

Analyse spectrale des signaux aléatoires bivariés

Julien Flamant, Nicolas Le Bihan, Pierre Chainais

▶ **To cite this version:**

Julien Flamant, Nicolas Le Bihan, Pierre Chainais. Analyse spectrale des signaux aléatoires bivariés. GRETSI 2017 - XXVIème Colloque francophone de traitement du signal et des images, Sep 2017, Juan-Les-Pins, France. hal-01691274

HAL Id: hal-01691274
https://hal.science/hal-01691274

Submitted on 23 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse spectrale des signaux aléatoires bivariés

Julien FLAMANT[1], Nicolas LE BIHAN[2], Pierre CHAINAIS[1]

[1]Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9189 - CRIStAL, 59000 Lille, France

[2]CNRS/GIPSA-Lab, Grenoble, France

julien.flamant@phd.centralelille.fr, nicolas.le-bihan@gipsa-lab.grenoble-inp.fr
pierre.chainais@centralelille.fr

Résumé – Nous proposons un nouveau formalisme pour l'analyse spectrale des signaux bivariés décrits sous forme complexe. A la différence des approches existantes, nous démontrons un lien naturel entre grandeurs statistiques et paramètres physiques du signal. L'approche est fondée sur la définition de la densité spectrale quaternionique d'un processus bivarié. Une décomposition originale de tout signal bivarié stationnaire en composantes polarisée et non-polarisée est présentée. Un exemple illustre la pertinence du formalisme.

Abstract – We propose a new framework to spectral analysis of stationary bivariate signals seen as complex signals. In constrast to existing approaches, we show a natural link between statistical objects and physical parameters. The approach relies on the quaternion spectral density of a stationary bivariate signal. An original decomposition of such signals into polarized and unpolarized components is presented. The proposed approach is illustrated on a toy example.

1 Introduction

De nombreuses applications (océanographie, radar, etc.) nécessitent l'analyse spectrale de signaux bivariés, *i.e.* des signaux définis par 2 composantes $u[t]$ et $v[t]$ pouvant être combinées sous la forme d'un vecteur $(u[t], v[t])^T$ ou d'un signal complexe $x[t] = u[t] + \boldsymbol{i}v[t]$. Habituellement, l'analyse spectrale de ces signaux repose sur des méthodes multivariées standard [1] ou de traitement des signaux complexes [2]. Par exemple, l'approche complexe mène à l'analyse en composantes rotatoires du signal [3–5]. La contribution d'une fréquence donnée au signal bivarié prend alors la forme d'une ellipse, dont les paramètres géométriques dépendent des relations statistiques entre composantes rotatoires. Un défaut de ces approches réside dans la difficulté d'établir un lien simple entre densités spectrales et paramètres physiques ou géométriques.

Nous proposons une nouvelle approche permettant d'établir un lien naturel entre grandeurs statistiques et paramètres physiques du signal. Celle-ci repose sur deux ingrédients : i) la description des signaux bivariés comme signaux complexes et ii) l'utilisation d'une Transformée de Fourier Quaternionique (TFQ) menant à une représentation spectrale quaternionique de ces signaux. Précédemment [6, 7] ont démontré la pertinence du formalisme quaternionique pour l'analyse temps-fréquence des signaux bivariés déterministes. Pour les signaux aléatoires bivariés stationnaires nous montrons ici qu'il est aussi possible de définir une densité spectrale quaternionique s'interprétant directement en termes de paramètres de polarisation du signal bivarié stationnaire. Cela aboutit à une séparation naturelle des composantes polarisée et non-polarisée d'un signal bivarié. Le potentiel de ce nouvel outil est illustré sur l'exemple (pas si simple) du bruit blanc bivarié en Section 3.5.

