite par seulement sept paramètres cinématiques attachés à la ligne de référence (i.e. dépendant uniquement de l'abscisse curviligne longitudinale  $s_1$  et du temps  $t$ ) : les trois composantes de la translation  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ , les trois composantes de la rotation  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , et l'angle d'ouverture de la section  $\beta^e$ . La démarche est présentée ici pour une forme de section simple mais il est possible de généraliser l'approche à une forme plus complexe en adoptant une discrétisation adaptée (Ritz, éléments finis) de l'angle  $\beta(s_1, s_2, t)$  dans le sens de l'abscisse curviligne transversale  $s_2$ .

## 2.2 Énergie de déformation

Le ruban étant assimilé à une coque mince, son énergie de déformation élastique est calculée à partir de l'expression habituelle avec  $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$  :

$$U_e(u_i, \theta_i, \beta^e, t) = \int_0^L \int_{-a}^a \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}) ds_2 ds_1, \quad (17)$$

où  $e_{\alpha\beta}$  et  $k_{\alpha\beta}$  sont respectivement les déformations de membrane et de flexion, et  $N_{\alpha\beta}$  et  $M_{\alpha\beta}$  les contraintes de membrane et les moments de flexion associés. Comme la largeur  $2a$  de la section est petite

devant la longueur  $L$  du ruban, on utilise les hypothèses classiques de la théorie des poutres à section mince supposant que  $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ , qui deviennent ici  $N_{22} = N_{12} = 0$ . La coque est supposée élastique orthotrope sans couplage entre les comportements en membrane et en flexion, ce qui permet d'écrire la loi de comportement de la manière suivante :

$$N_{11} = A e_{11}, \quad M_{11} = D_{11} k_{11} + D_{12} k_{22}, \quad M_{22} = D_{12} k_{11} + D_{22} k_{22}, \quad M_{12} = 2D_{33} k_{12}, \quad (18)$$

où  $A, D_{11}, D_{12}, D_{22}$  et  $D_{33}$  sont les constantes d'élasticité.

Les déformations de membrane sont exprimées à l'aide du tenseur de Green-Lagrange, tandis que les déformations de flexion sont définies comme la différence entre le tenseur des courbures de la configuration déformée et celui de la configuration initiale :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{0i} \cdot \mathbf{a}_{0j}) \quad \text{et} \quad k_{ij} = \mathbf{a}_{i,j} \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_{0i,j} \cdot \mathbf{a}_{03}, \quad (19)$$

où les vecteurs  $\mathbf{a}_i$  définissent la base naturelle de la coque et sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(s_1, s_2, t) &= \mathbf{O}M_{,1}(s_1, s_2, t) = \mathbf{O}C_{,1}(s_1, t) + \mathbf{C}M_{,1}(s_1, s_2, t) = \mathbf{a}_1^r(s_1, t) + \mathbf{a}_1^s(s_1, t), \\ \mathbf{a}_2(s_1, s_2, t) &= \mathbf{O}M_{,2}(s_1, s_2, t) = \mathbf{C}M_{,2}(s_1, s_2, t) = \mathbf{a}_2^s(s_1, t), \\ \mathbf{a}_3(s_1, s_2, t) &= \mathbf{a}_1(s_1, s_2, t) \wedge \mathbf{a}_2(s_1, s_2, t) / \|\mathbf{a}_1(s_1, s_2, t) \wedge \mathbf{a}_2(s_1, s_2, t)\|. \end{aligned} \quad (20)$$

Ces déformations de membrane et de flexion peuvent être exprimées en fonction des paramètres cinématique  $u_i$ ,  $\theta_i$  et  $\beta^e$  en introduisant la cinématique présentée au paragraphe précédent (cf. §2.1). On obtient ainsi des expressions établies dans un cadre de grands déplacements, grandes rotations et grandes déformations. Dans l'optique de simplifier ces expressions, on peut remarquer que l'épaisseur du ruban étant faible devant sa largeur et sa longueur, la coque aura tendance à favoriser le travail en flexion par rapport au travail en membrane, quitte à développer du flambage. En introduisant l'hypothèse des petites déformations de membrane et en ne conservant que les termes prépondérants, on obtient des expressions simplifiées pour les déformations que l'on peut décomposer ainsi :

