Caractérisation et modélisation probabiliste des milieux hétérogènes

Dominique Jeulin

CARACTÉRISATION ET MODÈLISATION PROBABILISTE DES MILIEUX HÉTÉROGÈNES

Dominique Jeulin[a]
[a] Centre de Morphologie Mathématique, Mines ParisTech, PSL Research University, Fontainebleau, France,
dominique.jeulin@mines-paristech.fr

Mots-clefs : microstructure virtuelle, modèle de microstructuret, ensemble aléatoire, modèle Booléen

1 Introduction

Les matériaux réels présentent une hétérogénéité intrinsèque qui se manifeste par des fluctuations à l'échelle microscopique et au niveau du comportement macroscopique. Pour en tenir compte, il convient de suivre une approche probabiliste capable de générer des modèles et des simulations de microstructures hétérogènes. Des modèles réalistes peuvent être construits à partir de l'observation des microstructures, après identification des paramètres à partir de mesures morphologiques pertinentes. Ces modèles peuvent ensuite être introduits dans des modèles de changement d'échelle pour prédire leurs propriétés physiques effectives et leurs fluctuations à petite échelle.

2 Caractérisation probabiliste des milieux aléatoires ; capacité de Choquet

La première étape avant le développement de modèles est d'obtenir une caractérisation pertinente. Celle-ci s'appuie sur la capacité de Choquet, qui généralise la fonction de répartition des variables aléatoires.
Un milieu biphasé (comme un ensemble de particules A dans une matrice A^c) peut être représenté par un modèle d'ensemble fermé aléatoire (EFA) A [28, 30, 36, 15], entièrement caractérisé d'un point de vue probabiliste par sa capacité de Choquet $T(K)$, définie sur les ensembles compact K à parir de l'équation (1), où P est une probabilité :

$$T(K) = P(K \cap A \neq \emptyset) = 1 - Q(K) = 1 - P(K \subset A^c). \tag{1}$$

La fonctionnelle $T(K)$ est la probabilité pour l'ensemble K de rencontrer l'ensemble aléatoire A. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, la capacité de Choquet est reliée à l'opération de dilatation de la Morphologie Mathématique $A \oplus \check{K}$, où $A \oplus \check{K} = \{x - y : x \in A, y \in K\}$:

$$T(K_x) = P\{K_x \cap A \neq \emptyset\} = P\{x \in A \oplus \check{K}\}$$

où K_x est le translaté de K au point x. En pratique, $T(K)$ peut être estimée par mesure de fraction surfacique sur des images 2D, ou de fraction volumique sur des images 3D (à partir de microstructures réelles, ou de simulations), après dilatation de l'ensemble A par K [28, 30, 36, 15], ou calculée pour un modèle théorique. L'équation (1) est utilisée pour l'identification d'un modèle (i.e. pour estimer ses paramètres, et contrôler sa validité). Parmi les caractéristiques morphologiques déduites de (1), on obtient la fraction volumique V_V, la covariance (utile pour mettre en évidence les échelles ou les anisotropies), la distribution des distances d'un point dans A^c à la frontière de A.
La capacité de Choquet a été étendue au cas de fonctions aléatoires (FA) semi-continues (supérieurement, inférieurement), pour lesquelles les changements de support par le supremum $\vee$ ou par l'infimum $\wedge$ fournissent les variables aléatoires [29] :

$$Z_\vee(K) = \vee_{x \in K}\{Z(x)\}$$

$$Z_\wedge(K) = \wedge_{x \in K}\{Z(x)\}$$

Ces opérations sur des fonctions aléatoires sont utilisées pour connaître les lois de probabilité des valeurs extrêmes sur un compact K, comme pour les modèles de statistique de rupture (voir la section 4.3).
La capacité de Choquet se généralise au cas de fonctions aléatoires multivariables $Z_i(x)$ [14], comme les composantes d'un champ de vecteurs ou de tenseurs.