2 Préliminaires

2.1 Quaternions

Les quaternions forment un corps $\mathbb{H}$ à 4 dimensions de base canonique $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, où $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sont des imaginaires purs, $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$ et tels que

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji},\ \boldsymbol{ijk} = -1. \tag{1}$$

Les quaternions englobent les nombres complexes, ce qui permet d'extraire des *sous-corps complexes* de $\mathbb{H}$ isomorphes à $\mathbb{C}$, par exemple $\mathbb{C}_{\boldsymbol{i}} = \text{span}\{1, \boldsymbol{i}\}$ ou $\mathbb{C}_{\boldsymbol{j}} = \text{span}\{1, \boldsymbol{j}\}$. Une liste exhaustive des propriétés des quaternions pourra être trouvée dans [8]. Le produit est non-commutatif, *i.e.* pour $p, q \in \mathbb{H}$, $pq \neq qp$ en général. Tout quaternion q s'écrit sous la forme

$$q = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Le conjugué de q est $\overline{q} = a - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k}$. Son module est $|q|^2 = q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. On définit la conjugaison par rapport à un axe donné $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ par $q^{*\boldsymbol{\mu}}$, par exemple $q^{\star\boldsymbol{j}} := a + b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$. Pour un usage futur, on pose $|q|_{\boldsymbol{j}}^2 = qq^{\star\boldsymbol{j}}$. On note $\mathcal{S}(q) = a \in \mathbb{R}$ la *partie scalaire* de q, et $\mathcal{V}(q) = q - \mathcal{S}(q) \in \text{span}\,\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ sa *partie vectorielle*.

2.2 Transformée de Fourier quaternionique

Nous présentons ici la version discrète de la Transformée de Fourier Quaternionique (TFQ) introduite dans [9]. Dans [6] nous avons démontré l'intérêt de la TFQ pour l'analyse temps-fréquence des signaux bivariés. Le théorème 1 de représentation spectrale des signaux bivariés, une contribution essentielle de ce travail, repose sur l'utilisation de cette TFQ.

On se place dans le cas des signaux à temps discret. Soit t un indice tel que $x(t\Delta) = x[t]$, où Δ est le pas d'échantillonage. Dans la suite, on suppose $\Delta = 1$. La TFQ à temps discret d'un signal $x[t]$ à valeurs dans $\mathbb{C}_{\boldsymbol{i}}$ est

$$X(\nu) := \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x[t] \exp(-\boldsymbol{j} 2\pi\nu t). \tag{3}$$

La TFQ inverse est donnée par

$$x[t] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(\nu) \exp(\boldsymbol{j} 2\pi\nu t) \mathrm{d}\nu. \tag{4}$$

Si l'on écrit $x[t] = u[t] + \boldsymbol{i} v[t]$, $u[t], v[t] \in \mathbb{R}$, la TFQ devient

$$X(\nu) = U(\nu) + \boldsymbol{i} V(\nu), \tag{5}$$

où $U(\nu), V(\nu) \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{j}}$ sont les TF à temps-discret de $u[t], v[t]$: la TFQ revient à calculer simultanément deux TF usuelles. Les propriétés usuelles de la TF sont alors aisément transposées à la TFQ [6]. En particulier, tout signal bivarié $x[t] \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{i}}$ a une représentation spectrale $X(\omega) \in \mathbb{H}$, et sa TFQ présente une symétrie $\boldsymbol{i}$-hermitienne

$$X(-\nu) = -\boldsymbol{i} X(\nu) \boldsymbol{i} \tag{6}$$

Cette symétrie (6) montre que seules les fréquences positives sont porteuses d'information.

Remarque. Cette propriété permet la construction d'un analogue bivarié du signal analytique usuel, appelé *plongement quaternionique*. On montre dans [6] que ce nouvel objet permet l'identification de la phase instantanée et de la polarisation instantanée des signaux bivariés non-stationnaires déterministes.

