



Schémas d'intégration temporelle basés sur la technique de resommation de Borel-Laplace de séries divergentes

Ahmad Deeb, Aziz Hamdouni, Erwan Liberge, Dina Razafindralandy

► **To cite this version:**

Ahmad Deeb, Aziz Hamdouni, Erwan Liberge, Dina Razafindralandy. Schémas d'intégration temporelle basés sur la technique de resommation de Borel-Laplace de séries divergentes. 11e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01717831

HAL Id: hal-01717831

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01717831>

Submitted on 26 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Schémas d'intégration temporelle basés sur la technique de resommation de Borel-Laplace de séries divergentes

Ahmad DEEB¹, Aziz HAMDOUNI², Erwan LIBERGE³, Dina RAZAFINDRALANDY⁴

LaSIE, Université de La Rochelle

¹ahmad.deeb@univ-lr.fr, ²ahamdoun@univ-lr.fr, ³eliberge@univ-lr.fr, ⁴drazafin@univ-lr.fr

Résumé — On présente des schémas d'intégration temporelle basés sur la méthode de resommation de séries divergentes pour la résolution numérique d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. Les applications sont orientées vers les problèmes de mécanique de fluides. Le cas des équations de Navier-Stokes est abordé.

Mots clés — mécanique des fluides, algorithmique, séries divergentes, resommation

1 Introduction

Pour l'ingénieur, la possession de schémas numériques rapides d'intégration temporelle d'équations différentielles et aux dérivées partielles est d'une importance capitale. La compréhension et la prédiction réaliste des phénomènes d'évolution liées à la mécanique des fluides et à l'interaction fluide-structure en dépend. Pourtant, la plupart des algorithmes existants sont lents par nature. Ils se basent sur la discrétisation en pas de temps qui sont généralement très faibles (une infime fraction de seconde), alors que les phénomènes à étudier, par exemple un écoulement de fluide turbulent, doivent être analysés sur un intervalle de temps très grand (des milliers de secondes, voire beaucoup plus).

Dans cette communication, nous proposons une alternative aux méthodes basées sur une discrétisation temporelle, pour des applications en mécanique des fluides. D'abord, on cherche la solution sous forme d'un développement en série formelle, dont le paramètre est le temps. Le rayon de convergence de cette série pouvant être numériquement petit ou même nul, on applique ensuite une technique, dite de resommation de Borel-Laplace, pour obtenir une solution holomorphe dans un domaine plus grand. On prolonge ainsi la série de manière analytique à l'extérieur de son disque de convergence par la "somme" de Borel-Laplace. Dans les exemples présentés, on peut ainsi obtenir une solution approchée qui est valide sur temps allant jusqu'à 900 fois le pas de temps autorisé par un schéma d'Euler explicite.

Les algorithmes qu'on proposera sont explicites pour une équation différentielle ou une équation aux dérivées partielles comme l'équation de la chaleur ou celle de Burgers. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, le développement en série formelle de la vitesse et de la pression conduit naturellement aux équations de Darcy, dont la résolution est bien moins compliquée.

Dans la section suivante, on rappellera brièvement la méthode de Borel-Laplace pour la resommation de séries divergentes. On la transformera dans la section 3 en un schéma d'intégration temporelle à travers deux algorithmes, l'un basé sur les approximants de Padé et l'autre sur les séries de factorielles généralisées. Enfin, dans la section 4, un algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes sera exposé.

2 Méthode de resommation de Borel-Laplace

Considérons une équation d'évolution

$$\frac{du}{dt} = A(u, t) \quad (1)$$

dont la solution entière formelle est

$$\hat{u}(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k. \quad (2)$$

Une telle série peut être obtenue par la méthode asymptotique habituelle [1]. Un des avantages d'un développement en série est qu'il offre la possibilité de détecter des bifurcations. Cette possibilité a d'ailleurs été exploitée en mécanique des fluides pour l'analyse de l'effet Coanda [2] et la recherche de branches solutions [3, 4].