$$\begin{aligned} e_{11} &= e^r + \omega k_{t,1}^r - y k_2^r + z k_2^r + e^s + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (k_t^r)^2, \\ k_{11} &= k_{11}^s - k_2^r y_{,2} - k_3^r z_{,2}, \\ k_{12} &= k_t^r + k_{12}^s, \\ k_{22} &= k_{22}^s, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} e^r &= u_{1,1} + \frac{1}{2} (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) \\ k_t^r &= \mathbf{e}_{2,1}^r \cdot \mathbf{e}_3^r \\ k_2^r &= \mathbf{e}_{3,1}^r \cdot \mathbf{e}_1^r \\ k_3^r &= \mathbf{e}_{1,1}^r \cdot \mathbf{e}_2^r \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^s &= \frac{1}{2} (y_{,1}^2 + z_{,1}^2) \\ k_{11}^s &= z_{,11} y_{,2} - y_{,11} z_{,2} \\ k_{12}^s &= \beta_{,1} \\ k_{22}^s &= \beta_{,2} - \beta_{0,2} \end{cases} \quad (22)$$

Les expressions (21) et (22) font clairement apparaître des déformations induites par la cinématique globale de poutre (exposant  $r$ ) et des déformations induites par l'évolution de la forme de la section (exposant  $s$ ). On reconnaît notamment l'expression classique des déformations de poutre de tension  $e^r$ , de torsion  $k_t^r$  et de flexion  $k_2^r$  et  $k_3^r$  dans le cadre des grands déplacements et des grandes rotations. Les déformations  $e^s$  et  $k_{\alpha\beta}^s$ , qui ne dépendent que de l'angle  $\beta$ , sont moins classiques et sont liées à l'évolution de la forme de la section dans son plan. Quant au terme  $\omega k_{t,1}^r$  et à celui en  $(k_t^r)^2$ , ils proviennent respectivement de la prise en compte du gauchissement et des grandes rotations de torsion.

Finalement, l'énergie de déformation peut être décomposée de la manière suivante :

$$U_e = U_e^r + U_e^s + U_e^{rs}, \quad (23)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} U_e^r = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ A a (e^r)^2 + \left[ A \bar{z}^2 + D_{11} \bar{y}_{,2}^2 \right] (k_2^r)^2 + 2A \bar{z} e^r k_2^r + \left[ A \bar{y}^2 + D_{11} \bar{z}_{,2}^2 \right] (k_3^r)^2 \right. \\ \quad \left. + 2D_{33} a (k_t^r)^2 + A \bar{\omega}^2 (k_{t,1}^r)^2 - 2A \bar{\omega} \bar{y} k_{t,1}^r k_3^r \right. \\ \quad \left. + A (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) e^r (k_t^r)^2 + A (\bar{z} \bar{y}^2 + \bar{z}^3) (k_t^r)^2 k_2^r + \frac{1}{4} A (\bar{y}^4 + 2\bar{y}^2 \bar{z}^2 + \bar{z}^4) (k_t^r)^4 \right\} ds_1, \\ U_e^s = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ A (\bar{e}^s)^2 + D_{11} (\bar{k}_{11}^s)^2 + D_{22} (\bar{k}_{22}^s)^2 + 2D_{12} \bar{k}_{11}^s \bar{k}_{22}^s + 4D_{33} (\bar{k}_{12}^s)^2 \right\} ds_1, \\ U_e^{rs} = \int_0^L \left\{ A e^r \bar{e}^s + \frac{1}{2} A (\bar{y}^2 e^s + \bar{z}^2 e^s) (k_t^r)^2 + \left[ A \bar{z} e^s - D_{11} \bar{y}_{,2} k_{11}^s - D_{12} \bar{y}_{,2} k_{22}^s \right] k_2^r \right\} ds_1, \end{array} \right. \quad (24)$$

où la notation  $\bar{X}$  introduit des quantités intégrées suivant  $s_2$  :  $\bar{X}(s_1, t) = \int_{-a}^a X(s_1, s_2, t) ds_2$ .