3 Densité spectrale des signaux bivariés stationnaires

Tout signal bivarié $x[t]$ peut s'écrire $x[t] = u[t] + \boldsymbol{i} v[t]$, où $u[t], v[t]$ sont des signaux réels. Le processus $x[t]$ est dit *stationnaire d'ordre deux* si $u[t]$ et $v[t]$ sont *conjointement stationnaires d'ordre deux*. Dans ce cas

$$\mathbf{E}\{x[t]\} = \mathbf{E}\{u[t]\} + \boldsymbol{i}\mathbf{E}\{v[t]\} = m \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{i}}, \tag{7}$$

$$R_{uu}[t,\tau] = \mathbf{E}\{u[t]u[t-\tau]\} = R_{uu}[\tau],\ R_{uu}[0] < \infty, \tag{8}$$

$$R_{vv}[t,\tau] = \mathbf{E}\{v[t]v[t-\tau]\} = R_{vv}[\tau],\ R_{vv}[0] < \infty, \tag{9}$$

$$R_{uv}[t,\tau] = \mathbf{E}\{u[t]v[t-\tau]\} = R_{uv}[\tau], \tag{10}$$

où R_{uu}, R_{vv} et R_{uv} sont les fonctions d'autocovariance et d'intercovariance usuelles. La condition de stationnarité à l'ordre deux (simplement appelée stationnarité dans la suite) assure que la moyenne et les moments d'ordre deux sont indépendants de t. Dans la suite on suppose $x[t]$ de moyenne nulle ($m = 0$).

3.1 Représentation spectrale

Nous présentons un théorème de représentation spectrale quaternionique des signaux bivariés stationnaires, dont la preuve est donnée dans [10].

Théorème 1 (Représentation spectrale)**.** *Soit $x[t] = u[t] + \boldsymbol{i} v[t]$ un signal bivarié stationnaire. Supposons $u[t]$ et $v[t]$ harmonisables. Il existe alors une mesure aléatoire $X(\nu)$ à incréments orthogonaux, à valeurs sur $\mathbb{H}$ telle que*

$$x[t] = \int_{-1/2}^{+1/2} \mathrm{d}X(\nu) \exp(\boldsymbol{j} 2\pi\nu t), \tag{11}$$

en moyenne quadratique. La mesure $X(\nu)$ a pour propriétés :

1. $\forall \nu,\ \mathbf{E}\{\mathrm{d}X(\nu)\} = 0$,
2. *Il existe une distribution $\Gamma_{xx}(\nu)$ telle que*

$$\forall \nu,\ \mathbf{E}\left\{|\mathrm{d}X(\nu)|^2\right\} + \mathbf{E}\left\{|\mathrm{d}X(\nu)|_{\boldsymbol{j}}^2\right\} \boldsymbol{j} = \Gamma_{xx}(\nu)\mathrm{d}\nu$$

3. *Pour tout $\nu \neq \nu'$,*

$$\mathbf{E}\left\{\mathrm{d}X(\nu)\overline{\mathrm{d}X(\nu')}\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathrm{d}X(\nu)\mathrm{d}X(\nu')^{\star \boldsymbol{j}}\right\} = 0.$$

Les propriétés 1, 2 et 3 sont des conséquences directes des propriétés usuelles des incréments spectraux de u et v, obtenus par la représentation spectrale usuelle basée sur la TF. La propriété 2 introduit la *densité spectrale quaternionique* $\Gamma_{xx}(\nu)$ *d'un processus bivarié*, dont l'interprétation physique est détaillée dans la partie 3.3. La propriété 3 montre que les increments spectraux $\mathrm{d}X(\nu)$ sont deux fois orthogonaux.

3.2 Autocovariance et Wiener-Khintchine

Le théorème 1 permet une description spectrale du processus bivarié $x[t]$ via sa densité spectrale. Classiquement, la densité spectrale d'un processus peut être introduite comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance grâce au théorème de Wiener-Khintchine. Ici la notion d'autocovariance d'un processus bivarié doit être attentivement définie si l'on veut disposer d'un tel théorème de Wiener-Khintchine. Une approche naturelle est de simplement définir l'autocovariance de x par la TFQ inverse de $\Gamma_{xx}(\nu)$. Soit

$$\gamma_{xx}[\tau] = \int_{-1/2}^{+1/2} \Gamma_{xx}(\nu) \exp(\boldsymbol{j} 2\pi\nu\tau) \mathrm{d}\nu, \tag{12}$$

ou de manière explicite

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}[\tau] = {} & R_{uu}[\tau] + R_{vv}[\tau] \\ & + (R_{uu}[\tau] - R_{vv}[\tau])\boldsymbol{j} + 2R_{uv}[\tau]\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{13}$$