Pour comprendre rapidement la méthode de Borel-Laplace, partons de la transformation de Laplace de ξ^k :

$$t^{k+1}k! = \int_d \xi^k e^{-\xi/t} d\xi \quad (3)$$

où d est la demi-droite réelle $[0, +\infty[$ ou toute autre droite complexe liant l'origine et l'infini. Ainsi, formellement :

$$\sum_{k \geq 0} u_k t^k = u_0 + \int_d \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1} \xi^k}{k!} e^{-\xi/t} dt. \quad (4)$$

Le second membre de cette équation définit une fonction holomorphe dans les conditions suivantes.

1. La série

$$B\hat{u}(\xi) = \sum_{k \geq 0} \frac{u_{k+1} \xi^k}{k!}, \quad (5)$$

appelée transformée de Borel de $\hat{u}(t)$, doit avoir un rayon de convergence non nul. Cela est vérifiée si $\hat{u}(t)$ est de Gevrey d'ordre 1, c-à-d si

$$u_{k+1} = O(A^k k!) \quad \text{où } A \text{ est une constante.} \quad (6)$$

2. Ensuite, $B\hat{u}(\xi)$ doit être prolongeable d'une manière analytique le long de la demi-droite d'intégration d .
3. Et enfin, ce prolongement doit être de croissance au plus exponentielle à l'infini le long de d , de telle sorte que sa transformée de Laplace soit bien définie.

Lorsque ces conditions sont réunies, le second membre de (4), qu'on notera $S\hat{u}(t)$, définit une fonction holomorphe dans un voisinage sectoriel \mathcal{S} de l'origine, bissecté par d . De plus, la série $\hat{u}(t)$ est le développement asymptotique de $S\hat{u}(t)$ au sens de Gevrey, ce qui signifie que, pour tout sous-secteur compact $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, on peut trouver deux constantes C et A telles que

$$\forall t \in \mathcal{T}, \forall l \in \mathbb{N}^*, \left| S\hat{u}(t) - \sum_{k=0}^{l-1} u_k t^k \right| < CA^l t^l l! \quad (7)$$

En résumé, si la série d'origine $\hat{u}(t)$ diverge mais pas plus vite que la série des $n!$, on peut lui associer une fonction holomorphe $S\hat{u}(t)$, appelée somme de Borel-Laplace de $\hat{u}(t)$, qui lui est asymptotiquement équivalente dans un voisinage sectoriel. La fonction $S\hat{u}(t)$ est alors la solution de l'équation dans son domaine de validité. Les différentes étapes pour obtenir cette somme sont schématisées dans le tableau 1.

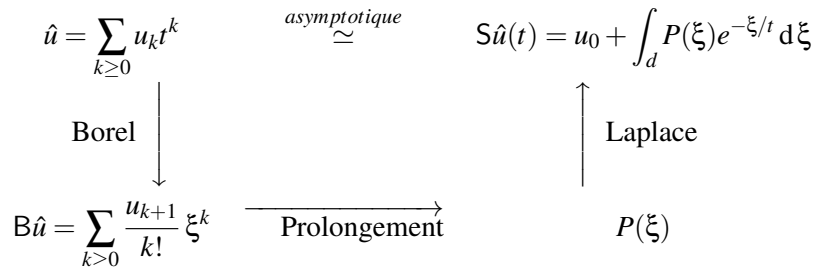


Tableau 1 – Resommation de Borel-Laplace

La description de la méthode de resommation faite ici est très sommaire. Les détails peuvent être trouvés, par exemple, dans [5, 6].