3 Ensembles aléatoires

3.1 Le Schéma Booléen

Certains matériaux (comme des milieux poreux ou des composites) peuvent être simulés par implantation aléatoire d'objets, avec possibilité de recouvrement. Le schéma Booléen, dévelopé par G. Matheron [28, 30], reproduit cette situation. Des présentations complètes de ce modèle archétype sont disponibles, comme entre autres en [28, 30, 36, 6] . On part d'un processus ponctuel de Poisson de densité θ (nombre moyen par unité de volume) : tout volume V contient un nombre aléatoire de points $N(V)$ suivant une loi de Poisson de moyenne θV, et les variables $N(V_i)$ sont indépendantes pour des volumes V_i disjoints. En chaque point du processus est implantée une réalisation indépendante d'un grain primaire aléatoire compact A' (par exemple une sphère de rayon aléatoire). L'union ensembliste des grains primaires engendre un EFA A. Un schéma booléen de sphères de rayon fixe simule la croissance isotrope et sans interaction à partir de germes ponctuels. Pour ce modèle, la capacité de Choquet est donnée par (2), où $\overline{V}(A' \oplus \check{K})$ est le volume moyen du grain primaire A', dilaté par K :

$$T(K) = 1 - \exp -\theta\overline{V}(A' \oplus \check{K}) \tag{2}$$

Comme cas particulier on obtient la fraction volumique des grains V_V, donnée par (3) :

$$1 - V_V = q = 1 - \exp -\theta\overline{V}(A'). \tag{3}$$

En prenant pour K un couple de points, 3 points, ou une boule de rayon r, on accède à la covariance, le moment d'ordre 3, et à la distribution du rayon des sphères de contact (distribution de la distance d'un point aléatoire dans A^c à la frontière de A). Pour une population donnée de grains aléatoires, ces fonctions morphologiques sont accessibles par (2). Pour le cas particulier de grains sphériques, l'histogramme des rayons des sphères peut être estimé à partir de la covariance [5], et le modèle est identifiable à partir du moment d'ordre 2, qui est une information à 1D. Plus généralement, l'identification du modèle peut nécessiter le recours à des moments d'ordre supérieur pour estimer la population des grains primaires.

Une caractéristique primordiale contrôlant le comportement macrosopique (par exemple la conductivité, ou encore la perméabilité) d'un milieu biphasé dont les constituants ont un fort contraste est l'existence de chemins continus inclus dans une phase et traversant un échantillon, ou percolation. Ceci se traduit par un seuil de percolation p_c, ou fraction volumique au-delà de laquelle un constituant percole. Dans le cas du schéma Booléen, ce seuil peut être estimé à partir de simulations de la microstructure. Les seuils de percolation de A et de A^c différent, ces deux ensembles n'étant pas symétriques. Par exemple le seuil de percolation d'un schéma Booléen de sphères ayant un seul rayon est de 0.2895 [26, 34], tandis que le seuil de percolation du complémentaire est donné par 0.05698 [19] et 0.0540 ± 0.005 [25]. Un grain primaire anisotrope (par exemple des sphéro-cylindres) conduit à une baisse du seuil de percolation (0.01145 pour un rapport d'aspect $l/r = 100$ [4, 25] et une distribution uniforme d'orientations).

Les propriétés effectives (propriétés électro-statiques et élastiques) de schémas Booléens de sphères [41] ont été estimées par moyennes spatiales des champs électriques et élastiques obtenus numériquement par FFT ("Fast Fourier Transform") [8, 33] sur des réalisations, pour une gamme complète de fractions volumiques. De même, la perméabilité de Darcy de milieux poreux aléatoires a été étudiée par résolution numérique des équations de Stokes par FFT pour des schémas Booléens de sphères [1] et de cylindres [43].

3.2 Ensembles aléatoires multi-échelles : schéma Booléen de Cox

De nombreux matériaux ont une microstructure qui présente une superposition de plusieurs échelles [20]. Par exemple dans certains nanocomposites on rencontre des agrégats (comme du noir de carbone) arrangés à plusieurs échelles [11]. Ces arrangements ont un impact sur le seuil de percolation, et par suite sur les propriétés effectives de ces composites (comme la conductivité, la permittivité diélectrique, ou les modules élastiques), dépendant des propriétés des constituants (charge et matrice), et de leur distribution spatiale.

