Géométries non-euclidiennes et interdisciplinarité mathématique-philosophie

Un exemple d'activité pour la classe de terminale scientifique

Manuel Bächtold, Thomas François, Thomas Hausberger et Patrice Marie-Jeanne
Equipe Mathématiques et Philosophie, IREM de Montpellier

Résumé : Souvent évoqué dans l'enseignement de philosophie en classe de Terminale, l'exemple des géométries non-euclidiennes (GNE) est rarement étudié de façon poussée. Dans cet article, nous présentons une activité en classe proposant une exploitation approfondie des GNE selon des angles à la fois mathématique et philosophique, et discutons les résultats de son expérimentation en classe. Notre étude permet de pointer certaines difficultés des élèves face à la complexité des GNE. Elle met également en lumière la richesse et la faisabilité d'un traitement interdisciplinaire de cet objet en classe de Terminale.

Mots-clés : géométrie, axiome, postulat, vérité, validité, philosophie, épistémologie

1. Introduction

Dans le cadre de l'enseignement de la philosophie en Terminale, l'exemple des géométries non-euclidiennes (GNE) est fréquemment mentionné lors de l'étude du rapport entre « la raison et le réel » (thème au programme de Terminale, MEN, 2003). En particulier, il permet de questionner d'une part la correspondance entre une construction théorique (une certaine géométrie) et la réalité (l'espace physique) et d'autre part la notion de vérité, à travers la discussion du statut des axiomes sur lesquels se fonde toute géométrie, notamment à la suite des travaux de Poincaré à la fin du XIXe siècle (1968a). Cependant, l'exemple des GNE est rarement exploré de façon approfondie en classe. Cela peut s'expliquer notamment par le fait que les enseignants de philosophie ne sont pas suffisamment armés sur le plan mathématique. C'est dans ce contexte que les enseignants de philosophie de l'équipe « Mathématiques, Physique et Philosophie » de l'IREM de Montpellier[1] ont exprimé leur intérêt pour l'élaboration d'une activité d'enseignement en Terminale qui s'appuie sur les compétences multidisciplinaire des membres de l'équipe réunissant des enseignants du Lycée en philosophie et en mathématiques, ainsi que des enseignants-chercheurs en mathématiques, physique, didactique et épistémologie des mathématiques et de la physique. Cette activité s'inscrit dans la continuité des travaux des années précédentes ayant conduit à l'élaboration d'activités sur les nombres complexes faisant intervenir à la fois un enseignant de philosophie et un enseignant de mathématiques (Bächtold & Hausberger, 2013). A germé alors l'idée de développer une activité en classe sur les GNE faisant également intervenir à la fois un enseignant de philosophie et un enseignant de mathématiques afin d'éclairer le même objet selon différents points de vue. De leur côté, les enseignants de mathématiques peuvent voir dans l'étude en classe de l'exemple des GNE une opportunité de répondre à la demande

1 Les membres de cette équipe sont : Manuel Bächtold, Thomas François, Daniel Guin, Dominique Guin, Thomas Hausberger, Séverine Maingaud, Patrice Marie-Jeanne, Véronique Pinet, Henri Reboul. Responsables : Manuel Bächtold (manuel.bachtold@umontpellier.fr) et Thomas Hausberger (thomas.hausberger@umontpellier.fr)

institutionnelle de développer la culture mathématique des élèves, en introduisant des éléments d'histoire et d'épistémologie des mathématiques dans l'enseignement de cette discipline : « Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts. » (MEN, 2011, pp 1-2).

Si les GNE constituent par nature un objet interdisciplinaire, qui peut effectivement être éclairé selon des perspectives différentes, la question se pose de savoir comment il convient d'articuler ces perspectives dans le cadre de la classe. Autrement dit, comment envisager une interaction entre mathématiques et philosophie à propos des GNE qui soit à la portée des élèves et qui favorise les apprentissages visés dans chacune de ces deux disciplines ? Afin de traiter cette question, notre approche a consisté d'abord à développer une culture commune sur les GNE au sein de notre groupe, puis à élaborer une activité mathématique permettant aux élèves de manipuler un modèle de GNE (la géométrie du demi-plan de Poincaré) et à l'articuler à une discussion philosophique orchestrée par le professeur de philosophie. Afin d'initier les élèves aux enjeux épistémologiques de l'émergence des GNE et de soutenir la discussion philosophique sur les rapports raison-réel, nous avons proposé d'une part d'éclairer la démarche historique qui a conduit au développement d'une telle géométrie (une interrogation d'ordre logique portant sur le cinquième postulat d'Euclide), d'autre part d'illustrer le caractère « contre-intuitif » des GNE (les énoncés non-euclidiens s'opposent à notre intuition sensible et à la prégnance du « schéma » euclidien), tout en documentant son applicabilité au réel. Les principaux éléments de l'activité mathématique sont ainsi posés en vue de leur exploitation en cours de philosophie. Ils ont ensuite été travaillés en relation avec des éléments du curriculum (la fonction logarithme, des éléments de logique), autant que faire se peut dans le contexte actuel où la dernière réforme a vu s'amoindrir la place accordée à la géométrie[2]. Les activités ont ensuite été scénarisées en prenant soin de respecter les domaines d'expertise des enseignants qui, en situation de co-animation en classe, véhiculent le contrat et les épistémologies relatifs à leur discipline d'appartenance. Plusieurs expérimentations ont permis de faire évoluer les activités, depuis leur version initiale, par des allers-retours entre des phases d'analyse des données recueillies (vidéos, traces de travaux d'élèves) et des phases de poursuite du travail d'ingénierie didactique.

Ce travail a occupé notre groupe IREM pendant 3 années consécutives. Il a conduit à l'élaboration d'une ressource richement documentée afin d'en faciliter la mutualisation, et augmentée de plusieurs fichiers satellites destinées à l'auto-formation des enseignants sur les GNE (ressource et satellites disponibles en ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01469911). Ce matériel a été présenté lors d'une formation au plan académique de Montpellier. Nous en exposons ici les éléments saillants, en relation avec une problématique plus générale (celle de l'étude des modalités possibles d'une interaction fertile entre mathématiques et philosophie dans les pratiques de classe et des questions qu'elles soulèvent) que nous abordons ici sur l'exemple des GNE. Les enseignants qui souhaitent mettre en œuvre notre activité trouveront dans la ressource tous les compléments d'information nécessaires.

L'article est structuré comme suit. Nous décrivons tout d'abord les enjeux philosophiques, mathématiques et méta-mathématiques que nous avons identifiés relativement aux GNE, ainsi

2 Malgré l'importance de cette dernière au niveau post-bac (par exemple, au niveau de l'apprentissage de la théorie des espaces vectoriels).

que les enjeux d'une approche interdisciplinaire. Puis, nous exposons l'activité du demi-plan de Poincaré, sa partie mathématique et la discussion philosophique avec laquelle elle s'articule. Nous présentons ensuite un compte-rendu d'expérimentation qui permet de discuter certaines erreurs des élèves et d'évaluer la pertinence de nos choix en relation avec les objectifs fixés. Nous concluons par une discussion des conditions et contraintes pour faire vivre en classe une telle activité, donc sur l'écologie de la pratique interdisciplinaire mathématique-philosophie que nous proposons.

2. Pourquoi le thème des géométries non-euclidiennes ?

Le choix initial de ce thème a été motivé par le contexte institutionnel décrit dans l'introduction (les GNE comme exemple usuel dans l'enseignement de philosophie et la demande des textes officiels de diffuser des éléments d'histoire des sciences). Un examen plus approfondi de ce thème permet de dégager une pluralité d'enjeux pédagogiques qui justifient de retenir ce thème pour développer une activité en classe croisant les regards mathématique et philosophique.

