CSMA 2013
11e Colloque National en Calcul des Structures
13-17 Mai 2013

Modélisation non-locale de type gradient du comportement thermomécanique d'alliages à mémoire de forme

Kodjo Mawuli ARMATTOE [1,2], Mohamed HABOUSSI [3*], Arnaud DUVAL [4], Tarak BEN ZINEB [1,2]

1 Université de Lorraine, LEMTA, kodjo-mawuli.armattoe@univ-lorraine fr, tarak.ben-zineb@univ-lorraine.fr
2 CNRS, LEMTA, kodjo-mawuli.armattoe@univ-lorraine fr, tarak.ben-zineb@univ-lorraine fr
3 CNRS, LSPM, Université Paris 13, mohamed haboussi@lspm.cnrs.fr
4 CNRS, LAMCOS, INSA Lyon, Arnaud.Duval@insa-lyon fr
* Auteur correspondant

Résumé — Le comportement thermomécanique des structures minces en alliages à mémoire de forme (AMF) s'accompagne d'instabilités lors de la localisation et la propagation de la transformation de phase. Afin de prendre en compte ces phénomènes dans la modélisation du comportement de cette famille d'alliages, un modèle phénoménologique non- local de type gradient est proposé dans ce travail. Le présent modèle est obtenu comme une extension d'un modèle local existant, établi à partir d'une expression du potentiel thermodynamique de Gibbs d'inspiration micromécanique. Le modèle non-local est basé sur l'introduction d'une nouvelle variable représentant la contrepartie non-locale de la fraction volumique locale de martensite; cette variable est définie par une équation aux dérivées partielles dont le terme source est la fraction volumique locale de martensite. Dans le but de simuler la réponse de structures minces en AMF sous différentes sollicitations thermomécaniques, un élément fini spécifique 2D en contraintes planes ayant comme degré de liberté supplémentaire la fraction volumique non locale de martensite a été développé et implémenté dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus via la routine utilisateur UEL. Le modèle développé est utilisé pour analyser les effets de la localisation de la transformation de phase dans deux plaques minces en AMF dont l'une est trouée et l'autre présente une zone fragilisée en forme de disque.
Mots clés — Alliages à mémoire de forme, Structures minces, Instabilités, Localisation, Approche non-locale

1. Introduction

Les alliages à mémoire de forme (AMF) suscitent un immense intérêt dans de nombreux secteurs industriels grâce à leurs excellentes propriétés telles que la superélasticité et l'effet mémoire de forme; ces propriétés dérivent de leur aptitude à subir une importante déformation totalement réversible au cours d'une transformation structurale entre deux phases solides majeures : austénitique et martensitique. Outre ces propriétés, les AMF sont capables de fournir une densité de travail mécanique très élevée et sont de ce fait très adaptés aux applications utilisant des dispositifs en miniature tels que les microactionneurs, les microcomposants électroniques [5]. De tels dispositifs sont souvent taillés dans des structures minces (fils et films), qui montrent un comportement thermomécanique instable caractérisé par une localisation suivie d'une propagation de la déformation [1], [3] et [7].

La littérature propose de nombreux modèles permettant de prédire à l'échelle macroscopique, le comportement thermomécanique des AMF massifs. Ces modèles, développés dans un contexte local, ne décrivent pas correctement les phénomènes instables précédemment décrits. Cette limite est due au fait qu'ils sont dépourvus de paramètre de longueur interne, de sorte qu'ils mènent à une localisation de la déformation de transformation sur une zone de volume nul en présence d'adoucissement. De plus, ces modèles donnent des réponses dépendant du maillage lorsqu' ils sont utilisés dans des calculs par éléments finis entraînant une perte d'objectivité dans la prédiction des comportements.

Dans ce travail, nous proposons une modélisation non locale des phénomènes instables observés dans les structures minces en AMF. Cette modélisation est basée sur l'extension au cadre non local d'un modèle local existant dont l'efficacité dans la description de la réponse des AMF massifs sous différents types de sollicitations thermomécaniques a été prouvée. Pour ce faire, une nouvelle variable non locale de la transformation, représentant la contrepartie non locale de la fraction volumique de martensite présente dans le modèle local est introduite; elle est régie par une équation aux dérivées partielles, définie sur tout le domaine matériel considéré. Cette approche est inspirée des travaux réalisés par [4], [6] et [11] sur les modèles non locaux de plasticité et d'endommagement. Le modèle de comportement ainsi proposé est utilisé pour simuler la réponse d'une plaque mince trouée en AMF soumise à un chargement de traction puis à un chargement thermique sous contrainte imposée. Ces simulations ont nécessité le développement et l'implémentation dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus, d'un élément fini 2D (en contraintes planes) basé sur le modèle non local et possédant en plus des degrés de libertés de déplacement et de température, la fraction volumique non locale de martensite.