Dans le cas traité ici d'une section circulaire paramétrée par l'angle d'ouverture  $\beta^e(s_1, t)$ , les intégrales sur la courbe section peuvent être calculées analytiquement. On obtient ainsi une expression explicite de la densité d'énergie de déformation associée au modèle de poutre à section déformable, en fonction des paramètres cinématiques  $u_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\beta^e$  et des caractéristiques géométriques du ruban. Le terme  $U_e^r$  correspond à l'énergie de déformation classique de poutre, avec les composantes de tension, torsion, flexion et de couplage tension-flexion dû au décalage entre la ligne de référence et le centre de gravité ou de couplage torsion-flexion dû au gauchissement. Le terme  $U_e^s$  ne dépend que de la variable  $\beta$  et représente l'énergie de déformation uniquement induite par le changement de forme de la section dans son plan. Et le terme  $U_e^{rs}$  est lié au couplage entre la déformation globale de poutre et les changements de forme de la section.

### 3 Résultats

#### 3.1 Implémentation numérique

Le modèle linéique, comportant sept degrés de liberté ( $u_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\beta^e$ ), est implémenté dans le logiciel de calcul par éléments finis COMSOL [2]. Ce logiciel permet d'utiliser directement l'expression de la densité d'énergie de déformation, car il est capable d'effectuer automatiquement la différentiation de l'énergie de potentielle pour obtenir la formulation faible du problème. Le problème 1D est discrétisé par la méthode des éléments finis. Deux multiplicateurs de Lagrange (huitième et neuvième degrés de liberté) sont de plus introduits pour imposer sous forme faible l'orthogonalité du plan ( $C$ ,  $e_2^r$ ,  $e_3^r$ ) à la ligne de référence, par le biais des deux contraintes suivantes :

$$C_1 = \frac{1}{j^r} \mathbf{a}_1^r(s_1, t) \cdot \mathbf{e}_2^r(s_1, t) = 0 \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{j^r} \mathbf{a}_1^r(s_1, t) \cdot \mathbf{e}_3^r(s_1, t) = 0. \quad (25)$$

Les déformées tridimensionnelles sont finalement reconstruites à partir de la solution du modèle unidimensionnel de poutre et de la cinématique définie au paragraphe 2.1.

Les résultats présentés ci-après ont été obtenus avec un modèle simplifié où la valeur de l'angle  $\beta$  est supposée petite devant 1. On peut alors approximer les expressions de  $\omega$ ,  $y$  et  $z$  par :

$$\omega(s_1, s_2, t) \approx -\beta^e(s_1, t) \frac{(s_2)^3}{6a}, \quad y(s_2) \approx s_2, \quad z(s_1, s_2, t) \approx \beta^e(s_1, t) \frac{(s_2)^2}{2a}, \quad (26)$$

ce qui conduit à des expressions analytiques des intégrales sur la section plus simples.

Les caractéristiques géométriques et matérielles du ruban étudié sont présentées Tableau 1.

Longueur $L$	Largeur $2a$	Épaisseur $h$	Angle initial $\beta_0^e$
1170 mm	60 mm	0.15 mm	0.6 rad
Module de Young $E$	Coefficient de Poisson $\nu$		Masse volumique $\rho$
210 000 MPa	0.3		7800 kg.m <sup>-3</sup>

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques et matérielles du mètre ruban

### 3.2 Flambage par flexion autour de $e_2$

Cet essai de flambage par flexion autour de  $e_2$  permet de mettre en évidence la différence de comportement pour la flexion en *equal sense* (courbure globale et de la section de même sens) et en *opposite sense* (courbure globale et de la section de sens opposés). Dans cet essai, les conditions aux limites en  $s_1 = 0$  sont :  $u_1 = u_2 = u_3 = \theta_1 = \theta_3 = 0$  et  $\beta^e = \beta_0^e$ . Tandis qu'en  $s_1 = L$ ,  $u_1$  est laissé libre,  $u_2 = u_3 = \theta_1 = \theta_3 = 0$  et  $\beta^e = \beta_0^e$ . On impose alors des rotations  $\theta_2$  opposées en  $s_1 = 0$  et en  $s_1 = L$ .