2.1 Enjeux philosophiques

Jusqu'au début du XIXe siècle, scientifiques et philosophes ne connaissaient qu'une seule géométrie, celle d'Euclide. Ils ne s'imaginaient pas qu'il puisse exister une alternative. La géométrie d'Euclide était considérée comme la seule possible et tenue pour vraie. Au cours du XIXe siècle, plusieurs mathématiciens en sont venus à construire de nouvelles géométries, ayant en commun avec la géométrie d'Euclide les quatre premiers postulats (ou axiomes), mais s'en distinguant par la remise en cause du cinquième postulat, aujourd'hui connu comme le « postulat des parallèles ». Il apparaît que l'émergence des GNE soulève plusieurs problèmes d'ordre philosophique qui peuvent être traités en classe de Terminale : dès lors que plusieurs géométries sont possibles, quel peut être le statut des postulats (ou axiomes) de la géométrie euclidienne et des GNE ? Quel rapport entretiennent ces différentes géométries avec le réel ? Quelle est la « vraie » géométrie ? Cela a-t-il même un sens de parler de « vraie » géométrie ? Toutes ces questions sont au centre des débats qui ont agité scientifiques et philosophes dans la seconde moitié du XIXe siècle, tels que Gauss, Lobatchevsky, Poincaré (pour une vision d'ensemble sur ces débats, voir Sklar, 1976 et Jammer, 2008).

Dans le cadre des travaux de notre équipe, nous nous sommes emparés plus spécifiquement du problème de la vérité. Afin de présenter les enjeux philosophiques associés aux GNE relatifs à ce problème, nous pouvons prendre appui sur un article d'Imre Toth (1977), intitulé « La révolution non euclidienne ». Dans cet article, l'auteur avance l'idée que le plus important, le plus décisif dans la construction des GNE est la philosophie sous-jacente des mathématiciens. Toth distingue entre les « précurseurs » et « les pères fondateurs ». Les précurseurs des GNE (Saccheri, Lambert, Reid) développent des systèmes « anti » euclidiens : ils partent de la négation du cinquième postulat et formulent de nouveaux théorèmes, qui entrent en contradiction avec la géométrie d'Euclide ; mais ils pensent que des systèmes concurrents ne peuvent pas cohabiter, et que nécessairement une seule de ces géométries est vraie. Leur philosophie sous-jacente est celle de l'unicité. Les pères fondateurs (Gauss, Bolyaï, Lobatchevsky) développent au contraire des systèmes « non » euclidiens qu'ils conçoivent comme d'autres mondes géométriques : ils admettent que des systèmes concurrents soient possibles et puissent cohabiter sans s'exclure. Leur philosophie sous-jacente est celle de la pluralité.

« Philosophie de la pluralité » donc, contre « philosophie de l'unicité ». Cette opposition, simple en apparence, dissimule un problème plus complexe : quel sens donner au mot *vérité* si plusieurs géométries sont possibles et même acceptées comme vraies ?

D'un point de vue mathématique tout d'abord : quelles sont les conséquences du pluralisme théorique pour la géométrie et sa vérité ? La géométrie euclidienne est née de problèmes pratiques, et se trouve ainsi, dès l'origine, en prise avec le réel qu'elle tente de modéliser et décrire au plus près. La géométrie est alors conçue comme une sorte de « physique primitive » qui expose les propriétés spatiales des objets et tire sa vérité non seulement de procédures démonstratives, mais aussi de l'adéquation entre les théorèmes et l'expérience. Au contraire, les géométries non euclidiennes sont nées d'un questionnement théorique sur l'indépendance du cinquième postulat. Face à l'échec de toutes les tentatives de démontrer directement le cinquième postulat à partir des autres demandes et postulats, l'idée a été de chercher les conséquences d'un postulat incompatible avec le cinquième, jusqu'à aboutir si possible à une contradiction. En partant d'un tel raisonnement par l'absurde, consistant à nier ce postulat, les mathématiciens ont développé de nouvelles propositions, certes contre intuitives, mais qu'ils ont finalement admises en raison de la rigueur logique des déductions et de la cohérence interne du système ainsi obtenu. Cette cohérence devient donc, dans l'esprit des mathématiciens, plus importante que le rapport avec le monde sensible. C'est parce que les différentes géométries sont consistantes sur le plan logique qu'elles peuvent toutes être tenues pour « vraies » ; quoiqu'il serait plus rigoureux ici de dire qu'elles sont toutes « valides », étant donné que seule la cohérence est prise en compte, non plus l'adéquation avec le réel.

D'un point de vue physique ensuite : le pluralisme théorique signifie que les différentes géométries permettent de modéliser les phénomènes, sans pouvoir cependant déterminer quelle géométrie décrit adéquatement l'espace physique. Les géométries non euclidiennes, en effet, rivalisent avec celles d'Euclide. Elles font preuve d'une « déraisonnable efficacité » (au sens de Wigner, 1960) dans le cadre du développement des sciences, comme la théorie de la relativité générale d'Einstein, ou dans le développement technique, comme pour le fonctionnement du GPS (qui intègre des aspects des théories de la relativité restreinte et générale). À noter que dans le cas de la théorie de la relativité générale, ce n'est pas simplement l'espace, mais l'espace et le temps, qui sont conjointement décrits au moyen d'une géométrie non euclidienne ; de plus, selon cette théorie, la structure de l'espace-temps est déterminée par la répartition de la matière et de l'énergie. Ainsi, d'un côté, le mathématicien s'attache à construire des formes abstraites en se préoccupant uniquement de leur structure logique ; de l'autre, le physicien puise dans ce réservoir de formes pour rendre compte des phénomènes observés. Mais si le physicien peut admettre une théorie mathématique comme *valable* (dans la mesure où elle permet de faire des calculs, des prévisions, voire d'agir sur les événements, donc en raison de sa portée pratique), il ne peut pas être certain qu'elle soit vraie au sens où elle correspondrait à la réalité : elle n'est qu'un modèle parmi d'autres. À cet égard, nous pouvons faire appel à un argument important, formulé pour la première fois par Poincaré (1968b), celui de la « sous détermination des théories par l'expérience » (voir par exemple Psillos, 1999). En physique, une théorie tire son fondement de validations expérimentales. La conception classique est qu'il existe des « expériences cruciales » qui permettent de départager différents systèmes lorsqu'ils s'opposent. En suivant cette idée, on pourrait chercher à savoir quelle géométrie décrit adéquatement l'espace physique. Ce fut une préoccupation de Gauss et Lobatchevsky, lesquels admettaient un pluralisme mathématique (en raison de l'égale cohérence des systèmes) et pensaient pouvoir déterminer la géométrie véritable par le biais de l'expérience. Ils ont imaginé des expériences consistant à mesurer à grande échelle la somme des angles d'un triangle pour voir si le résultat correspond à 180° ou non : triangle formé par les sommets de trois montagnes distantes d'une centaine de kilomètres pour Gauss, et triangle formé par une étoile et deux positions de la Terre opposées de son orbite autour du Soleil pour Lobatchevsky. Mais selon Poincaré (1968b), cette « détermination par l'expérience » ne saurait être entière. En effet, il n'est pas possible de confronter directement une géométrie avec l'expérience. Pour être confrontée au réel, une géométrie doit être associée à d'autres hypothèses sur le monde physique (sur les propriétés de la matière et de la lumière notamment). C'est donc un ensemble d'hypothèses qui est soumis à l'expérience ; et c'est cet ensemble que l'expérience réfute ou confirme. Il en résulte, d'une part, que ce ne sont pas les hypothèses géométriques prises isolément qui sont évaluées et, d'autre part, que plusieurs systèmes théoriques basés sur des géométries différentes (par exemple, un premier système théorique composé d'une géométrie euclidienne associée à une certaine hypothèse sur la matière et un second système théorique composé d'une géométrie non-euclidienne associée à une autre hypothèse sur la matière) peuvent être en accord avec l'expérience.