Une manière efficace pour prendre en compte une distribution non homogène de grains aléatoires est obtenue en remplaçant dans le schéma Booléen le processus ponctuel homogène de Poisson par un processus de Cox. On considère une FA positive donnant une densité non homogène $\theta(x)$. Pour toute réalisation de cette FA est engendré un processus ponctuel de Poisson de densité $\theta(x)$. Un cas particulier intéressant s'obtient avec une densité θ constante dans un premier EFA A (par exemple, A est un schéma Booléen de sphères de grand

rayon R). Dans une seconde étape on conserve les points d'un processus de Poisson contenus dans A, comme germes des centres de sphères de rayon plus petit r, si bien qu'il n'y a aucun germe dans A^c [26] ou dans A. La mesure aléatoire (densité) du processus s'écrit alors $\theta(dx) = \theta 1_A(x)dx$, où $1_A(x)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A ($1_A(x) = 1$ is $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$). La capacité de Choquet de ce modèle et des approximations sont données en [18, 20].
Pour les nanocomposites contenant du noir de carbone, on utilise généralement un modèle à trois échelles [9, 35, 26, 11] : des particules sphériques de noir de carbone (avec une distribution de rayons $f_1(r)$) sont situées aux points de Poisson dans des zones d'inclusion (schéma Booléen de sphères de distribution de rayons $f_2(r)$) et à l'extérieur de zones d'exclusion (schéma Booléen de sphères de distribution de rayons $f_3(r)$). Les paramètres du modèles sont identifiés par optimisation itérative, en minimisant l'écart quadratique entre des propriétés probabilistes de simulations et d'images des matériaux. En [9, 11], le modèle multi-échelles est identifié à l'aide de la covariance, du moment d'ordre trois, et de la fraction surfacique après fermetures 2D sur des images de microscope électronique à transmission. Une approche similaire a été dévelopée pour simuler la microstructure multi-échelle de matériaux mésoporeux contenant des plaquettes d'alumine, utilisés pour la catalyse [39].
Les propriétés électrostatiques et élastiques de schémas Booléens de Cox à grains sphériques à 2 et à 3 échelles ont été estimées sur des simulations par FFT [42]. Le coefficient de diffusion de Fick d'alumines mesoporeuses a été estimé par FFT [40]. Cette approche a été également suivie pour homogenéiser les modules visco-élastiques de schémas Booléens multi-échelles de Cox simulant la répartition de noir de carbone dans des matériaux caoutchoutés [9].

3.2.1 Percolation du schéma Booléen de Cox

La présence d'agrégats se traduit par une baisse du seuil de percolation : pour une large séparation d'échelles dans un modèle à deux échelles, la borne inférieure du seuil de percolation p_c est donnée par le produit des seuils de percolation de chaque échelle, $p_c^1 p_c^2$. Des modèles impliquant l'itération d'échelles conduisent à des seuils de percolation très faibles, et par suite à une amélioration des propriétés macroscopiques dans le cas d'un fort contraste de propriétés. Des exemples sont traités par simulations en [25, 26, 27] . En [25], $p_c = 0.0849$ pour un facteur d'échelles de 30 dans un modèle Booléen de Cox de sphères, proche de $0.2897^2 = 0.0839$. En [27] le seuil de percolation de sphèro-cylindres ($l/r = 100$), dont les centres sont situés dans un schéma Booléen de sphères (avec $V_v = 0.32$) percole pour $p_c = 0.0056$. Ceci peut expliquer les performances de nanocomposites contenant des agrégats de sphères [11, 42] ou des nanotubes de carbone, comparativement à une distribution homogène sur des germes de Poisson.