2. Modélisation non-local du comportement thermomécanique des AMF

2.1. Modèle local du comportement des AMF

Le modèle non-local proposé ici est une extension d'un modèle local détaillé dans [2] et [9]. Celui-ci est établi à partir de la définition d'un potentiel thermodynamique dont l'expression est :

$$\Delta G = -\frac{1}{2}\Sigma_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} - \Sigma_{ij}\alpha\delta_{ij}\Delta T - \Delta T S^A + B(T-T_0) f - \Sigma_{ij} f \bar{\varepsilon}_{ij}^T + \frac{1}{2} f H_{grain} \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T + \frac{1}{2} H_{variant} f^2 \quad \textbf{(1)}$$

La fonctionnelle ΔG est la variation de l'énergie libre depuis l'état initial d'un VER d'AMF biphasé : austénite-martensite. Elle est fonction de la contrainte Σ_{ij}, de la température T, de l'entropie de la phase austénitique S^A et de deux variables internes : la déformation moyenne de transformation $\bar{\varepsilon}_{ij}^T$ et la fraction volumique de martensite f. Elle fait intervenir des paramètres matériaux H_{grain}, $H_{variant}$, B et T_0. Les paramètres H_{grain} et $H_{variant}$ permettent de prendre en compte respectivement, les incompatibilités géométriques de déformation lors de la transformation de phase martensitique (incompatibilités intergranulaires et intragranulaires) et les incompatibilités entre variantes de martensite. T_0 est la température d'équilibre de la transformation de phase et B correspond à la variation linéaire de l'entropie autour de cette température. Les expressions des forces thermodynamiques associées aux variables internes (f , $\bar{\varepsilon}^T$) du VER sont déduites de la fonctionnelle ΔG :

$$F_f = -\frac{\partial \Delta G}{\partial f} = \Sigma_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}^T - B(T-T_0) - \frac{1}{2} H_{grain} \bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T - H_{variant} f \quad \textbf{(2)}$$

$$F_{\bar{\varepsilon}_{ij}^T} = -\frac{\partial \Delta G}{\partial \bar{\varepsilon}_{ij}^T} = f\,(\Sigma_{ij}^D - H_{grain}\bar{\varepsilon}_{ij}^T) \quad \textbf{(3)}$$

F_f représente la force de transformation et $F_{\bar{\varepsilon}_{ij}^T}$ la force d'orientation des variantes de martensite et Σ_{ij}^D la partie déviatorique du tenseur des contraintes. Dans l'équation **(3)**, le tenseur des contraintes est remplacé par son déviatorique à cause du caractère isovolumique de la transformation. Les processus de transformation et d'orientation des variantes de martensite sont activés lorsque les forces thermodynamiques F_f et $F_{\bar{\varepsilon}_{ij}^T}$ vérifient les relations :

$$F_f = F_f^{crit} \quad \textbf{(4)}$$

$$F_{\bar{\varepsilon}_{ij}^T} = F_{\bar{\varepsilon}^T}^{crit} \quad \textbf{(5)}$$

F_f^{crit} correspond à la force de transformation critique et $F_{\bar{\varepsilon}^T}^{crit}$ désigne la contrainte limite de réorientation des variantes de martensite. Les relations **(2)** et **(3)** sont complétées par les conditions physiques de saturation de la transformation ($f \geq 0$ et $f \leq 1$) et de la déformation de transformation ($\bar{\varepsilon}_{eq}^T = \sqrt{\frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_{ij}^T \bar{\varepsilon}_{ij}^T} \leq \bar{\varepsilon}^{Sat}$ où $\bar{\varepsilon}^{Sat}$ est un paramètre matériau caractérisant la déformation de transformation maximale). L'ensemble de ces équations constitue le modèle de comportement local. Nous proposons dans la suite de réécrire ce modèle dans un cadre non-local en vue de le rendre applicable en présence d'instabilités de comportement.