D'un point de vue philosophique, le pluralisme théorique, s'il est admis en mathématique et en physique, implique de revoir une conception des plus classiques de la vérité. L'idée commune associe vérité et réalité : il existe un réel indépendant de toutes nos représentations ; il existe sur ce réel un point de vue absolument objectif, que l'on nomme « point de vue de Dieu » ou « point de vue de nulle part » et qui englobe ou dépasse les différentes perspectives ; et il est possible de se détacher de nos impressions et de nos conceptions particulières pour atteindre ce point de vue objectif, ou du moins de s'en approcher. Dans le domaine des sciences, cela voudrait dire qu'une théorie pourrait fournir la description objective d'une réalité plus fondamentale que la réalité observable. Elle serait la description de la structure ou des mécanismes réels de la nature – ce que semblait être la géométrie d'Euclide jusqu'à l'apparition des géométries non euclidiennes. Pour les adversaires de ce réalisme, les théories scientifiques sont seulement des instruments efficaces pour le calcul et la prédiction, qui nous permettent ainsi de « sauver les phénomènes » (suivant l'expression discutée par Duhem et reprise par van Fraassen, 2004), et de le faire de la manière la plus simple possible, la plus élégante et la plus commode. Accepter une théorie ne nous obligerait nullement à croire qu'elle est vraie au sens littéral (par exemple, qu'une géométrie donnée représente adéquatement l'espace physique). Van Fraassen (2004) appelle « empirisme constructif » cette forme d'anti-réalisme : « empirisme » parce qu'une théorie est acceptée uniquement en fonction de son adéquation avec ce qui est observable, sans que cela implique la croyance en une adéquation avec une réalité plus fondamentale ; « constructif » parce que l'activité scientifique est une activité de construction, d'invention de concepts et de modèles, plutôt qu'une découverte de la réalité.

Plus généralement on peut noter, comme I. Toth (1977), que « la trajectoire qui mène à l'établissement des GNE est encore plus bizarre que les propositions biscornues qu'elles engendrent ». Il est en effet difficile de suivre une « philosophie de la pluralité » dans tous ses développements, mathématiques, physiques, et philosophiques. Car poussée jusqu'au bout, elle implique de questionner l'idée d'une vérité unique, absolue, objective, et pourrait conduire au scepticisme. Or trois options demeurent possibles face à ce pluralisme :

- conserver l'idée classique ou commune de la vérité, conserver cette conception « réaliste », mais comme un programme qui donne à la science un caractère ambitieux ; c'est la position d'Einstein et Infeld (2009) par exemple : le pluralisme théorique est considéré comme un moment dans la recherche de la vérité, moment que les développements théoriques et expérimentaux à venir permettraient de dépasser, en déterminant quelle théorie est vraie (on parlera alors de « réalisme par convergence ») ;

- repenser l'idée de vérité pour en développer une conception plus modeste : ne plus attendre d'une théorie qu'elle soit « vraie » au sens où elle nous ferait découvrir une réalité cachée, plus fondamentale, plus réelle, mais exiger simplement qu'elle soit valide – ce qui reviendrait à penser la science comme un instrument efficace, en raison de sa portée pratique, et non plus comme une sorte de miroir mental de l'univers ;
- renoncer à toute idée de vérité : c'est la position de Poincaré lorsqu'il est question des axiomes de la géométrie (sa position est différente lorsqu'il s'agit des théories physiques) : s'il n'est pas possible de départager les différentes géométries du point de vue des critères classiques que sont la cohérence et l'adéquation avec la réalité, si le choix d'une géométrie est alors une affaire de convention, c'est que la question de la vérité n'a ici pas de sens.

Ainsi l'exemple des GNE constitue le support pour développer un questionnement très riche sur la notion de vérité. En particulier, traiter la question du pluralisme théorique est une occasion d'opérer plusieurs distinctions philosophiques importantes, entre : adéquation et cohérence, vérité et validité, ce qui est vrai et ce qui est valide, les positions réalistes et anti réalistes.

2.2 Enjeux mathématiques et méta-mathématiques

L'importance des GNE vis à vis des mathématiques est double. Il provient, d'une part, du questionnement sur les fondements des mathématiques qui lui est sous-jacent : c'est l'occasion de présenter aux élèves et de questionner avec eux l'axiomatique d'Euclide de la géométrie. Alors que le lycée se satisfait d'axiomatiques locales, ce qui est insuffisant pour faire émerger la notion d'axiome, se pose grâce à la philosophie la question des prémisses et de la distinction entre axiome et théorème. D'autre part, il s'agit de souligner le saut vers l'abstraction qui fut réalisé avec les GNE : il consiste à dépasser un obstacle à la fois épistémologique (la géométrie euclidienne comme unique géométrie possible, comme schéma pré-existant voire *a priori* au sens kantien, lequel s'oppose à l'émergence de nouvelles connaissances, les GNE) et ontologique (le fait que les axiomes de la géométrie rendent compte d'un réel, la géométrie en tant que modélisation de l'espace sensible). La géométrie du demi-plan permet d'illustrer ce jeu dialectique du concret et de l'abstrait, où les mathématiciens définissent des systèmes axiomatiques indépendamment du réel, voire contre lui, mais s'en font des représentations (les modèles). Des utilisations plus ou moins inattendues de ces formalismes peuvent voir le jour, selon la « déraisonnable efficacité » des mathématiques. Ce fut le cas pour les GNE avec la relativité générale d'Einstein. Alors que la question du sens et de l'utilité est souvent posée par les élèves lors de la montée des mathématiques vers l'abstraction, le questionnement épistémologique sur les GNE permet ainsi d'éclairer le sens et la portée des démarches mathématiques contemporaines et par là de préparer la transition vers les mathématiques universitaires.

Ces enjeux, d'ordre méta-mathématique et liés à la portée épistémologique des GNE, nous semblent prépondérants. Pour autant, une activité autour des GNE permet également de faire vivre des enjeux plus strictement mathématiques en lien avec le programme de terminale S. Ainsi un questionnement logique sur le 5ème postulat permet-il de travailler des notions de logique (négation d'une assertion, implication). La manipulation d'un modèle conforme de la géométrie hyperbolique donné par une nouvelle distance dans un sous-espace de R^2 (le demi-plan de Poincaré) et la description des géodésiques associées (des demi-droites ou demi-cercles) est l'occasion de mobiliser les théorèmes euclidiens (par exemple les propriétés de la médiatrice) dans un contexte inhabituel et les équations cartésiennes de cercles, donc la géométrie déductive et la géométrie cartésienne. Enfin, la distance est exprimée à l'aide des fonctions logarithmes et exponentielles, d'où un travail sur ces fonctions importantes de la classe de terminale (étude de fonctions, résolution d'équations et d'inéquations).

2.3 Une approche interdisciplinaire

Les GNE constituent un objet d'étude riche et complexe. Comme nous l'avons évoqué plus haut, il peut en effet être abordé suivant plusieurs perspectives disciplinaires : suivant une perspective strictement mathématique bien entendu (en tant qu'objet défini et manipulé au sein des mathématiques), mais aussi suivant une perspective historique (les GNE ayant été élaborées au XIXe siècle dans le contexte spécifique d'un questionnement renouvelé de la géométrie euclidienne), ou une perspective philosophique (les GNE permettant de questionner les rapports entre théorie et réalité, ainsi que la notion de vérité), ou encore suivant la perspective de la physique (la théorie de la relativité générale reposant sur une géométrisation non euclidienne de l'espace-temps). Dès lors, il n'y a qu'un pas semble-t-il pour considérer les GNE comme un objet d'étude *interdisciplinaire*. Toutefois, l'interdisciplinarité n'est généralement pas conçue comme une simple juxtaposition de perspectives disciplinaires, mais plutôt comme une coopération entre celles-ci. D'après Lenoir (2015), qui s'intéresse à l'interdisciplinarité en contexte scolaire, celle-ci implique « complémentarité et imbrication des démarches ».