3.3 Ensembles aléatoires corrélés à grande échelle

Les réseaux de fibres longues et les milieux stratifiés présentent des corrélations à grande échelle. Ces milieux peuvent être modélisés par des variétés aléatoires Booléennes [13, 14, 23, 24], généralisations du schéma Booléen où les points de Poisson sont remplacés par des variétés de Poisson (comme les droites de Poisson à 2D ou à 3D, et des plans de Poisson à 3D). La capacité de Choquet de ces modèles et de leur généralisation à toute dimension est donnée dans ces références.
Ce type de microstructure percole pour toute fraction volumique pour un échantillon de grande taille. A partir des bornes d'ordre 3 des propriétés effectives [31], on peut montrer que pour une infinité d'itérations d'unions de plans de Poisson dilatés présentant des échelles très séparées [13, 14, 16], on obtient une structure multi-échelle dont la permittivité effective est donnée par la borne supérieure d'Hashin-Shtrikman (HS) (resp. inférieure), en attribuant la plus grande permittivité à l'union des plans dilatés (resp.à leur complémentaire) [16, 17]. Ce résultat est valable pour un milieu poreux, où la borne supérieure (H-S) est la permittivité. On obtient le même résultat pour le module élastique de compressibilité κ pour un milieu biphasé bien ordonné, satisfaisant $(\kappa_1 - \kappa_2)(\mu_1 - \mu_2) > 0$, μ étant le module de cisaillement. Les stratifiés de rang infini [32] donnent une microstructure deterministe conduisant aux mêmes propriétés optimales valables pour des milieux isotropes.
L'utilisation de ces modèles à grande échelle dans des simulations numériques se heurte à des difficultés de deux sortes : pour résoudre un problème physique à partir de réalisations de la microstructure, il n'est pas possible d'utiliser ici des versions périodiques, qui couvriraient l'espace, et par suite l'effet des conditions aux limites pour l'estimation des propriétés effectives ne peut pas être minimisé. Enfin, en raison des portées intégrales

infinies de tels milieux, la variance des moyennes locales décroît nettement plus lentement avec le volume simulé (suivant des lois de puissance [23]) que dans le cas d'une portée intégrale finie. Ce fait se traduit par une convergence très lente des propriétés apparentes, obtenues par simulations numériques, vers les propriétés effectives, [2, 7].

4 Fonctions aléatoires

Une généralisation du schéma Booléen au cas des FA est donnée par les FA Booléennes (FAB).

4.1 Construction de FA Booléennes

Ce modèle a été proposé au départ pour simuler des surfaces rugueuses, où la topographie est imprimée par indentations aléatoires d'une surface initialement plane [12]. En remplaçant dans la construction du schéma Booléen les grains primaires A' par une fonction primaire aléatoire (PRF) $Z'(x)$, deux types de FBA peuvent être construites [13, 22] : la sup FAB s'obtient en partant d'une valeur plancher constante (par exemple $-\infty$) et en prenant le supremum des PRF translatées aux points de Poisson. Alternativement, en partant d'un plafond constant (comme $+\infty$), et en prenant l'infimum de PRF, on définit une inf FAB. Les deux constructions sont reliées, le négatif d'un type donnant l'autre type. La construction d'une inf FBA est analogue au processus d'indentation. La capacité de Choquet de ces modèles, avec comme cas particuliers la loi spatiale et le changement de support par le $\vee$ (pour la FAB) ou par $\wedge$ (pour l'inf FAB) sur le compact K, est donnée en [12, 13, 22, 36, 37, 38].

4.2 Partitions aléatoires et polycrystaux

Les partition aléatoires permettent de simuler des polycrystaux, chaque classe de la partition représentant un grain. Le modèle le plus largement utilisé est la partition de Voronoi obtenue par construction des zones d'influence de points de Poisson [6]. Comme le schéma Booléen de sphères, ce modèle imite la croissance isotrope à partir de germes aléatoires, mais l'interpénétration de sphères est interdite en arrêtant leur croissance. La partition aléatoire est constituée de polyédres convexes à 3D.