La méthode de resommation de Borel-Laplace est transformée en algorithmes numériques dans les sections qui suivent, mais avant cela, illustrons-la sur l'exemple fondamental de l'équation d'Euler

$$t^2 \frac{du}{dt} + u = t. \quad (8)$$

La série solution formelle de cette équation est

$$\hat{u}(t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1}. \quad (9)$$

Elle possède un rayon de convergence nul mais elle est de Gevrey. Sa transformée de Borel

$$B\hat{u}(\xi) = \sum_{n \geq 0} (-1)^k \xi^k. \quad (10)$$

a donc un rayon de convergence non nul. On reconnaît en (10) le développement de Taylor de la fonction $\frac{1}{1+\xi}$, qui est le prolongement analytique naturel en dehors du disque unité. Cette fonction a une croissance plus faible que l'exponentielle à l'infini. En calculant sa transformée de Laplace le long de la demi-droite réelle positive, on obtient la somme de Borel-Laplace suivante

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+\xi} e^{-\xi/t} d\xi \quad (11)$$

qui est la solution de l'équation (8) dans le demi-plan complexe de partie réelle positive.

Lorsqu'elle est appliquée à une série convergente, on montre que la resommation agit comme une accélération de la convergence de la série [7]. Dans tous les cas, elle augmente le domaine de validité de la série initiale.

3 Algorithmes et tests numériques

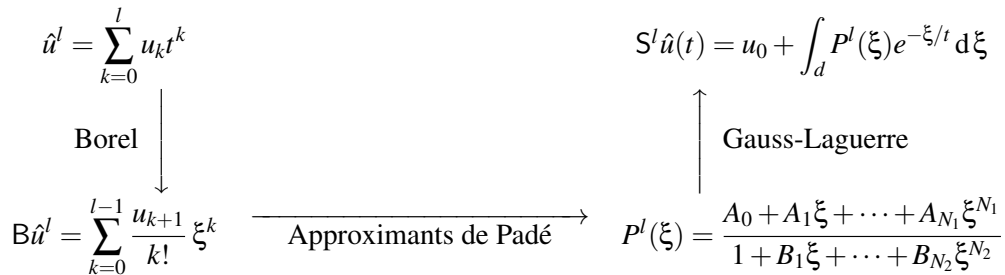
On présentera deux algorithmes basés sur la méthode de resommation.

3.1 Algorithme utilisant les approximants de Padé

Numériquement, la série $\hat{u}(t)$ se calcule par la méthode asymptotique. Plus précisément, on obtient une série tronquée

$$\hat{u}^l(t) = \sum_{k=0}^l u_k t^k \quad (12)$$

Le prolongement analytique de $B\hat{u}(t)$ peut être réalisé par des approximants de Padé[8] et la transformation de Laplace s'opère par une quadrature de Gauss-Laguerre. Cet algorithme est résumé dans le diagramme suivant.



Appliquons cet algorithme à l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{du}{dt} + u^2 = 0, \quad u(0) = 1. \quad (13)$$

La solution exacte est $u(t) = \frac{1}{1+t}$. La série solution, qui a un rayon de convergence 1, est tronquée numériquement à un ordre $l = 8$. Un approximant de Padé d'ordre [4/3] et 6 points de Gauss sont utilisés. La solution approchée est représentée sur la figure 1. On voit que, contrairement à la série tronquée qui s'écarte de la solution dès que t dépasse 0.5, la somme de Borel-Laplace numérique reste longtemps proche de la solution exacte. En fait, théoriquement, la méthode de Borel-Laplace est exacte pour l'équation (13), mais les effets numériques dus à la tronquature, aux approximants de Padé et à la quadrature deviennent visibles lorsque $t > 2$. Pour avoir une solution valide pour tout $t > 0$, il suffit d'appliquer une continuation. Pour cela, si on note Δt_R le dernier instant où la solution est considérée comme valide ($|u(\Delta t_R) - S\hat{u}^l(\Delta t_R)|$ ou le résidu à $t = \Delta t_R$ est faible), on prend $u(\Delta t_R)$ comme condition initiale et on recommence l'algorithme. La quantité Δt_R peut être vu comme l'équivalent du pas de temps des méthodes basées sur une discrétisation.