En ce sens, un enjeu interdisciplinaire peut être associé à l'étude des GNE en classe. Les perspectives mathématique et philosophique peuvent en effet s'alimenter réciproquement. D'un côté, mener une réflexion philosophique (ou plus précisément, épistémologique) sur les GNE est un moyen pour les élèves de donner sens à cet objet mathématique spécifique, mais aussi à travers lui, aux objets mathématiques en général. Une telle réflexion met en relief certaines spécificités des mathématiques, par exemple au niveau des types de propositions (axiomes et théorèmes), au niveau des démarches (poser des définitions, mener une démonstration, raisonner par l'absurde), ou encore au niveau de la nature des objets (objets abstraits pouvant ou non être mis en relation avec la réalité). Réciproquement, approfondir l'étude des GNE, plutôt que d'évoquer superficiellement cet exemple, permet d'enrichir la réflexion philosophique menée avec les élèves. En prenant appui sur un exemple précis, cette réflexion peut être développée de manière plus riche et plus parlante. Les idées discutées peuvent devenir plus concrètes. Ainsi, l'exemple des GNE permet un enrichissement mutuel des approches mathématique et philosophique.

3. L'activité du demi-plan de Poincaré

3.1 Genèse de l'activité et méthodologie de travail de l'équipe IREM

Tout travail interdisciplinaire nécessite au préalable la construction d'une culture commune. De plus, les GNE n'étant pas enseignés dans les cours de mathématiques à l'Université, il s'est agi, pour tous les membres du groupe, de se former aux GNE. Nous avons donc consacré plusieurs séances à la présentation des GNE selon ses différentes facettes et aux regards des différentes disciplines (mathématiques, logique, physique, histoire et épistémologie des mathématiques, philosophie), sous la forme d'exposés présentés par les membres du groupe IREM, selon leur compétence, et préparés de façon à être accessibles par l'ensemble du groupe. L'histoire des GNE a été présentée en appui sur le travail-des historiens (Chabert 1990), sa portée épistémologique discutée en appui sur le travail des épistémologues et des philosophes (Gonseth 1926, Blanché 2009, Poincaré 1968). Différents modèles des GNE ont été étudiés de façon à effectuer un choix, en l'occurrence le demi-plan de Poincaré, modèle conforme[3] planaire aisément manipulable à la règle et au compas. Un autre choix possible était le modèle du disque de Poincaré, lequel met davantage en évidence les symétries et rend visible les deux « points à l'infini » d'une géodésique. Pour autant, nous avons privilégié le modèle du demi-plan pour des raisons pédagogiques et didactiques : en effet, la construction d'une géodésique est aisée à l'aide des instruments (il suffit de tracer une médiatrice) alors que le cas du disque fait intervenir la notion d'inversion qui n'est pas connue des élèves de terminale (son introduction alourdirait considérablement le scénario et nous souhaitons limiter l'instrumentation par les TICE, qui demeurent une boîte noire). Ce travail a débouché sur la rédaction de différents documents dédiés à l'auto-formation des enseignants sur les GNE. Ces derniers sont destinés à compléter la documentation de la ressource interdisciplinaire mathématiques-philosophie sur les GNE, laquelle constitue l'objectif de production finale du groupe.

Les enseignants de mathématiques proposèrent les premiers éléments de la ressource, sous la forme des grandes lignes d'une activité dédiée à la manipulation par les élèves en classe de la géométrie du demi-plan de Poincaré. Ils visent à répondre à la demande des professeurs de philosophie d'avoir un point d'appui à une discussion philosophique des GNE. L'objectif initial est donc de donner rapidement accès aux élèves à une pratique de la géométrie non-euclidienne, ses objets, représentations et théorèmes. Une première version de l'activité est ainsi conçue, fondée sur une pratique élémentaire de la géométrie euclidienne (droites, cercles, médiatrices, constructions à la règle et aux compas), le modèle de la géométrie hyperbolique étant construit à l'intérieur du plan euclidien (un passage conceptuellement délicat que nous discuterons plus loin). Cette version fut alors expérimentée en classe, en cours de philosophie, dans une séance co-animée débouchant sur la discussion philosophique. L'analyse de la captation vidéo de cette première expérimentation a permis d'observer que la résolution des exercices de mathématiques était bien source chez les élèves d'un questionnement d'ordre philosophique. Durant cette activité, en effet, plusieurs élèves ont spontanément interpellé les deux enseignants pour interroger le statut, la signification ou l'applicabilité des notions géométriques qu'ils devaient manipuler. Dans le développement de la ressource, nous avons cherché à mieux identifier, d'une part, les éléments mathématiques qui selon nous méritent d'être étudiés durant l'activité mathématique, et d'autre part, les questions philosophiques qui peuvent être discutées sur la base de ces éléments mathématiques. Afin d'éviter une surcharge cognitive chez les élèves face aux aspects à la fois mathématiques et philosophiques, nous avons estimé qu'il était préférable de tirer le fil du questionnement philosophique, non pas durant l'activité mathématique, mais au cours du temps de discussion qui lui fait suite.

Une autre difficulté a été identifiée concernant l'écologie de cette activité : afin de trouver sa place en cours de mathématiques de Terminale S, il serait opportun de permettre la mobilisation de contenus mathématiques plus avancés et reliés aux notions du programme. La

3 Les angles peuvent être lus avec les instruments de la géométrie d'Euclide, c'est-à-dire le rapporteur, une fois tracées les tangentes aux géodésiques au sommet considéré.

distance hyperbolique faisant intervenir la fonction exponentielle, la piste était toute trouvée. Cependant, un travail avec les élèves sur la distance hyperbolique implique un traitement mathématique plus long. Nous avons alors choisi de développer deux versions de l'activité : l'une dite "longue" et l'autre dite "courte". La version longue explicite la distance hyperbolique, ce qui permet d'une part de discuter la forme des géodésiques, d'autre part de mener un travail mathématiques plus fin et plus complet (preuve du postulat 2 d'Euclide, détermination des cercles), alors que ces résultats doivent être admis dans la version courte, la distance hyperbolique demeurant une « boîte noire ».

L'activité, à partir des premiers éléments posés et grâce à un va-et-vient entre expérimentations et remaniement de la ressource, a été ainsi enrichie par le travail collaboratif jusqu'à aboutir à la version présentée ici. Le format de ressource, inspiré de Guin & Trouche (2004), se donne pour but de faciliter la mutualisation de cette dernière : la documentation inclut les fiches distribuées aux élèves, la description du scénario pédagogique (avec des durées indicatives) et des fiches destinées aux professeurs. Ces dernières mentionnent également notre travail d'ingénierie (discussion des choix opérés) et attirent l'attention des lecteurs sur les points d'achoppement que nous avons identifiés lors de l'analyse de nos expérimentations suivant un double regard épistémologique et didactique.

3.2 L'activité mathématique

Présentation de l'activité

L'activité mathématique propose de découvrir la géométrie du demi-plan de Poincaré à travers une série d'exercices convoquant des compétences élémentaires en géométrie euclidienne (tracé de médiatrices, de tangentes etc.), mais aussi des notions de logique du programme de Terminale : négation d'une proposition, équivalence de propositions, quantificateurs universel et existentiel.

Il existe deux versions de l'activité : un scénario « long » (environ 1h45) et un scénario « court » qui permet l'intervention du professeur de mathématique sur une seule séance (environ 50 min). Ce scénario court reprend la version longue mais invite à admettre certaines propositions. Elles peuvent être toutes deux complétées par un travail à la maison sur les équations cartésiennes et l'exponentielle (annexe 1).

Matériel

Les élèves doivent disposer de leur matériel de géométrie. La visualisation des figures et des différentes configurations est facilitée par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique du type de GeoGebra (Figure 1) ; des environnements adaptés à la géométrie du demi-plan de Poincaré sont disponibles librement.