La construction d'une partition de Voronoi peut être reliée à la construction de l'inf FAB comme suit [21] : on implante en chaque point de Poisson une PRF constituée d'un paraboloïde de révolution dans $\mathbb{R}^3\times\ \mathbb{R}^+$. Les lignes de crêtes de cette FAB, obtenues par ligne de partage des eaux des points de Poisson non couverts par les PRF) engendrent les frontières de la partition de Voronoi. D'autres modèles classiques comme les partitions de Laguerre ou de Johnson-Mehl (avec des grains non convexes) s'obtiennent par la même construction avec des PRF ad-hoc [21]. Des partitions aléatoires plus générales sont construites de manière semblable pour simuler par exemple une croissance localement anisotrope de germes à partir de paraboloïdes croissants de sections ellipsoïdales dans $\mathbb{R}^3$, ou des grains de frontières rugueuses. Une illustration est donnée en [3] pour la simulation d'un acier martensitique, où l'identification du modèle est faite à partir de micrographies EBSD 2D et 3D. En [10] un matériau granulaire est simulé par une partition de Johnson-Mehl localement anisotrope.

4.3 FA Booléennes et statistique de rupture

En statistique de rupture, on utilise communément l'hypothèse du maillon le plus faible, impliquant la rupture d'un matériau fragile après initation sur le défaut le plus critique : quand en au moins un point x dans un échantillon la contrainte principale appliquée $\sigma(x)$ dépasse la contrainte critique locale $\sigma_c(x)$, l'échantillon est rompu. La rupture est donc contrôlée par le minimum des écarts $\sigma_c(x)-\sigma(x)$. La distribution de ce minimum est accessible pour des inf FAB, construites pour des défauts aléatoires sur des germes de Poisson dans une matrice où $\sigma_c = \infty$ [13]. Le cas le plus courant correspond à des défauts ponctuels de densité $\Phi(\sigma)$ (nombre moyen par unité de volume de défauts de contrainte critique σ_c. Le modèle de Weibull, largement utilisé pour représenter les données expérimentales, correspond à $\Phi(\sigma) = \theta(\sigma - \sigma_0)^m$ et $P\{\text{Non rupture de } V\}$ suit une distribution de Weibull à 3 paramètres pour un échantillon soumis à un champ de contraintes uniformes. Les défauts ponctuels peuvent être remplacés par des défauts de section compacte de mesure non nulle [13, 16, 17, 22]. En remplaçant les points de Poisson par des variétés de Poisson on obtient de nouveaux effets d'échelle pour la décroissance de la résistance mécanique avec la taille des échantillons [13, 16, 17]. D'autres généralisations ont été étudiées :

cas d'une FAB multi-échelle obtenue par une FAB de Cox [22] ; itérations de variétés aléatoires Booléennes donnant différents types d'amas [24], comme des points de Poisson sur des droites de Poisson dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, ou des points de Poisson sur des plans de Poisson dans $\mathbb{R}^3$. Des résultats généraux ont permis de comparer, à nombre moyen de défauts fixé par unité de volume, la nocivité des différents types de défauts ponctuels selon leur répartition : rupture intergranulaire, fibreuse, ou par clivage.

5 Conclusion

Nous avons introduit brièvement quelques modèles morphologiques de structures aléatoires. Dotés d'une grande souplesse pour couvrir différentes morphologies, ils permettent de reproduire des microstructures réelles. Mis en oeuvre dans le contexte de la physique et de la mécanique des milieux aléatoires, ce sont des outils efficaces pour prédire, de manière analytique ou par des simulations de microstructures virtuelles, les propriétés effectives, leurs fluctuations, ainsi que les probabilités de la rupture des matériaux hétérogènes.

Références

[1] B. Abdallah, F. Willot, D. Jeulin. Stokes flow through a Boolean model of spheres : Representative volume element. *Transport in porous media*, 109(3), 711-726, 2015.

[2] H. Altendorf, D. Jeulin., F. Willot. Influence of the fiber geometry on the macroscopic elastic and thermal properties. *International Journal of Solids and Structures*, 51(23), 3807-3822, 2014.