La différence de comportement en *equal* ou en *opposite sense*, s'illustre facilement à l'aide de la courbe du moment réaction en fonction de l'angle de rotation (cf. Figure 3). Sur la partie correspondant à la flexion en *opposite sense*, on remarque que le ruban a tout d'abord un comportement classique de poutre avec une flexion globale du ruban (déformée 2), mais la déformation se localise ensuite grâce à la formation d'un pli (déformée 3). L'apparition de pliages localisés est caractéristique du comportement des rubans et s'illustre par la présence de trois zones différentes dans la déformée : la zone du pli où la section est totalement aplatie, les zones non déformées éloignées du pli et des zones de transitions.

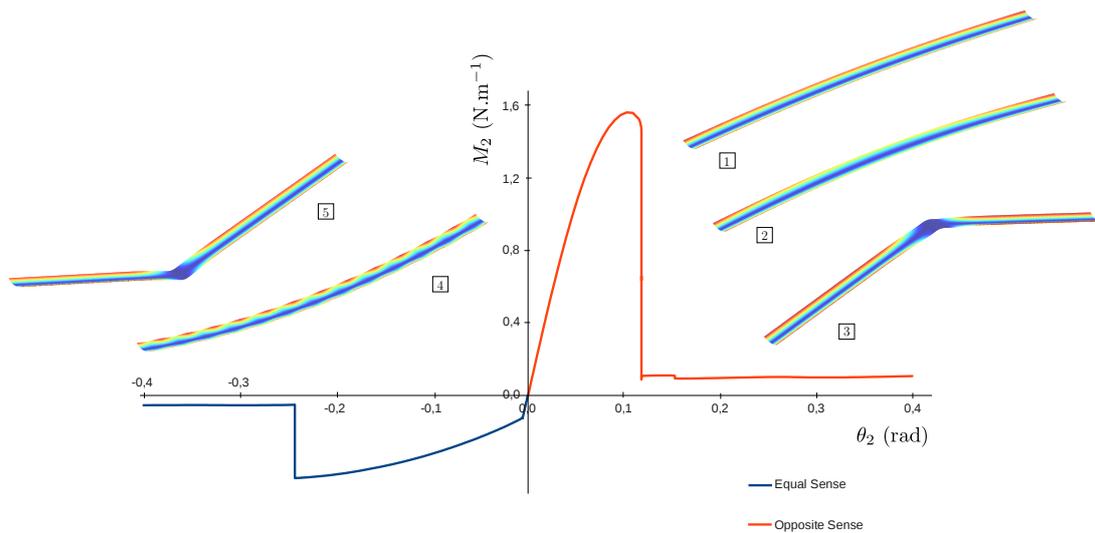


Fig. 3 –  $M_2$  en fonction de  $\theta_2$  et déformées associées pour un essai de flexion autour de  $e_2$

Pour la flexion en *equal sense*, la partie linéaire de la courbe est plus réduite. On constate une transition rapide vers un comportement non linéaire pour lequel on observe des oscillations de l'angle d'ouverture de la section  $\beta^e$  le long du ruban (déformée 4) puis la formation d'un pli localisé (déformée 5). Ces oscillations sont dues à la compression que subissent les bords du ruban (contrairement à la flexion en *opposite sense* où les bords du ruban sont sollicités en tension), et peuvent conduire à un déversement du ruban hors du plan ( $e_1, e_3$ ) si on introduit un défaut ou une perturbation dans le modèle. Ce couplage torsion-flexion, qui n'apparaît pas dans cet essai où nous n'avons pas introduit de perturbation, est caractéristique du comportement en trois dimensions des rubans et est illustré dans l'exemple suivant.

### 3.3 Flambage par flexion autour de $e_3$

On présente ici un essai illustrant les capacités du modèle à simuler correctement le comportement en trois dimensions des rubans, et notamment à rendre compte du couplage entre la flexion et la torsion évoqué précédemment. En effet, dans le cas des poutres à section mince possédant un moment d'inertie

plus important que l'autre (comme c'est le cas pour un mètre ruban), on observe lors du chargement en flexion dans le plan de forte inertie l'apparition de déversement. Autrement dit, à partir d'une valeur critique de la rotation ou du moment, le plan de forte inertie se voile dans un mouvement de torsion.