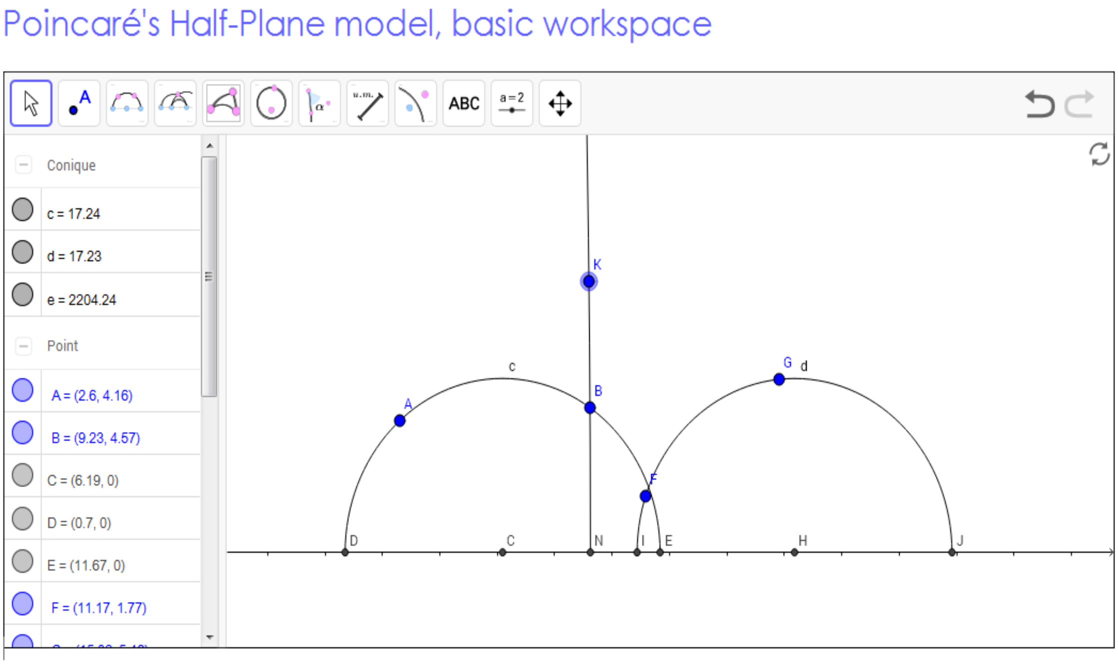


Figure 1. Capture d'écran d'un environnement GeoGebra adapté à la géométrie du demi-plan de Poincaré (création de Jordi Arnau, repéré à https://www.geogebra.org/m/DBXvbruR)

Description du scénario long

Le scénario long est composé de deux parties. La première partie est une présentation de la géométrie euclidienne et du problème du cinquième postulat, dans laquelle il n'y a pas d'exercices. Les axiomes sont énoncés dans le langage actuel, de façon à rester proche de l'épistémologie contemporaine de la classe (à la différence de la traduction de Vitrac & Caveing, 1990, par exemple). Si le métier de l'historien vise à retranscrire fidèlement les écrits d'Euclide en relation avec une pratique historiquement située, nous avons choisi, en contexte scolaire, de proposer des reformulations afin d'éviter un choc de culture, source d'incompréhension si un travail conséquent de contextualisation n'est pas entrepris. En effet, notre propos n'est pas de présenter fidèlement la géométrie d'Euclide, mais d'ouvrir rapidement sur les GNE. La stratégie du raisonnement par l'absurde, employée pour tenter de démontrer la redondance du cinquième postulat en présence des quatre autres, est ainsi exposée. Le texte conclut en mentionnant l'issue inattendue de cette démarche : il existe une « nouvelle géométrie » dont l'axiomatique reprend les quatre premiers postulats d'Euclide mais leur adjoint un cinquième postulat niant le postulat des parallèles d'Euclide.

VERS UNE NOUVELLE GEOMETRIE

I. Retour sur Euclide (vers – 300 av. J-C)

Les postulats (ou axiomes) sont ce que le mathématicien considère comme vrai et qui servent de fondements à la théorie. Une fois ces axiomes posés, on doit démontrer toutes les propriétés de manière déductive.

Lorsque Euclide écrivit les bases de la géométrie (plane) dans son traité, *Les Éléments*, il posa les cinq postulats suivants :

Postulat 1 : par tous points A et B distincts, il passe une droite.

Postulat 2 : un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.

Postulat 3 : tous les angles droits (c'est-à-dire formés par l'intersection de deux droites formant des angles égaux) sont égaux.

Postulat 4 : pour tous points O et A, il existe[4] un cercle de centre O et de rayon OA.

Postulat 5 : pour toute droite D et tout point A n'appartenant pas à D, il existe une unique droite parallèle à D passant par A.

La question que les mathématiciens se posent est de savoir si le cinquième postulat ne peut pas se déduire des autres. Autrement dit, est-il nécessaire d'admettre le cinquième postulat ou peut-on le démontrer en utilisant les quatre autres ?

Il est vraisemblable qu'Euclide lui-même se posait la question. Les raisons pour le penser sont autant la formulation de l'énoncé du postulat historique[5] que le fait qu'Euclide établit les 28 premières propositions de ses Éléments sans recourir à ce cinquième postulat.

Pour tenter de démontrer que le cinquième postulat peut être déduit des quatre autres, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose qu'il existe une droite D et un point A extérieur à cette droite tels qu'il existe plus d'une droite parallèle à D passant par A ou qu'il n'en existe aucune (négation logique du Postulat 5) et on examine si cela conduit à une contradiction.

En fait, on peut construire une géométrie[6] différente de celle d'Euclide qui satisfait les quatre premiers postulats et le postulat suivant :

Postulat 5' : pour toute droite D et tout point A extérieur à D, il existe une infinité de droites parallèles à D passant par A.

Nous allons maintenant étudier cette nouvelle géométrie

La deuxième partie propose de manipuler la géométrie du demi-plan de Poincaré, dont on donne d'emblée les géodésiques, c'est-à-dire les courbes qui réalisent le minimum de la distance entre deux points. La distance utilisée n'est pas la distance euclidienne : sa définition mobilise les fonctions logarithme et exponentielle (voir ci-dessous ; son expression n'est donnée aux élèves que dans la version longue).

---

4 Nous formulons ici les postulats en termes d'« existence » de figures géométriques. Notons qu'il s'agit d'une formulation contemporaine qui contraste avec la formulation grecque d'origine en termes de « construction » de ces figures.

5 La version historique de ce postulat est :
Postulat 5 historique : si une droite tombant sur deux droites fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
Le remplacement de ce postulat par sa version moderne énoncée ci-dessus ne change en rien les conséquences logiques que l'on peut tirer de l'ensemble des postulats.

6 La définition de « géométrie » est, dans notre cas, une « science des figures » s'appuyant sur une liste d'axiomes.

II. Une nouvelle géométrie : le demi-plan H de Poincaré (proposé en 1882).

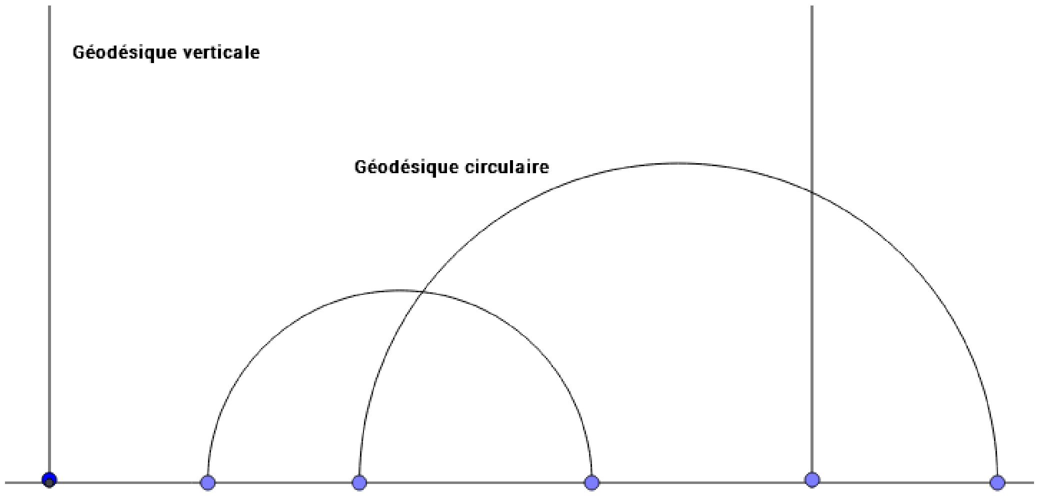
On suppose le plan muni d'un repère orthonormé et l'on se place dans le demi-plan ouvert P défini par $P = \{(x, y) \in R^2 \vee y > 0\}$

On note λ la droite $\lambda = \{(x, y) \in R^2 \vee y = 0\}$ (qui borde P).