[3] H. Altendorf, F. Latourte, D. Jeulin, M. Faessel, L. Saintoyant. 3D reconstruction of a multiscale microstructure by anisotropic tessellation models. *Image Analysis & Stereology*, 33(2), 121-130, 2014.

[4] I. Balberg, C.H. Anderson, S. Alexander, N. Wagner. Excluded volume and its relation to the onset of percolation. *Phys. Rev.* B 30 N 7 : 3933-3943, 1984.

[5] Th. Bretheau, D. Jeulin. Caractéristiques morphologiques des constituants et comportement élastique d'un matériau biphasé Fe/Ag. *Revue Phys. Appl.* 24 : 861-869, 1989.

[6] S. N. Chiu, D, Stoyan, W.S.. Kendall, J. Mecke. Stochastic geometry and its applications. Wiley, 2013.

[7] J. Dirrenberger, S. Forest, D. Jeulin. Towards gigantic RVE sizes for 3D stochastic fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*, 51(2), 359-376, 2014.

[8] D. J. Eyre, G. W. Milton. A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* 6 : 41-47, 1999.

[9] B. Figliuzzi, D. Jeulin, M. Faessel, F. Willot, M. Koishi, N. Kowatari. Modelling the microstructure and the viscoelastic behaviour of carbon black filled rubber materials from 3D simulations. *Technische Mechanik*, 32(1-2), 22-46, 2016.

[10] J. B. Gasnier, F, Willot,, H. Trumel, B. Figliuzzi, D. Jeulin, M. Biessy. A Fourier-based numerical homogenization tool for an explosive material. *Matériaux & Techniques*, 103(3), 308, 2015.

[11] A. Jean, D. Jeulin, S. Forest, S. Cantournet, F. N'Guyen. A multiscale microstructure model of carbon black distribution in rubber. *J. Microsc.* 241 (3) : 243- 260, 2011.

[12] D. Jeulin, P. Jeulin. Synthesis of Rough Surfaces by Random Morphological Models, Proc. 3rd European Symposium of Stereology. *Stereol. Iugosl.* vol. 3, suppl. 1 : 239-246, 1981.

[13] D. Jeulin. Modèles Morphologiques de Structures Aléatoires et de Changement d'Echelle. Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques, Université of Caen, 1991.

[14] D. Jeulin. Modèles de Fonctions Aléatoires multivariables. *Sci. Terre* ; 30 : 225-256, 1991.

[15] D. Jeulin. Random texture models for materials structures. *Statistics and Computing* 10 121, 2000.

[16] D. Jeulin. Random Structure Models for Homogenization and Fracture Statistics. Mechanics of Random and Multiscale Microstructures, ed D Jeulin and M Ostoja-Starzewski (Berlin : Springer Verlag, 2001) p. 33.

[17] D. Jeulin. Random Structures in Physics. Space, Structure and Randomness (Lecture Notes in Statistics vol 183, 2005) ed M Bilodeau F Meyer and M Schmitt (Berlin :Springer Verlag) p. 183.

[18] D. Jeulin. Multi Scale Random Models of Complex Microstructures. Thermec 2009 (Materials Science Forum, Vol. 638 - 642) ed T Chandra N Wanderka W Reimers and M Ionescu, pp. 81-6.

[19] D. Jeulin. Analysis and Modeling of 3D microstructures. Mathematical morphology : from theory to applications ed H Talbot and L Najman (New York : ISTE /J Wiley, 2010) chapter 19.

[20] D. Jeulin. Morphology and effective properties of multi-scale random sets : A review. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, doi :10.1016/j.crme.2012.02.004, Vol. 240 (4-5), pp. 219-229, 2012.

[21] D. Jeulin. Random tessellations generated by Boolean random functions. Pattern Recognition Letters, 47, 139-146, 2014.

[22] D. Jeulin. Boolean random functions. Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields (2015, pp. 143-169). Springer International Publishing.