L'autocovariance $\gamma_{xx}[\tau]$ est à valeurs dans $\mathrm{span}\{1, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Elle n'est pas paire puisque $R_{uv}[\tau]$ n'est pas paire en général. L'autocovariance $\gamma_{xx}[\tau]$ se manipule de manière similaire à l'autocovariance usuelle. Par exemple, si x et y sont deux processus bivariés, stationnaires et indépendants, alors $\gamma_{x+y,x+y}[\tau] = \gamma_{xx}[\tau] + \gamma_{yy}[\tau]$. Le même résultat s'obtient pour les densités spectrales correspondantes.

Par cette définition l'autocovariance vérifie nécessairement un théorème de Wiener-Khintchine. L'expression (13) peut paraître inhabituelle au premier abord, mais il n'existe pas d'expression simple et naturelle de $\gamma_{xx}[\tau]$ en fonction de l'autocovariance usuelle $\mathbf{E}\left\{x[t]\overline{x[t-\tau]}\right\}$ et de la pseudo-covariance

$\mathbf{E}\{x[t]x[t-\tau]\}$. Néanmoins il existe un théorème semblable à Wiener-Khintchine reliant directement $x[t]$ et sa densité spectrale $\Gamma_{xx}(\nu)$.

Théorème 2. *Soit x un signal bivarié stationnaire. On a*

$$\mathcal{S}(\Gamma_{xx}(\nu)) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\left\{x[t]e^{-\boldsymbol{j}2\pi\nu\tau}\overline{x[t-\tau]}\right\} \quad (14)$$

$$\mathcal{V}(\Gamma_{xx}(\nu)) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\left\{x[t]e^{-\boldsymbol{j}2\pi\nu\tau}x[t-\tau]^{\star\boldsymbol{j}}\right\}\boldsymbol{j} \quad (15)$$

3.3 Paramètres de Stokes et sphère de Poincaré

Les paramètres de Stokes sont des quantités fondamentales utilisées pour la description de la polarisation des ondes électromagnétiques [11]. On montre dans [10] que la densité spectrale $\Gamma_{xx}(\nu)$ s'exprime directement sous la forme :

$$\Gamma_{xx}(\nu) = S_0(\nu) + \boldsymbol{i}S_3(\nu) + \boldsymbol{j}S_1(\nu) + \boldsymbol{k}S_2(\nu), \quad (16)$$

où $S_\alpha(\nu)$, $\alpha = 0,1,2,3$ sont les *paramètres de Stokes* de x. L'équation (16) revêt une puissante interprétation physique. Les paramètres de Stokes permettent naturellement une décomposition en composantes *polarisée* et *non-polarisée*, voir partie 3.4. La partie scalaire $\mathcal{S}(\Gamma_{xx}(\nu)) = S_0(\nu)$, correspond à la puissance totale à la fréquence ν, *i.e.* la somme des puissances des parties polarisée et non-polarisée. La partie vectorielle décrit uniquement la composante polarisée de x à la fréquence ν. Cette partie peut s'interpréter comme décrivant une onde électromagnétique de polarisation elliptique.

La figure 1 représente la sphère de Poincaré des états de polarisation [11]. A toute fréquence ν, la partie vectorielle de $\Gamma_{xx}(\nu)$– normalisée par sa partie scalaire $S_0(\nu)$ – identifie un point sur la sphère de Poincaré. Les coordonnées angulaires $(2\theta, 2\chi)$ donnent directement les propriétés de l'ellipse de polarisation, *i.e.* θ donne son orientation et χ son ellipticité.