2.2. Extension non-locale du modèle de comportement des AMF

Le modèle local décrit dans le paragraphe précédent prédit correctement le comportement des structures en AMF massifs; il a été validé dans [10] sur différents cas de chargement thermomécaniques complexes. Cependant, il présente des limites dans la description d'instabités comme celles observées dans les structures minces en AMF; la raison vient du fait que ce modèle ne fait référence à aucun paramètre de longueur interne dans ses équations constitutives, ce qui signifie également que certaines hétérogénéités au sein du matériau ne sont pas convenablement décrites. Pour rendre ce modèle capable de décrire le comportement instable des AMFs, nous nous proposons de le reformuler dans un contexte non-local. Nous suivons pour cela la démarche proposée dans [9], [11] et [12] pour la plasticité. Celle-ci est basée sur l' introduction dans le modèle d'une nouvelle variable caractérisant la réponse non-locale en tout point matériel du milieu considéré. Dans notre cas, cette variable, notée $\bar{f}$, est définie comme l'intégrale sur tout le domaine matériel de la fraction volumique locale de martensite pondérée par une fonction de poids :

$$\bar{f}(\vec{x}) = \frac{1}{\Psi(\vec{x})} \int_{\Omega} \psi(\vec{y}, \vec{x}) f(\vec{y}) d\Omega(\vec{y}) \qquad \textbf{(6)}$$

Dans la relation **(6)**, $\vec{x}$ représente la position du point matériel; $\vec{y}$ est la position d'une partie infinitésimale du domaine Ω ; $\psi(\vec{y}, \vec{x})$ est une fonction noyau de Green, $\Psi(\vec{x})$ est une fonction de normation définie par :

$$\Psi(\vec{x}) = \int_{\Omega} \psi(\vec{y}, \vec{x}) d\Omega(\vec{y}) \qquad \textbf{(7)}$$

La fonction de poids dans **(6)** non explicitée ici dépend d'un paramètre de longueur interne *l* qui contrôle l'interaction du point matériel avec son voisinage.

Des travaux détaillés dans [4] et [8] ont permis de montrer que la définition intégrale exprimée par l'équation **(6)** peut être remplacée, grâce à un choix judicieux de la fonction noyau (fonction de Green), par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\bar{f}(\vec{x}) - l^2 \vec{\nabla}^2 \bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) \qquad \textbf{(8)}$$

L'équation **(8)** est obtenue en faisant des approximations basées sur les développements de Taylor autour de la position $\vec{x}$. Dans cette expression, $\vec{\nabla}^2$ est l'opérateur Laplacien, *l* représente un paramètre de longueur interne. Nous pouvons également faire remarquer que la fraction volumique locale de martensite en $\vec{x}$ représente le terme source et la variable non-locale $\bar{f}(\vec{x})$, représente, le champ inconnu.

Dans le but de prendre en compte le phénomène d'adoucissement dans le présent modèle non-local, la force critique de transformation F_f^{crit} est considérée décroissante en fonction de la variable non-locale, $\bar{f}$. Elle est définie sous la forme suivante :

$$F_f^{crit} = F_0^{crit} \exp\left(-\frac{H_{\bar{f}}}{H_{\bar{f}} + 1} \bar{f}\right) \qquad \textbf{(9)}$$

Cette expression de la force critique de transformation est retenue dans le cas de la transformation de phase directe austénite-martensite. Elle est légérement modifiée dans le cas de la transformation inverse sous la forme :

$$F_f^{crit} = F_0^{crit} \exp\left(-\frac{H_{\bar{f}}}{H_{\bar{f}}+1} * (1-\bar{f})\right) \qquad \textbf{(10)}$$

3. Formulation faible du problème non local

Un élément fini 2D est développé sur la base du modèle de comportement précedemment décrit en prenant en compte les équations **(2)** et **(3)**, ainsi que les équations de champs du problème constituées de l'équation **(8)**, de l'équation d'équilibre mécanique et de l'équation d'équilibre thermique. Le problème thermomécanique à résoudre correspond donc au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \bar{f}(\vec{x}) - l^2 \nabla^2 \bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) \\ div\,\Sigma = 0 \\ -div\,\vec{q} + r = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(11)}$$

Où $\vec{q}$ représente le flux de chaleur dans le domaine Ω et r, la puissance calorifique volumique des sources internes. Les équations de champs **(11)** sont complétées par les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{gathered} \Sigma_{ij} n_j = T_i \quad \text{sur } \Gamma^{\Sigma};\ U_i = U_0 \text{ sur } \Gamma^{u}.\ \text{Avec } \Gamma^{\Sigma} \cup \Gamma^{u} = \Gamma \text{ et } \Gamma^{\Sigma} \cap \Gamma^{u} = \varnothing \\ \vec{\nabla}\bar{f} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma \\ \vec{q}.\vec{n} = q_d \text{ sur } \Gamma^{q} \end{gathered} \qquad \textbf{(12)}$$

Avec la deuxième condition aux limites dans **(12)**, nous supposons que le flux de transformation est nul sur la frontière du domaine considéré.