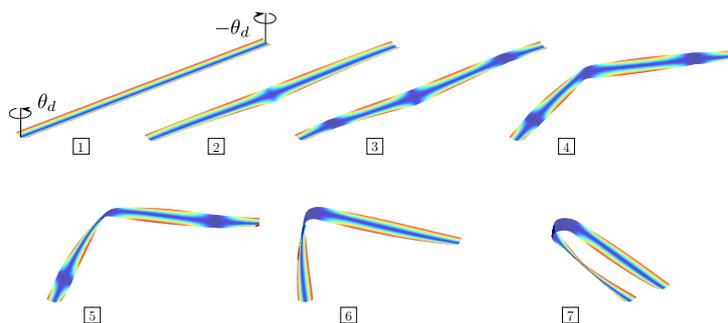


Fig. 4 – Déformées associées à un scénario de flexion autour de  $e_3$

Dans cet essai, les conditions aux limites sont les mêmes que pour l'essai précédent après intervertissement de  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , et on impose des rotations  $\theta_3$  opposées en 0 et en  $L$ . Comme illustré Figure 4, le ruban flambe presque immédiatement par déversement et un premier pli apparaît en son milieu (déformée 2). Les autres rotations ainsi que la déformation des sections extrêmes étant bloquées, deux autres plis apparaissent près des extrémités (déformées 3 à 5) pour permettre aux sections médianes de se redresser et de présenter une inertie plus faible. Lorsque ces sections se sont suffisamment redressées, ces deux plis disparaissent (déformée 6) et le ruban ne présente plus qu'une résistance faible à la flexion (déformée 7).

## 4 Conclusion

Nous avons proposé un modèle de poutre à section flexible et déformable par gauchissement pour le comportement statique des mètres rubans. Ce modèle à sept paramètres cinématiques permet de simuler des scénarios complexes de pliage en grands déplacements et grandes rotations. A partir d'un modèle de coque, une cinématique originale est introduite pour décrire la géométrie de la section. La déformation dans le plan est régie par un modèle *Elastica*, qui permet de rendre compte des fortes variations de formes de la courbe section dans son plan. La déformation hors plan repose quant à elle sur une formulation du gauchissement étendue au cadre des grands déplacements et grandes rotations. On obtient après intégration dans la section, l'énergie de déformation associée au modèle de poutre. Le modèle est ensuite implémenté dans le logiciel COMSOL, qui réalise la différentiation automatique de la fonctionnelle énergie potentielle. La généralisation du modèle au comportement en dynamique devrait permettre de traiter des scénarios plus variés, notamment le déploiement de mètres rubans. Enfin l'exploitation du modèle dans le logiciel MANLAB [4], qui permet le suivi des branches de solutions, devrait permettre par la suite l'étude de systèmes multi-rubans.

## Références

- [1] S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot, E. Picault, *Buckling analysis of tape springs using a rod model with flexible cross-sections*, European Journal of Computational Mechanics 21, 184-194, 2012.
- [2] COMSOL AB, COMSOL Multiphysics User's Guide v4.2, Stockholm, Sweden, September 2011.
- [3] F. Guinot, S. Bourgeois, B. Cochelin, L. Blanchard, *A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. Application to the folding of tape springs*, Int. J. of Solids and Structures 49, 73-86, 2012.
- [4] P. Marone-Hitz, B. Cochelin, S. Bourgeois, F. Guinot, *Modélisation de structures multi-rubans pour applications spatiales*, soumis à CSMA 2013.
- [5] K. Seffen, S. Pellegrino, *Deployment dynamics of tape springs*, Proceedings of the Royal Society A 455, 1003-1048, 1999.
- [6] K. Seffen, Z. You, S. Pellegrino, *Folding and deployment of curved tape springs*, Int. J. of Mechanical Sciences 42, 2055-2073, 2000.
- [7] B. Z. Vlassov, *Pièces longues en voiles minces*, Eyrolles, 1962.