Le rayon de la sphère de Poincaré donne le *degré de polarisation* $\Phi(\nu)$ à la fréquence ν :

$$\Phi(\nu) = \frac{\sqrt{S_1^2(\nu) + S_2^2(\nu) + S_3^2(\nu)}}{S_0(\nu)} = \frac{|\mathcal{V}(\Gamma_{xx}(\nu))|}{\mathcal{S}(\Gamma_{xx}(\nu))}. \quad (17)$$

Par définition $0 \leq \Phi(\nu) \leq 1$ pour tout ν. Le degré de polarisation $\Phi(\nu)$ quantifie la répartition entre composantes polarisée et non-polarisée. Par conséquent, le signal x est dit

- totalement polarisé à la fréquence ν si $\Phi(\nu) = 1$,
- non-polarisé à la fréquence ν si $\Phi(\nu) = 0$,
- partiellement polarisé à la fréquence ν si $0 < \Phi(\nu) < 1$.

3.4 Composantes polarisée et non-polarisée

Tout signal bivarié stationnaire peut être décomposé en somme de deux processus décorrélés : un processus totalement polarisé et un processus non-polarisé.

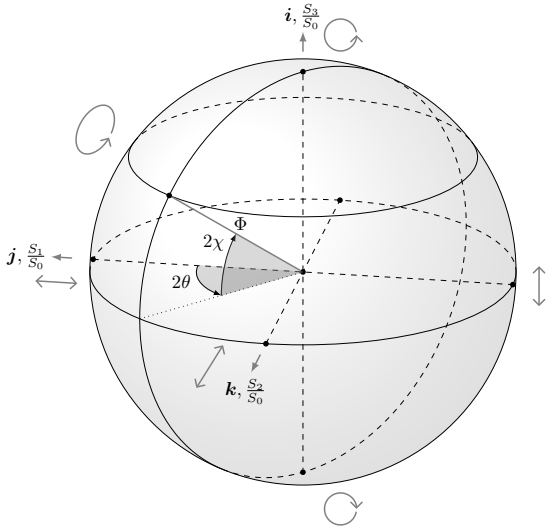


FIGURE 1 – Sphère de Poincaré et états de polarisation : un point sur la sphère correspond à un état de polarisation donné, caractérisé par ses coordonnées sphériques $(\Phi, 2\theta, 2\chi)$.

Réécrivons la densité spectrale du théorème 1 comme

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(\nu)\mathrm{d}\nu &= [1-\Phi(\nu)]\,\mathbf{E}\left\{|\mathrm{d}X(\nu)|^2\right\} \\ &\quad + \left[\Phi(\nu)\mathbf{E}\left\{|\mathrm{d}X(\nu)|^2\right\} + \mathbf{E}\left\{|\mathrm{d}X(\nu)|_{\boldsymbol{j}}^2\right\}\boldsymbol{j}\right] \\ &= \Gamma_{xx}^{\mathtt{u}}(\nu)\mathrm{d}\nu + \Gamma_{xx}^{\mathtt{p}}(\nu)\mathrm{d}\nu, \end{aligned} \quad (18)$$

où les indices u et p dénotent respectivement les parties non-polarisées (*unpolarized*) et polarisées (*polarized*). La décomposition (18) est unique, et se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(\nu) &= [1-\Phi(\nu)]\,S_0(\nu) \\ &\quad + [\Phi(\nu)S_0(\nu) + \boldsymbol{i}S_3(\nu) + \boldsymbol{j}S_1(\nu) + \boldsymbol{k}S_2(\nu)]\,. \end{aligned} \quad (19)$$

Ce résultat formalise dans le cadre de la TFQ une décomposition bien connue des opticiens [11, p. 551]. Le degré de polarisation contrôle les contributions relatives des parties polarisée et non polarisée du signal.