Dans le but de résoudre le problème par la méthode des éléments finis, le système d'équations **(11)** est résolue sous sa forme faible :

$$\begin{gathered} -\int_\Omega w_{\bar{f}} H^{\bar{f}u} : \delta E d\Omega + \int_\Omega \left[(1 - H^{\bar{f}\bar{f}}) \delta\bar{f} + l^2 \vec{\nabla} w_{\bar{f}} \vec{\nabla}\bar{f} \right] d\Omega - \int_\Omega w_{\bar{f}} H^{\bar{f}T} : \delta T d\Omega = -\int_\Omega \left[w_{\bar{f}} \bar{f}^{(i-1)} + l^2 \vec{\nabla} w_{\bar{f}} \vec{\nabla}\bar{f}^{(i-1)} \right] d\Omega + \int_\Omega w_{\bar{f}} f^{(i-1)} d\Omega \\ \int_\Omega \left[\vec{\nabla} \vec{w}_u\right]^T : (H^{uu} : \delta E) d\Omega + \int_\Omega \left[\vec{\nabla} \vec{w}_u\right]^T : H^{u\bar{f}} \delta\bar{f} d\Omega + \int_\Omega \left[\vec{\nabla} \vec{w}_u\right]^T : H^{uT} \delta T d\Omega = \int_{\Gamma^{\Sigma}} \vec{w}_u . \vec{T}^{(i)} d\Gamma^{\Sigma} - \int_\Omega \left[\vec{\nabla} \vec{w}_u\right]^T : \Sigma^{(i-1)} d\Omega \\ \int_\Omega \left[\vec{\nabla} w_T\right]^T . (H^{TT} \delta T) d\Omega + \int_\Omega w_T r d\Omega = \int_{\Gamma^q} w_T . \vec{q}^{(i)} d\Gamma^q - \int_\Omega \left[\vec{\nabla} w_T\right]^T . \vec{q}^{(i-1)} d\Omega \end{gathered} \qquad \textbf{(13)}$$

Où $\vec{w}_u$, $w_{\bar{f}}$ et w_T représentent des fonctions tests, prises ici de classe C^0. On notera également que les équations constitutives **(2)** et **(3)** du modèle, ainsi que la loi de comportement assurant les échanges thermiques au sein du domaine Ω ($\vec{q} = -k\vec{\nabla}T$, où k représente la conductivité thermique du matériau), sont utilisées sous leurs formes incrémentales :

$$\begin{gathered} \delta\Sigma = H^{uu} \delta E + H^{u\bar{f}} \delta\bar{f} + H^{uT} \delta T \\ \delta f = H^{\bar{f}u} \delta E + H^{\bar{f}\bar{f}} \delta\bar{f} + H^{\bar{f}T} \delta T \\ \delta\vec{q} = H^{TT} \delta T \end{gathered} \qquad \textbf{(14)}$$

L'introduction des interpolations polynomiales des champs de déplacement, de la fraction volumique non locale et de la température, ainsi que leur gradient dans l'équation **(13)**, nous permet de réécrire les équations d'équilibre à résoudre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\left[K^{uu}\right]\left\{\delta u^{N}\right\}+\left[K^{u\bar{f}}\right]\left\{\delta \bar{f}^{N}\right\}+\left[K^{uT}\right]\left\{\delta T^{N}\right\} &= -\left\{F_{\text{int}}^{u}\right\}+\left\{F_{ext}^{u}\right\} \\
\left[K^{\bar{f}u}\right]\left\{\delta u^{N}\right\}+\left[K^{\bar{f}\bar{f}}\right]\left\{\delta \bar{f}^{N}\right\}+\left[K^{\bar{f}T}\right]\left\{\delta T^{N}\right\} &= -\left\{F_{\text{int}}^{f}\right\} \\
\left[K^{TT}\right]\left\{\delta T^{N}\right\} &= -\left\{F_{\text{int}}^{T}\right\}+\left\{F_{ext}^{T}\right\}
\end{aligned} \tag{15}$$

où $\left[K^{uu}\right]$, $\left[K^{u\bar{f}}\right]$, $\left[K^{uT}\right]$, $\left[K^{\bar{f}u}\right]$, $\left[K^{\bar{f}\bar{f}}\right]$, $\left[K^{\bar{f}T}\right]$, et $\left[K^{TT}\right]$ représentent des sous matrices de rigidité. C'est ce système d'équations qui sera résolu grâce au logiciel de calcul par éléments finis Abaqus pour les différents problèmes étudiés dans ce travail. L'implémentation dans Abaqus a été réalisée via la routine utilisutateur UEL.