L'espace H est l'ensemble P muni d'une géométrie dans laquelle les « droites » - ou plutôt ce qui est l'analogue des droites dans la géométrie euclidienne, à savoir les courbes qui réalisent le minimum de la distance entre deux points, appelées **géodésiques** - sont :

type 1 : les demi-droites euclidiennes (origines exclues) parallèles à l'axe des ordonnées (on dira dans la suite « géodésiques verticales »).

type 2 : les demi-cercles euclidiens (extrémités exclues) dont les centres sont sur λ (on dira dans la suite géodésiques circulaires).



Les formes de ces géodésiques proviennent de ce que, pour calculer les longueurs, on munit H d'une distance <u>différente de la distance euclidienne</u> (celle que l'on mesure avec une règle d'écolier). Précisément, soient A et B deux points de P et Ā le symétrique de A par rapport à λ : on pose $d_H(A,B) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\bar{A}B| + |AB|}{|\bar{A}B| - |AB|}\right)$ où |AB| et |ĀB| sont les longueurs euclidiennes des segments de droites AB et ĀB.

Comme dans le cas euclidien, on dit que **deux géodésiques** sont **sécantes** lorsqu'elles ont un point commun et qu'elles sont **parallèles** lorsqu'elles n'ont pas de point commun. L'**angle** formé par deux géodésiques sécantes est l'angle euclidien formé par les tangentes euclidiennes à ces deux géodésiques au point d'intersection.

On vérifie que le modèle du demi-plan de Poincaré correspond bien à une GNE : il satisfait les quatre premiers postulats et le postulat 5'. Pour cela, on demande d'abord aux élèves de traduire, dans le nouveau contexte, les quatre premiers postulats d'Euclide et le postulat 5'. Seuls les postulats 1 et 5' feront l'objet d'une vérification. L'élève est amené à utiliser quelques éléments de logique et de géométrie élémentaire pour analyser les différentes configurations possibles des points et géodésiques du demi-plan.

A. Les géodésiques de H et les cinq postulats d'Euclide

On considère les propositions obtenues à partir de la « traduction » des énoncés des 5 postulats d'Euclide en remplaçant le terme de « droite » par « géodésique ». Par exemple pour P1 :

Proposition 1 : Par tous points A et B distincts, il passe une géodésique.

Nous allons maintenant vérifier (sous forme d'exercices) que cette nouvelle géométrie satisfait les propositions 1, 2, 3, 4. Il faudra examiner le cas des géodésiques verticales et celui des géodésiques circulaires.

Vérification de la proposition 1 : étant donnés deux points quelconques A et B de H, tracer une géodésique passant par ces 2 points. On prendra soin d'examiner toutes les positions relatives possibles des points et de justifier les constructions.

En déduire que la proposition 1 est vraie.

Remarque : une telle géodésique est-elle unique ?

Propositions 2, 3 et 4 : énoncer ces propositions. On admettra qu'elles sont vérifiées.

Vérification de la proposition 5' : énoncer la proposition.

Soient D une géodésique quelconque dans H et A un point quelconque extérieur à D.

a) Tracer une géodésique parallèle à D passant par A.
b) Peut-on en tracer d'autres ?

Nous venons donc de vérifier que la géométrie de H satisfait l'équivalent des quatre premiers postulats d'Euclide ainsi que l'équivalent du postulat 5' (donc impliquant la négation de l'équivalent du postulat 5). **Le cinquième postulat n'est donc pas la conséquence logique des quatre premiers**.

La vérification des propositions conduit à la reconnaissance du demi-plan comme modèle d'une géométrie non-euclidienne, dont on explore ensuite une propriété des triangles qui diffère de celle de la géométrie euclidienne : la somme des angles des triangles est inférieure à π radians.

B. Les « triangles » de H

Comme en géométrie euclidienne, un « triangle » est un polygone formé à partir de trois géodésiques sécantes deux à deux (étude à mener suivant les différents types de géodésiques).

a) Tracer des « triangles » dans H (il y a plusieurs formes possibles). Calculer une approximation de la somme des angles, notée S, pour chacun de ces triangles.
b) Que vaudrait S s'il était possible de placer les 3 sommets du triangle sur la droite λ ? En déduire qu'il existe des triangles tels que S soit aussi petit que l'on veut.

On admettra que dans cette nouvelle géométrie **la somme des angles d'un « triangle » est inférieure à π** (le cas d'égalité correspond à l'analogue du « triangle aplati »).

Quelques points d'achoppement

Plusieurs obstacles à la compréhension des élèves peuvent être décelés *a priori*. Nous en présentons ici quelques-uns ainsi que les choix didactiques retenus pour tenter de les surmonter.

Tout d'abord, l'absence d'une définition claire de « géométrie » et « espace » peut gêner la compréhension des enjeux par l'élève. Pourquoi certaines constructions axiomatiques peuvent-elles être appelées « géométries » ? Le recours au dictionnaire Larousse n'est pas d'une grande aide :

> *Géométrie* (n.f., latin geometria, du grec geômetria) : Pour Euclide, science des figures de l'espace ; pour F. Klein (programme d'Erlangen), étude des invariants d'un groupe de transformation de l'espace.
>
> *Espace* : en mathématiques, ensemble sur lequel on a défini une structure (algébrique et/ou

topologique).

Pour éviter les questions légitimes sur la nature « géométrique » d'un système axiomatique, nous avons choisi de présenter préalablement le modèle de Poincaré comme science des figures propres au demi-plan de Poincaré et non comme théorie axiomatique. Cependant, cette démarche qui donne directement le modèle sous forme géométrique, entraîne une difficulté de vocabulaire : un postulat ou axiome est posé *a priori* sans preuve mathématique, alors qu'ici, les analogues des axiomes (postulats) d'Euclide pour la géométrie de Poincaré ne sont plus des axiomes, mais des propositions à démontrer (donc de façon déductive, à partir des théorèmes de la géométrie euclidienne). On montre alors que le modèle satisfait des « règles », qui se trouvent être inspirées des postulats de la géométrie euclidienne à l'exception du cinquième, ce qui justifie l'appellation « géométrie non-euclidienne » à la fois pour le modèle et le système axiomatique sous-jacent. Afin de souligner l'aspect géométrique du modèle, il est également possible de donner un sens concret à la nouvelle distance et de justifier l'allure des géodésiques en employant des artifices didactiques : images des « habitants » de cette géométrie ; physique particulière de ce « monde ».

Une autre difficulté, liée au « vocabulaire » employé, est la suivante : les géodésiques de Poincaré sont des demi-droites euclidiennes et des demi-cercles euclidiens ; les cercles de Poincaré sont des cercles euclidiens aux centres décalés. Le modèle du demi-plan représente ainsi la géométrie de Poincaré à l'aide des outils (règle, compas) et support (feuille) habituels de la géométrie euclidienne. Le risque de confusion est grand pour les élèves et l'enseignant, ce qui oblige à une vigilance particulière vis à vis du vocabulaire employé : on privilégie ainsi le terme géodésique (même lorsqu'il s'agit d'une demi-droite euclidienne, « géodésique verticale ») et l'on adjoint systématiquement l'adjectif « euclidien » ou l'expression « de Poincaré » lorsqu'on désigne les objets géométriques.