Dans le domaine temporel, la décomposition en composantes polarisée et non-polarisée s'écrit par identification

$$x[t] = x_{\mathtt{u}}[t] + x_{\mathtt{p}}[t] \quad (20)$$

où les processus $x_{\mathtt{u}}$ et $x_{\mathtt{p}}$ sont décorrélés. Notons qu'il n'y a plus unicité de la décomposition, à la différence de (18).

3.5 Exemple du bruit blanc bivarié

A priori très simple, cet exemple permet d'illustrer plusieurs concepts non-triviaux propres au cas bivarié. Toute mesure physique étant imparfaite, la caractérisation de la notion de bruit est un préalable nécessaire à toute procédure de traitement du signal. On considère le signal $w[t] = u[t] + \boldsymbol{i}v[t]$ où u, v sont réels, i.i.d. et conjointement stationnaires tels que :

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\{u\} = \mathbf{E}\{v\} = 0, \\ &\mathbf{E}\left\{u^2\right\} = \sigma_u^2,\ \mathbf{E}\left\{v^2\right\} = \sigma_v^2,\ \mathbf{E}\{uv\} = \rho_{uv}\sigma_u\sigma_v. \end{aligned} \quad (21)$$

On obtient immédiatement les covariances

$$R_{uu}[\tau] = \sigma_u^2 \delta_{\tau,0},\ R_{vv}[\tau] = \sigma_v^2 \delta_{\tau,0},\ R_{uv}[\tau] = \rho_{uv}\sigma_u\sigma_v\delta_{\tau,0}. \tag{22}$$

Le signal $w[t]$ est donc un bruit blanc bivarié. Grâce à (13) son autocovariance est donnée par

$$\gamma_{ww}[\tau] = \left[\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \boldsymbol{j}(\sigma_u^2 - \sigma_v^2) + 2\boldsymbol{k}\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v\right]\delta_{\tau,0}. \tag{23}$$

Sa densité spectrale est obtenue par TFQ :

$$\Gamma_{ww}(\nu) = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \boldsymbol{j}(\sigma_u^2 - \sigma_v^2) + 2\boldsymbol{k}\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v. \tag{24}$$

Cette densité spectrale est constante. Elle ne présente pas de composante suivant $\boldsymbol{i}$, soit $S_3(\nu) = 0$ pour tout ν. Ceci montre que l'état de polarisation d'un bruit blanc bivarié est nécessairement situé sur l'équateur de la sphère de Poincaré. Par conséquent, il présente une ellipticité nulle : il est soit non-polarisé, soit linéairement polarisé (partiellement ou totalement). Les propriétés de polarisation sont les mêmes quelque soit la fréquence. Le degré de polarisation défini par (17) devient alors

$$\Phi = \frac{\sqrt{(\sigma_u^2 - \sigma_v^2)^2 + 4\rho_{uv}^2\sigma_u^2\sigma_v^2}}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}, \tag{25}$$

où l'on observe que $w[t]$ est non-polarisé si et seulement si $\sigma_u = \sigma_v$ et $\rho_{uv} = 0$, *i.e.* $w[t]$ est circulaire à l'ordre 2 (parfois dit *proper*). Lorsque $\Phi \neq 0$, l'angle θ de la polarisation linéaire est donné par $\theta = 0$ si $\rho_{uv} = 0$ et par

$$\begin{cases} \theta &= \dfrac{1}{2}\mathrm{atan2}\left[\dfrac{2\rho_{uv}\sigma_u\sigma_v}{(\sigma_u^2 - \sigma_v^2)}\right],\ \text{si } \sigma_u \neq \sigma_v \\ \theta &= \pi/4,\ \text{si } \sigma_u = \sigma_v \end{cases} \tag{26}$$