L'outil numérique ainsi obtenu est utilisé pour décrire les phénomènes de localisation de la transformation de phase lors d'un chargement mettant en oeuvre le comportement effet mémoire de forme dans deux plaques minces (Fig. 1) en AMF : la première présente une zone de défaut matériel avec un seuil de transformation austénite-martensite plus faible (60% de la force critique de transformation) et la deuxième est une plaque trouée. Les deux plaques sont soumises à un chargement thermique sous une comtrainte imposée de 400 MPa. Concernant le comportement superélastique, des exemples de simulations sont présentés dans [3]. Les paramètres matériaux du modèle sont regroupés dans le tableau 1.

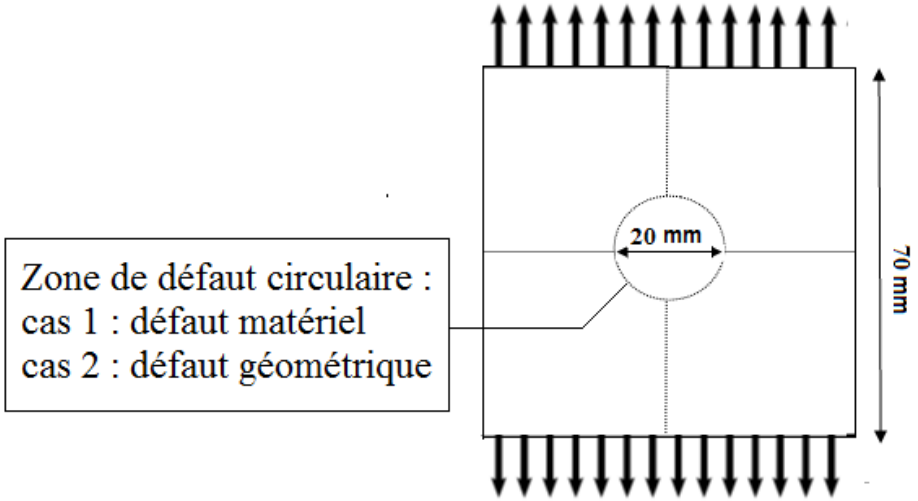


Fig. 1. Plaque carrée mince en AMF avec une zone affaiblie

$E(MPa)$	ν	$\alpha(°C)$	ε_{trac}^{T}	ε_{trac}^{TFA}
39500	0.3	8.10^{-6}	0.056	0.053
ε_{comp}^{T}	$b_{dtrac}(MPa/°C)$	$b_{rtrac}(MPa/°C)$	M_S	A_f
0.044	4.2	4.2	-80	-2
r_f	$F_{\bar{\varepsilon}^T}^{crit}$	H_f	$H_{\bar{\varepsilon}^T}$	H_S
0.25	100	2	1635	68.5

Tableau 1. Paramètres matériaux du modèle

4. Résultats numériques et discussions

La figure 2 ci-dessous montre la distribution spatiale de la fraction volumique non-locale de martensite en fonction du chargement pour les deux plaques étudiées. En raison des symétries des deux problèmes, uniquement le quart de chaque plaque a été modelisé. Nous remarquons que dans les deux cas, la transformation débute dans les endroits présentant une hétérogénéité avant de se propager au reste de la plaque. Dans le cas de la plaque avec un défaut matériel, elle débute dans la zone fragilisée (disque) puis se propage de manière non homogène en laissant apparaître une bande :

c'est la bande de localisation de la tranformation. Pour la plaque trouée, en raison de la concentration de contraintes autour du trou, la transformation débute dans cette zone, elle évolue ensuite comme dans le cas précédent en faisant apparaître la bande de localisation. Notons que l'effet de la localisation est plus marqué dans ce cas en raison d'une concentration de contraintes autour du trou. C'est ce que montre les figures 3.c) et 3.d) où l'évolution de la fraction volumique non-locale de martensite est plus importante dans le cas de la plaque trouée que dans le cas de la plaque avec une zone fragile pour le même chemin (arc AB) et à la même température (T = 5°C). Nous remarquons également que lorsque le paramètre de longueur interne prend des valeurs de plus importantes, la localisation s'atténue.