Outre ces difficultés propres à notre démarche, nous pouvons également mentionner des obstacles plus classiques :

- la négation du postulat P5 n'est pas P5', qui est « plus fort » logiquement puisque P5' $\Rightarrow$ non P5 et que la réciproque est fausse ;
- la nécessité de rappeler la construction de la médiatrice ;
- les raisonnements par disjonction de cas (géodésiques de différents types) ;
- le raisonnement par figure générique pour démontrer un résultat universel ;
- le traitement d'un cas limite (le triangle dont les angles sont nuls est un cas limite).

Transition avec la discussion philosophique

A l'issue de l'activité, un tableau-bilan est donné aux élèves :

Géométrie d'Euclide	Géométrie de Poincaré
Les géodésiques sont les droites euclidiennes	Les géodésiques sont de 2 types : des demi-droites euclidiennes et des demi-cercles euclidiens
Les postulats P1 à P5 sont vérifiés	Les postulats P1 à P4 sont vérifiés, mais pas P5 (P5 est donc indépendant des 4 premiers postulats : il n'en est pas une conséquence logique)
	Les cercles de Poincaré sont des cercles euclidiens dont le centre est décalé par rapport au centre euclidien
La somme des angles d'un triangle vaut 180°	La somme des angles d'un triangle peut être comprise entre 0 (exclu) et 180° (inclus)
	Il n'existe pas de rectangle

Ce tableau-bilan, qui met en exergue certaines des différences les plus significatives entre la géométrie d'Euclide et celle « de Poincaré », peut constituer le point de départ de la discussion philosophique.

3.3 La discussion philosophique

Le sujet est très complexe car il peut amener de nombreuses discussions d'ordre épistémologique et philosophique. Par exemple : nature des axiomes, valeur d'une démonstration, nature de la géométrie et plus généralement des mathématiques, différence d'objectifs, de procédures, et de critères de vérité entre mathématiques et science physique, incroyable efficacité des mathématiques, notion de vérité, rapport de la raison humaine (et en particulier des mathématiques) au réel, définition de ce qu'est une théorie scientifique, définition et discussion de ce qu'est un modèle, notion de distance et questionnement sur ce qu'est une mesure, un fait, le réel… A cette liste non exhaustive s'ajoute une abondante littérature, des références allant de la *République* de Platon à *L'Axiomatique* de Blanché pouvant être mobilisées. Le cours ne peut donc pas être conçu comme une synthèse faisant le tour de la question et se suffisant à lui-même. Il sera davantage l'occasion d'amorcer un questionnement. Pour cela, nous avons fait le *choix* de nous concentrer sur le problème de la vérité abordé sous l'angle de la question des rapports de la géométrie avec le réel.

Les *objectifs* de la discussion philosophique seront donc assez modestes. On se limitera à développer :

- *un problème* à partir du pluralisme théorique : quelle est la vraie géométrie, et à partir de cette question, quel sens donner au mot vérité lorsqu'on parle de la vérité d'une théorie scientifique et de son rapport au réel (qu'il s'agisse d'une théorie mathématique ou d'une théorie physique qui mobilise des concepts mathématiques) ?
- *deux concepts* permettant aux élèves de bâtir une alternative sur cette question : l'opposition entre vérité et validité, ou l'idée d'une « vérité absolue » et d'une « vérité relative », ou encore l'opposition entre une « vérité théorique » qui ferait de la science un miroir mental de l'univers nous révélant ce qu'est la réalité, et une « vérité pratique » qui se limiterait à tenir pour vrai ce qui nous permet d'agir sur le réel grâce aux calculs et aux prévisions ;
- *une référence* pour approfondir une des conceptions de la vérité : l'explication des

thèses de Poincaré, à partir de l'analyse du titre de son ouvrage *La science et l'hypothèse,* semble pertinente à la fois parce que le modèle de géométrie étudié est le demi-plan de Poincaré, parce que Poincaré pose la question de la vérité de la géométrie, et qu'il remplace cette idée de vérité par celle de « commodité »[7].

La principale *difficulté* dans la mise en œuvre de cette discussion tient à son préalable : les élèves doivent admettre l'existence d'un pluralisme théorique pour pouvoir ensuite en interroger les conséquences. Cela peut conduire à des explications sur la nature des mathématiques, puis des digressions faisant perdre de vue le problème de la vérité.

L'activité mathématique et le tableau de synthèse qui la conclut mettent l'élève en position de s'interroger et de remettre en question la géométrie d'Euclide. Le fait de « manipuler » le demi-plan de Poincaré permet de se faire à l'idée qu'il existe d'autres géométries reposant sur d'autres postulats. Cependant, suivant nos observations en classe, les élèves sont si familiers avec la géométrie d'Euclide et la philosophie de l'unicité qui la sous-tend, qu'ils résistent à l'idée d'un véritable pluralisme théorique. Assez souvent leurs réactions sont de l'ordre du « d'accord c'est cohérent mais... », « ça ne sert à rien », « ce n'est qu'un jeu de l'esprit ».

Deux choses empêchent les élèves d'admettre que les géométries non euclidiennes sont des géométries de plein droit, au même titre que celle d'Euclide :

- Le recours à l'évidence sensible, tout d'abord. Ce recours est omniprésent chez les élèves, y compris lorsqu'ils font des mathématiques. Dans leur esprit, l'évidence sensible sert de preuve, ou de validation, tout autant que les déductions logiques (on pourra railler le fameux « théorème ça se voit »). Il en découle une conception réaliste de la géométrie qui devrait tirer son fondement de l'adéquation avec les faits observables. Il est intéressant de travailler sur cet obstacle en montrant les limites de l'évidence ou de l'intuition, et en réfléchissant sur la nature déductive et formelle des mathématiques.
- Le double sens du mot théorie, ensuite. Il est souvent utilisé de manière négative. On critique celui qui est perdu dans de « grandes théories » sans lien avéré avec le réel. Une théorie peut être fausse ou extravagante. Parce que les géométries non euclidiennes naissent d'un questionnement sur l'indépendance du cinquième postulat (questionnement interne aux mathématiques et sans rapport avec la pratique et ses problèmes concrets) contrairement à la géométrie d'Euclide, elles semblent n'être qu'une invention des mathématiciens. Il est donc nécessaire de montrer qu'elles sont des théories en un sens plus « positif » : elles permettent d'expliquer un ensemble de « faits ».

Une intervention du professeur de mathématique dans le déroulement du cours est donc nécessaire pour montrer l'égale cohérence des deux géométries, mais surtout les applications des GNE au réel. Deux outils peuvent être utilisés :

- l'exemple du GPS qui montre que le fonctionnement de certains instruments techniques du quotidien repose sur l'application d'une GNE. En effet, la détermination de notre position à la surface de la Terre s'obtient à partir de la distance de l'instrument GPS à 4 satellites qui envoient chacun un signal. Pour déterminer précisément cette distance, il convient de prendre en compte des décalages temporels qui sont dus à des effets relativistes et qui sont calculés grâce à une modélisation de l'espace-temps par une géométrie non-euclidienne.

---

7 Dans l'article intitulé « De la nature des axiomes »

- des images d'une sphère ou d'un hyperboloïde pour montrer que, sur d'autres surfaces que le plan euclidien, le plus court chemin n'est pas la ligne droite. On pourra alors expliquer que les différentes géométries schématisent une même notion fondamentale, celle de distance, mais sur des espaces différents.

Une fois le pluralisme théorique admis par les élèves, c'est-à-dire l'idée qu'il existe plusieurs géométries qui en plus d'être cohérentes permettent d'effectuer des mesures et des calculs sur des questions très concrètes, la question prend tout son sens : qu'est-ce que la vérité, ou en quel sens peut-on parler de vérité pour les géométries, si elles sont « toutes vraies », à la fois cohérentes et en rapport avec le réel ?