[23] D. Jeulin. Power laws variance scaling of Boolean random varieties. *Methodology and Computing in Applied Probability*, Rn, 7, 3, 2015.

[24] D. Jeulin. Iterated Boolean random varieties and application to fracture statistics models. *Applications of Mathematics*, 61(4), 363-386, 2015.

[25] D. Jeulin, M. Moreaud. Percolation d'agrégats multi-échelles de sphères et de fibres : Application aux nanocomposites. Proc. Matériaux 2006 (Dijon).

[26] D. Jeulin, M. Moreaud. Multi-scale simulation of random spheres aggregates-Application to nanocomposites. J. Chraponski, J. Cwajna,. L. Wojnar (Eds), Proc. 9th European Congress on Stereology and Image Analysis, (Zakopane, Poland, 2005) vol. 1, 341-348.

[27] D. Jeulin, M. Moreaud. Percolation of multi-scale fiber aggregates. R. Lechnerova, I. Saxl, V. Benes (Eds), Proc. S4G, 6th Int. Conf. Stereology, Spatial Statistics and Stochastic Geometry (Prague, 26-29 June 2006), Union Czech Mathematicians and Physicists, 269-274.

[28] G. Matheron. Eléments pour une théorie des milieux poreux .Masson, 1967.

[29] G. Matheron. Théorie des ensembles aléatoires. Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, fasc. 4, edited by Paris School of Mines, 1969.

[30] G. Matheron. Random sets and Integral Geometry. Wiley, 1975.

[31] G.W. Milton. Bounds on the elastic and transport properties of two-component composites. *J. Mech. Phys. Solids* Vol. 30 : 177-191, 1982.

[32] G. W. Milton. Modeling the properties of composites by laminates. J.L. Ericksen, D. Kinderlehrer, R. Kohn, and J.L. Lions (eds), Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media, p. 150-174, Springer, 1986.

[33] H. Moulinec, P. Suquet. A Numerical Method for Computing the Overall Response of Nonlinear Composites with Complex Microstructure. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.* 157 : 69-94, 1998.

[34] M. Rintoul, S.Torquato. Precise determination of the critical threshold and exponents in a three-dimensional continuum percolation model. *J. Phys. A : Math. Gen.* 30 ; L585-592, 1997.

[35] L. Savary, D. Jeulin, A. Thorel. Morphological analysis of carbon-polymer composite materials from thick sections. *Acta Stereol.* 18, N3 : 297-303, 1999.

[36] J. Serra. Image analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, 1982.

[37] J. Serra (ed.). Image analysis and Mathematical Morphology, vol 2. Academic Press, 1988.

[38] J. Serra. Boolean Random Functions. *Journal of Microscopy*, Vol. 156, pt.1, pp. 41-63, 1989.

[39] H. Wang, A. Pietrasanta, D. Jeulin, F. Willot, M. Faessel, L. Sorbier, M. Moreaud. Modelling mesoporous alumina microstructure with 3D random models of platelets. *Journal of microscopy,* 260(3), 287-301, 2015.

[40] H. Wang, F. Willot, M. Moreaud, M. Rivallan, L. Sorbier, D. Jeulin. Numerical Simulation of Hindered Diffusion in γ-Alumina Catalyst Supports. *Oil & Gas Science and Technology*–Revue d'IFP Energies nouvelles, 72(2), 8, 2017.

[41] F. Willot, D. Jeulin. Elastic behavior of composites containing Boolean random sets of inhomogeneities. *International Journal of Engineering Sciences,* Vol. 47 : 313-324, 2009.

[42] F. Willot, D. Jeulin. Elastic and Electrical Behavior of Some Random Multiscale Highly Contrasted Composites. *International Journal of Multiscale Computational Engineering,* Vol. 9 (3) : 305-326, 2011.

[43] F. Willot, B. Abdallah, D. Jeulin. The Permeability of Boolean Sets of Cylinders. *Oil & Gas Science and Technology*–Revue d'IFP Energies nouvelles, 71(4), 52, 2016.