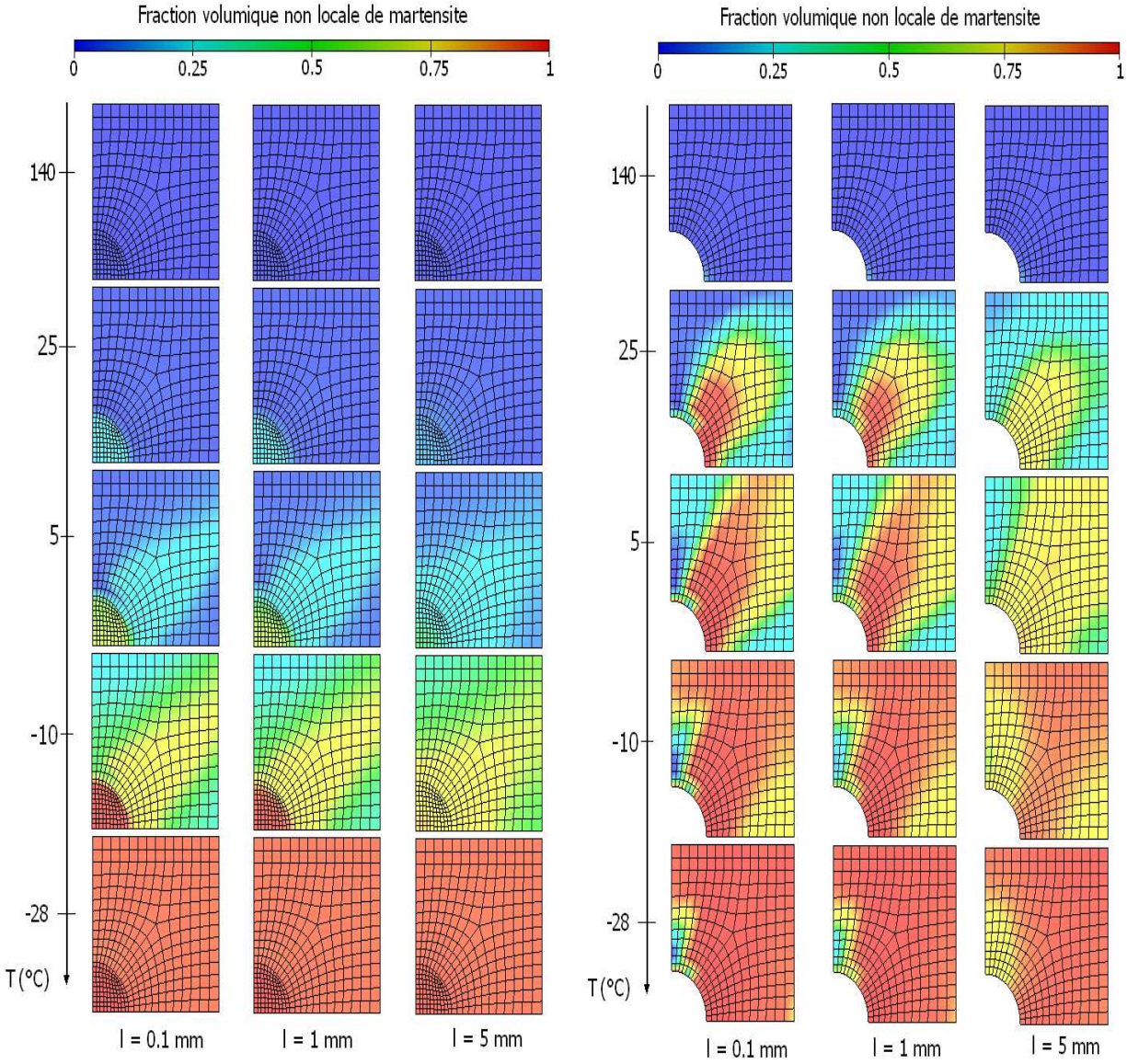


Fig. 2. Distribution spatiale de fraction volumique non-locale de martensite dans les deux plaques à différents niveaux de chargement pour diverses valeurs du paramètre de longueur interne *l*