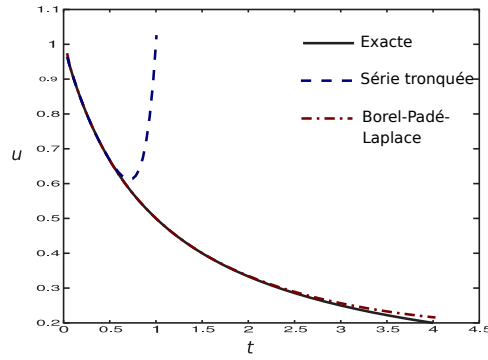


Fig. 1 – Equation quadratique (13). Comparaison entre la solution exacte, la série tronquée et la somme numérique de Borel-Laplace via les approximants de Padé

3.2 Application à un problème périodique

Considérons maintenant l'équation suivante dont on connaît la solution exacte :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad u(0) = 1, v(0) = 0. \quad (14)$$

Sur le tableau 2, on compare le nombre de pas de temps nécessaires pour atteindre la période $t = 2\pi$ avec la méthode de resommation de Borel-Laplace et avec quelques schémas d'intégration plus classiques. On peut y observer qu'on a besoin de beaucoup moins de pas avec la resommation. C'est aussi avec la méthode de resommation que la pente est la plus faible lorsque la précision augmente, comme le montre la figure 2. La méthode explicite a été omise de cette figure pour que les autres courbes soient plus visibles.

Precision	Explicit	RK2	RK4	Resum.
10^{-2}	1904	65	10	3
10^{-3}	19042	199	17	4
10^{-4}	190400	629	30	5
10^{-6}	$1.9 \cdot 10^7$	6284	96	9

Tableau 2 – Nombre de pas de temps pour atteindre $t = 2\pi$; avec la méthode d'Euler explicite (Explicit), la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) et d'ordre 4 (RK4), ainsi que la méthode de Borel-Laplace (Resum.).

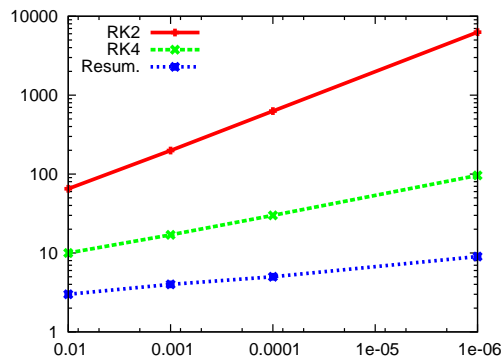


Fig. 2 – Nombre de pas de temps, en fonction de la précision, pour atteindre $t = 2\pi$. Voir table 2 pour la légende.

Le coût effectif, en terme de temps de calcul CPU, est représenté sur la figure 3 avec une échelle logarithmique. La précision a été fixée à 10^{-6} et la simulation a été menée jusqu'à $t_{max} = 1, 2, 10, 100$ et 1000 fois la période. On peut y observer que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 a un coût similaire

à la resommation jusqu'à environ $t = 4\pi$, mais après, la resommation est beaucoup plus rapide. Par exemple, pour atteindre 1000 périodes, la resommation requiert $7.2 \cdot 10^{-1}$ CPU contre 4.3 CPU pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, soit 59 fois moins de temps. On constate aussi qu'il semble y avoir une corrélation entre le nombre de pas de temps nécessaire et le coût de calcul en CPU.

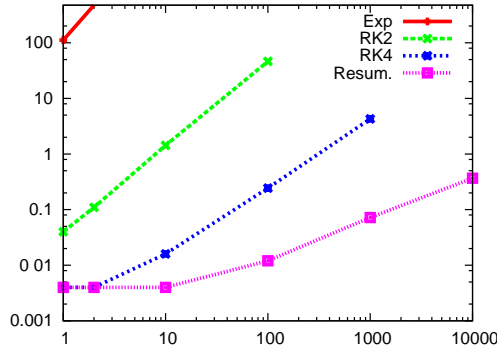


Fig. 3 – Evolution du temps CPU. En abscisse : $t_{max}/2\pi$.