lorsque $\rho_{uv} \neq 0$; atan2 est la fonction arctangente à 4 quadrants. La décomposition en composantes polarisée et non polarisée du bruit blanc bivarié permet de simuler aisément un bruit blanc bivarié de polarisation donnée. Soit $0 \leq \Phi \leq 1$ le degré de polarisation désiré, et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ l'angle de polarisation. Soit $S_0 > 0$ la puissance totale du bruit. Soit $w^{\mathrm{u}}[t]$ un bruit blanc non polarisé à valeurs dans $\mathbb{C}_{\boldsymbol{i}}$ tel que $R_{w^{\mathrm{u}}w^{\mathrm{u}}}[\tau] = \delta_{\tau,0}$. Définissons $w^{\mathrm{p}}[t]$ un bruit blanc réel de variance unitaire. On suppose $w^{\mathrm{u}}[t]$ et $w^{\mathrm{p}}[t]$ indépendants. Le bruit blanc

$$w[t] = \sqrt{S_0}\left(\sqrt{1-\Phi}w^{\mathrm{u}}[t] + \sqrt{\Phi}\exp(\boldsymbol{i}\theta)w^{\mathrm{p}}[t]\right) \tag{27}$$

a alors les propriétés de polarisation désirées. Cette décomposition est illustrée par la figure 2 pour une réalisation.

4 Conclusion et perspectives

Nous proposons un cadre très général pour une analyse spectrale des signaux bivariés stationnaires. Nous avons introduit une représentation spectrale quaternionique et défini la densité spectrale d'un processus bivarié. Cela permet une description fréquentielle des attributs de polarisation. De plus une décomposition originale de tout signal bivarié stationnaire en composantes polarisée et non-polarisée est proposée. L'estimation de la densité spectrale peut se faire via le *périodogramme de polarisation*, comme détaillé dans [10]. Ce cadre méthodologique permet d'envisager de nouvelles perspectives en traitement du signal bivarié (estimation, filtrage, détection, etc.)

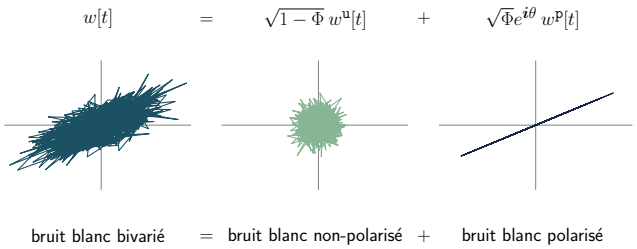


FIGURE 2 – Decomposition en composantes polarisée et non polarisée du bruit blanc bivarié.

Références

[1] D. B. Percival and A. T. Walden, *Spectral analysis for physical applications*. Cambridge University Press, 1993.

[2] P. J. Schreier and L. L. Scharf, *Statistical signal processing of complex-valued data : the theory of improper and noncircular signals*. Cambridge University Press, 2010.

[3] P. J. Schreier, "Polarization ellipse analysis of nonstationary random signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 9, pp. 4330–4339, 2008.

[4] A. T. Walden, "Rotary components, random ellipses and polarization : a statistical perspective," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 371, no. 1984, p. 20110554, 2013.

[5] C. N. Mooers, "A technique for the cross spectrum analysis of pairs of complex-valued time series, with emphasis on properties of polarized components and rotational invariants," in *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, vol. 20, no. 12. Elsevier, 1973, pp. 1129–1141.

[6] J. Flamant, N. L. Bihan, and P. Chainais, "Time-frequency analysis of bivariate signals," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2017, in press.

[7] J. Flamant, N. Le Bihan, and P. Chainais, "Polarization spectrogram of bivariate signals," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2017, New Orleans, USA*, 2017.

[8] J. H. Conway and D. A. Smith, *On quaternions and octonions : their geometry, arithmetic, and symmetry*. AK Peters, 2003.

[9] N. Le Bihan, S. J. Sangwine, and T. A. Ell, "Instantaneous frequency and amplitude of orthocomplex modulated signals based on quaternion fourier transform," *Signal Processing*, vol. 94, pp. 308–318, 2014.

[10] J. Flamant, N. Le Bihan, and P. Chainais. (2017) Spectral analysis of stationary random bivariate signals. arXiv :1703.06417, March 2017.

[11] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics : electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. CUP Archive, 2000.