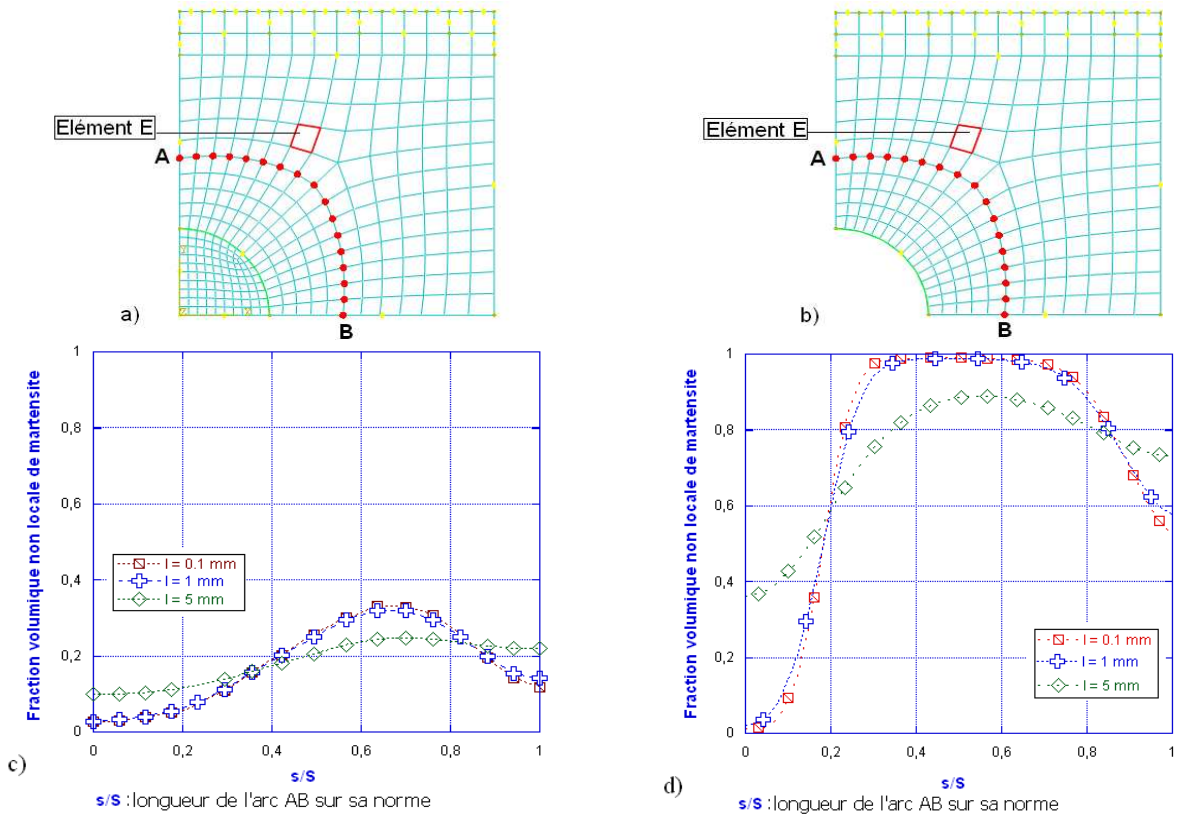


Fig. 3. Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite pour les deux plaques suivant le chemin AB à la température T = 5°C pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne *l*