Traisons maintenant des problèmes plus spécifiques à la mécanique des fluides.

3.3 Application à l'équation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t=0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (15)$$

La résolution de cette équation avec un schéma d'Euler explicite est soumise à une condition de stabilité très restrictive sur le pas de temps, à savoir :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\nu} = \Delta t_E, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \quad (16)$$

où Δx est le pas de discrétisation spatiale. La solution série formelle de (15) s'écrit :

$$\hat{u}(t, x) = \sum_{k \geq 0} u_k(x) t^k \quad \text{avec} \quad u_k(x) = \nu^k \frac{u_0^{(2k)}}{k!}. \quad (17)$$

Elle est divergente dans le cas général mais est Gevrey sous certaines conditions sur u_0 [9, 10]. On va d'abord considérer un cas où la série est convergente. Prenons $\nu = 1$, $\Omega = [0, \pi]$ et

$$u_0(x) = \sin x \quad (18)$$

La solution exacte est

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x. \quad (19)$$

Le domaine spatial est discrétisé en 16 points. On prend $l = 10$ et $d = [0, +\infty[$ comme direction d'intégration de Laplace. Comme le montre la figure (4), la resommation fournit une solution très proche de la solution exacte. Les pas de temps Δt_R de la resommation pour les 4 premières continuations, ainsi que la moyenne sur 20 continuations, pour $l = 10$ et 20 sont reportés sur la table 3. On voit que Δt_R est d'environ 800 plus grand que le pas de temps Δt_E du schéma explicite ($\Delta t_E \simeq 2 \cdot 10^{-3}$) pour $l = 10$ et jusqu'à 900 fois plus grand pour $l = 20$.

Prenons maintenant

$$u_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad (20)$$

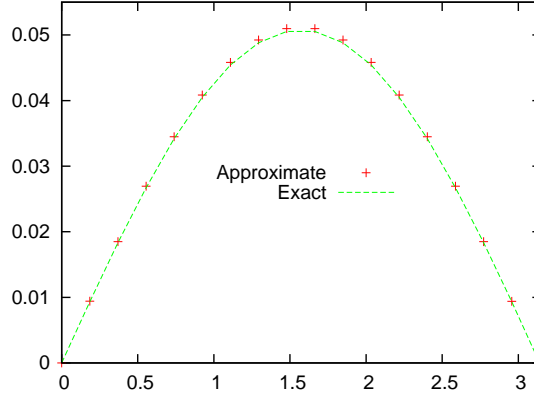


Fig. 4 – Solution exacte et solution obtenue par la resommation à $t = 2.98s$

	step 1	step 2	step 3	step 4	mean (20)
$l = 10$	1.4	$8.9 \cdot 10^{-2}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-1}$
$l = 20$	1.8	$1.8 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$2.7 \cdot 10^{-1}$

Tableau 3 – Pas de temps Δt_R avec la resommation ($\Delta t_E \simeq 2 \cdot 10^{-3}$)

La série solution est divergente pour tout x mais est de Gevrey [9]. On peut ainsi lui appliquer la méthode de resommation de Borel-Laplace. On prend $\Omega = [0, 1/2]$ de telle sorte que u_0 soit de classe C^∞ sur Ω . L'évolution de la solution approchée, obtenue par la méthode de resommation est représentée sur la figure 5.

D'autres tests sur l'équation de Burgers et sur des modèles réduits des équations de Navier-Stokes ont été menés dans [7]. Ils montrent que la resommation est une bonne alternative aux schémas classiques d'intégration temporelle et que le pas de temps Δt_R est généralement beaucoup plus grand que le pas de temps de ces méthodes.

Dans la sous-section suivante, on présente un autre algorithme pour calculer numériquement la somme de Borel $S\hat{u}$.