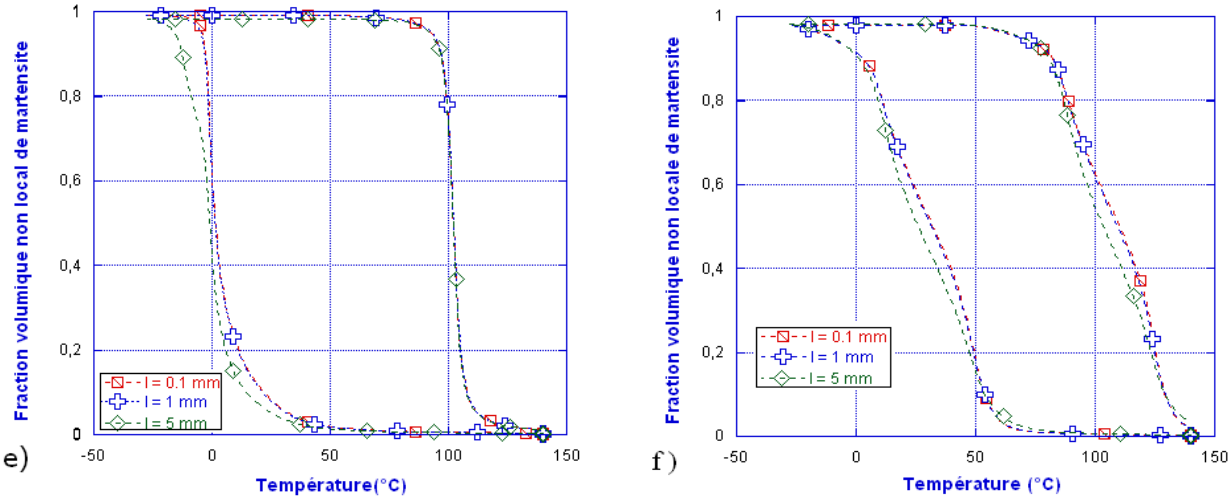


Fig. 4. Evolution de la fraction volumique non-locale de martensite en fonction de la température pour les deux plaques dans l'élément E pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne *l*

Sur la figure 4, nous avons représenté les hystérésis représentant la variation de la fraction volumique non-locale de martensite dans une zone de la plaque (élément E, Figs. 3a et 3b) en fonction de la température appliquée, dans les deux configurations étudiées et pour différentes valeurs du paramètre de longueur interne. Ces deux graphes ne montrent pas une influence importante du paramètre de longueur interne dans ce cas.

5. Conclusion

Un modèle de comportement non-local de type gradient est proposé en vue d'étudier la localisation de la transformation de phase et sa propagation instable au sein des structures minces en AMF. L'implémentation du modèle dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus a nécessité le

développement d'un élément fini 2D ayant un degré de liberté supplémentaire : la fraction volumique non-locale de martensite. Cet élément fini a été utilisé pour étudier la localisation de la transformation dans deux plaques minces où nous avons pu voir l'influence de défaut géométrique (trou) et matériel (zone fragile). La prise en compte de l'effet de la chaleur latente de transformation sur lecomportement des structures minces en AMF constitue l'une des importantes perspectives de ce travail.

Références

[1] Azadi B., Rajapakse R.K.N.D, Maijer D.M., Multi-dimensional constitutive modeling of SMA during unstable pseudoelastic behavior, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, Volume 44, pages 6473-6490, 2007.

[2] Chemisky Y., Duval A., Patoor E., Ben Zineb T., Constitutive model for shape memomry alloys including including phase transformation, martensitic reorientation and twins accomodation, Mechanics of Materials, Elsevier, Volume 43, pages 361-376, 2011.

[3] Duval A., Haboussi M., Ben Zineb T., Modelling of localization and propagation of phase transformation in superelastic SMA by a gradient nonlocal approach, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, Volume 48, pages 1879-1893, 2011.

[4] Engelen R.A.B., Geers M.G D., De Borst R., Baaijens F.P.T., Nonlocal implicit gradient-enhanced elastoplasticity for the modelling of softening behavior, International Journal of Plasticity, Pergamon, Volume 19, pages 403-433, 2003.

[5] Frick C.P, Orso S., Arzt E. Loss of pseudoelasticity in Nickel-Titanium sub_micron compression pillars, Acta Materiala, Elsevier, Volume 55, pages 3845-3855, 2007.

[6] Geers M.G.D., De Borst R., Brekelmans W.A.M., Peerlings R.H.J, Validation and internal length scale determination for a gradient damage model : application to short glass-fibre-reinforced polypropylene, International Journal of Solids and Structures, Pergamon, Volume 36, pages 2557-2583, 1999.

[7] He Y.J., Sun Q.P., Macroscopic equilibrium domain structure and geometric compatibility in elastic phase transition of thin plates, International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, Volume 52, pages 198-211, 2010.

[8] Peerlings R.H.J, Geers M.G.D, De Borst R., Brekelmans W.A.M., A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua, International Journal of Solids and Structures, Pergamon, Volume 38, pages 7723-7756, 2001.

[9] Perlings R.H.J, De Borst R., Brekelmans W.A.M, Wave propagation and localisation nonlocal gardient-enhanced damage models, Journal de Physiques, Volume 8, pages 293-300, 1998.

[10] Peultier B., Ben Zineb T., Patoor E., Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behavior. Application to structure computation by FEM, Material sciences and Engeneering, Elsevier, Volume 38, pages 510-524, 2006.

[11] Pijaudier-Cabot G, Zdenek P. Bazant, Nonlocal damage theory, Journal of Engeneering Mechanics-ASCE, Volume 113, pages 1512-1533, 1987.

[12] Zdenek P. Bazant, Giovanni Di Luzio, Nonlocal microplane model with strain-softening yield limits, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, Volume 41, pages 7209-7240, 2004.