3.4 Algorithme utilisant les séries de factorielles généralisées

On montre (voir par exemple [11]) que, formellement, la somme de Borel-Laplace peut être écrite sous forme d'une série de factorielles généralisées (SFG) :

$$tS\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{\frac{1}{t}(\frac{1}{t} + s_1) \cdots (\frac{1}{t} + s_n)} \quad (21)$$

où les s_n sont des complexes arbitraires situés sur la demi-droite opposé à la direction d . Les b_n sont définis par

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} S(n, k) a_k. \quad (22)$$

où les $S(n, k)$ sont les nombres de Stirling généralisés de premier espèce définis récursivement par

$$t(t - s_1)(t - s_2) \cdots (t - s_{n-1}) = \sum_{k=0}^n S(n, k) t^k. \quad (23)$$

Des résultats de convergence de la SFG vers $S\hat{u}(t)$ peuvent être trouvés dans [11] quand

$$s_n = n\omega e^{-i\theta}, \quad n \geq 1, \quad (24)$$

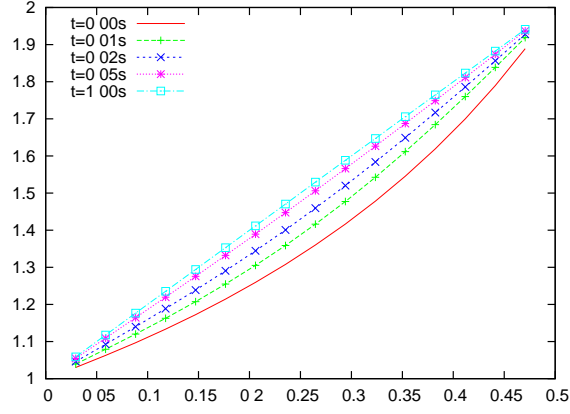


Fig. 5 – Solution approchée, correspondant à la condition initiale (20)

où $\omega > 0$ et θ est l'angle de la demi-droite d par rapport à l'axe des réels positifs. Dans ce cas, la SFG peut être utilisée comme approximation numérique de la somme de Borel. Par rapport à la série initiale $\hat{u}(t)$, elle peut aussi être vue comme un algorithme d'accélération de la convergence. L'avantage par rapport à l'algorithme basé sur les approximants de Padé est qu'on évite le passage dans l'espace de Borel. On n'a donc pas à calculer les approximants de Padé (ce calcul n'étant pas robuste) et à effectuer une quadrature.

Il est aisé de montrer que la SFG donne l'équation exacte de l'équation (13), même numériquement, dès que $l \geq 1$. Les tests numériques seront traités lors de la présentation orale.

4 Application aux équations de Navier-Stokes

Considérons les équations du mouvement d'un fluide incompressible :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta u = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (25)$$

où u est la vitesse, p la pression, ρ la densité et ν la viscosité cinématique. Notons

$$u(t, x) = \sum_{k \geq 0} u_k(x) t^k, \quad p(t, x) = \sum_{k \geq 0} p_k(x) t^k. \quad (26)$$

la solution sous forme de série formelle. Le caractère Gevrey de cette solution formelle a été étudié par Costin *et al.* dans [12, 13] qui donne un cadre d'utilisation de la resommation de Borel-Laplace.

Lorsqu'on injecte les développements (26) dans les équations (25), on est conduit à résoudre, pour chaque k , le système d'équations

$$\begin{cases} (k+1)u_{k+1} + \frac{1}{\rho} \nabla p_k = \nu \Delta u_k - \sum_{p=0}^k \operatorname{div}(u_p \otimes u_{k-p}) \\ \operatorname{div} u_{k+1} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

où l'inconnue est (u_{k+1}, p_k) , u_0 étant la condition initiale. Si on note $v = u_{k+1}$, $q = \frac{1}{(k+1)\rho} p_k$ et S_k le second membre de (27) divisé par $(k+1)$, alors les équations à résoudre sont des équations de Darcy

$$\begin{cases} v + \nabla q = S_k, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases} \quad (28)$$

On aura donc une matrice, et une seule, à inverser pendant toute la simulation. Seul le second membre change à chaque étape k et à chaque continuation. Cela est un avantage par rapport aux méthodes incrémentale où, généralement, une inversion de matrice est nécessaire à chaque itération.

De plus, par rapport à d'autres schémas, on n'a pas besoin de traitement spécial pour linéariser le terme de convection. En effet, ce dernier étant renvoyé au second membre, l'opérateur à inverser est linéaire. Les tests numériques sont en cours. Ils seront présentés oralement.

Notons enfin qu'au delà de l'aspect intégration temporelle, on peut se servir de la décomposition de la solution sous la forme de série entière (26) pour détecter les singularités. En effet, en utilisant un théorème de Pólya [14], il est possible de connaître le type et la localisation d'une singularité grâce à une analyse du comportement de la transformée de Borel loin de l'origine [15].

5 Conclusion

On a présenté des algorithmes rapides d'intégration temporelle pour des calculs sur un grand intervalle de temps, exploitant la méthode de resommation de séries divergentes de Borel-Laplace. Les algorithmes sont facilement parallélisable car la resommation peut être effectuée par composantes.

En plus de la rapidité, l'approche par développement en série permet de suivre des branches solutions en cas de bifurcation et offre la possibilité de localiser les singularités.

Références

- [1] C. Bender and S. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers : Asymptotic methods and perturbation theory*. McGraw-Hill, 1978.
- [2] C. Allery, J-M. Cadou, A. Hamdouni, and D. Razafindralandy. Application of the asymptotic numerical method to the Coanda effect study. *European Journal of Computational Mechanics*, 13(1-2) :57–77, 2004.
- [3] J.M. Cadou, M. Potier-Ferry, and B. Cochelin. A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 25 :234–254, 2006.
- [4] Y. Guevel, H. Boutyour, and J.-M. Cadou. Automatic detection and branch switching methods for steady bifurcation in fluid mechanics. *Journal of Computational Physics*, 230(9) :3614–3629, 2011.
- [5] J-P. Ramis. Séries divergentes et théories asymptotiques. In *Journées X-UPS 1991*, pages 7–67, 1991.
- [6] J. Thomann. Procédés formels et numériques de sommation de séries solutions d'équations différentielles. In Centre de mathématiques, editor, *Journées X-UPS 1991*, pages 101–114, 1991.
- [7] D. Razafindralandy and A. Hamdouni. Time integration algorithm based on divergent series resummation, for ordinary and partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 236 :56–73, 2013.
- [8] C. Brezinski. Rationnal approximation to formal power serie. *Journal of Approximation Theory*, (25) :295–317, 1979.
- [9] D.A. Lutz, M. Miyake, and R. Schäfke. On the borel summability of divergent solutions of the heat equation. *Nagoya Mathematical Journal*, 154 :1–29, 1999.
- [10] W. Balsler. Divergent solutions of the heat equation : on an article of Lutz, Miyake and Schäfke. *Pacific Journal of Mathematics*, 188(1) :53–63, 1999.
- [11] J. Thomann. Resommation des séries formelles. *Numerische Mathematik*, 58 :503–535, 1990.
- [12] O. Costin, G. Luo, and S. Tanveer. Divergent expansion, Borel summability and three-dimensional Navier-Stokes equation. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 36(1876) :2775–2788, 2008.
- [13] O. Costin and S. Tanveer. Borel summability of navier-stokes equation in \mathbb{R}^3 and small time existence. *arXiv :math/0612063*, 2006.
- [14] G. Pólya. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. *Mathematische Zeitschrift*, 29 :549–640, 1929.
- [15] W. Pauls and U. Frisch. A borel transform method for locating singularities of Taylor and Fourier series. *Journal of Statistical Physics*, 127 :1095–1119, 2007.