La *discussion* est présentée de manière synthétique en annexe 2. Le choix qui a été fait est de développer une position « anti-réaliste » en montrant que le rapport au réel n'est pas un rapport d'adéquation, et que parler de vérité en ce sens ne convient pas. On peut lui substituer l'idée d'un rapport pratique. Utilisée par le physicien pour modéliser les phénomènes, une géométrie est un outil qui fournit des règles de mesure et de calculs. On peut attendre de cet outil qu'il soit « commode » ou efficace, non qu'il décrive adéquatement la réalité. Deux cheminements peuvent conduire les élèves à cette idée. D'un côté, la comparaison des différentes géométries en se demandant s'il en existe une plus vraie qu'une autre. De l'autre, l'étonnement devant ce qu'il est convenu d'appeler « l'incroyable efficacité des mathématiques ».

Il existe cependant d'autres possibilités, défendant une position « réaliste », et elles sont également présentées dans l'annexe 2. On sera donc attentif à la problématisation et à l'argumentation, de manière à faire apparaître une discussion entre les grands courants de la philosophie de la connaissance.

4. Compte-rendu d'expérimentations

4.1 Contexte des expérimentations successives et présentation des données recueillies

Notre activité pédagogique sur les GNE a été élaborée suivant une démarche itérative consistant à proposer une première version de l'activité, à l'expérimenter en classe, à l'adapter en fonction des retours de cette expérimentation, à l'expérimenter à nouveau, et ainsi de suite. Ainsi, nous avons expérimenté l'activité à 3 reprises. Dans la suite de l'article, nous présentons et discutons les données recueillies lors des deux dernières expérimentations. Celles-ci ont été menées avec deux duos d'enseignants de mathématiques et de philosophie différents. La première expérimentation a eu lieu en janvier 2016 dans le Lycée Joliot Curie à Sète, dans une classe de Terminale S avec 22 élèves présents, la seconde en avril 2016 dans le Lycée Joseph Vallot à Lodève, dans une classe de Terminale S avec 28 élèves présents. Dans les deux classes, les élèves sont d'origine socio-culturelle mixte et de niveau moyen. Dans le premier cas, l'activité a été réalisée dans sa version plus longue (au niveau du traitement mathématique), sur 2 séances d'une durée respectivement de 1h50 et de 1h25. Dans le second cas, l'activité a été réalisée dans sa version plus courte, sur 2 séances d'une durée respectivement de 1h45 et de 30min.

Ces deux expérimentations ont fait l'objet d'une captation vidéo et d'un enregistrement audio. Les échanges oraux de certaines phases, jugées intéressantes pour l'analyse présentée ci-dessous, ont été transcrits à l'écrit. Nous avons également élaboré un questionnaire soumis aux élèves à la suite des séances (Figure 2). Celui-ci est composé de deux parties, l'une sur des contenus mathématiques et l'autre sur des contenus philosophiques traités ou rapidement évoqués lors des deux séances. Les questions étaient toutes ouvertes.

Questions sur les contenus mathématiques

1. Quelle question les mathématiciens souhaitaient-ils résoudre concernant le postulat des parallèles avant le 19eme siècle ?
2. Qu'est-ce qu'une géométrie non euclidienne ?
3. Ecrire la négation du postulat des parallèles (P5) puis expliquez pourquoi le demi-plan de Poincaré est une géométrie non euclidienne.
4. Faire une synthèse des différences que vous avez constatées entre la géométrie euclidienne et celle du demi-plan de Poincaré.

Questions sur les contenus philosophiques

1. Quelle est la différence entre un axiome et un théorème en mathématiques ?
2. Qu'est-ce qui a conduit les mathématiciens à développer des géométries non euclidiennes ? Par quel type de raisonnement ?
3. La géométrie de Poincaré est-elle vraie ? Expliquez votre réponse.
4. Peut-on parler de vérité en géométrie ? Justifiez votre réponse.
5. Expliquez en quoi consiste l'extraordinaire efficacité des mathématiques et citez des exemples.
6. Expliquez ce que vous avez compris des rapports entre la raison et le réel.

Figure 2. Questionnaire élèves

Les données vidéo et audio ainsi que les réponses des élèves au questionnaire ont ensuite été analysées par notre équipe. Nous présentons dans ce qui suit les points qui nous sont apparus comme étant les plus pertinents.

4.2 Comment les élèves s'emparent-ils de l'exemple mathématique ?

Captations vidéo

L'analyse des vidéos réalisées lors des expériences menées en classe en janvier 2016 nous permet de mettre en avant une faible disponibilité chez les élèves des techniques élémentaires de constructions géométriques à la règle et au compas, ainsi que des résultats de géométrie euclidienne qui les justifient. Une majorité d'élèves manipulent la géométrie du demi-plan dans ce que l'on pourrait qualifier de paradigme empirique naïf, sans percevoir le rôle générique de la figure qui sert d'appui à la démonstration d'assertions universelles (ici, les équivalents des postulats d'Euclide). En effet, dans les séquences filmées, les élèves construisent les géodésiques puis placent les points. L'opération inverse (la construction de géodésiques à partir de points existants), qui correspond à la tâche demandée, est peu expérimentée et lorsqu'elle l'est, peu réussie. La construction de la médiatrice pour déterminer le centre d'une géodésique circulaire n'est généralement pas effectuée sans indication. Mis sur la voie, certains élèves éprouvent des difficultés à tracer la médiatrice ou à positionner le centre de la géodésique circulaire. Par la suite, que ce soit par commodité ou par ignorance, la quasi-totalité des élèves travaillent sur des figures réalisées à main levée.

Ces résultats nous amènent à attirer l'attention des enseignants de mathématiques sur la nécessité, pour le bon déroulement de l'activité dans le contexte institutionnel actuel d'affaiblissement des connaissances géométriques, d'effectuer quelques rappels sur la géométrie à la règle et au compas et le statut de la figure, en faisant notamment émerger le rôle des énoncés euclidiens pour justifier les constructions effectuées dans la géométrie du demi-plan.

Exploitation des réponses au questionnaire (partie mathématique, voir ci-dessus)

Question 1 (Quelle question les mathématiciens souhaitaient-ils résoudre concernant le postulat des parallèles avant le XIXème siècle ?)

Si quelques élèves n'ont pas répondu ou ont donné un énoncé rappelant la transitivité du parallélisme en géométrie, la plupart a compris qu'il s'agissait de vérifier le statut du postulat des parallèles. Quelques réponses caractéristiques :

« Les mathématiciens souhaitaient savoir si le postulat des parallèles est bien un postulat ou un théorème ».

« Ils souhaitaient savoir si on pouvait le déduire des postulats précédents ».

Moins fréquemment :

« (…) les mathématiciens voulaient savoir si il peut exister plusieurs parallèles passant par un point ».

Question 2 (Qu'est-ce qu'une géométrie non euclidienne ?)

Les élèves ayant utilisé le terme de postulat à la question précédente le réinvestissent généralement mais de manière insuffisamment spécifiée :

« La géométrie euclidienne, c'est la géométrie dans le demi-plan de Poincaré où les postulats euclidiens sont les mêmes sauf le 5ème (…)».

« Une géométrie non euclidienne ne respecte pas les postulats d'Euclide ».

La majorité des réponses emploie les termes de droites et géodésiques, et assimile les GNE à la géométrie du demi-plan :

« Une géométrie où les droites sont appelées géodésiques et sont des arcs de cercle (…) ».

« Une géométrie dans laquelle les droites ne sont plus des droites ».

L'attention est donc davantage portée sur la spécificité des objets du demi-plan, du fait de leur caractère contre-intuitif, plutôt que sur la question des axiomes.

Question 3 (Ecrire la négation du postulat des parallèles (P5) puis expliquez pourquoi le demi-plan de Poincaré est une géométrie non euclidienne).

La question a été généralement mal traitée. De nombreux élèves confondent la négation du postulat et la non transitivité du parallélisme dans la géométrie de Poincaré (question B.1 de la version longue), laquelle a fortement marqué les esprits :

« Si D1 est parallèle à D2 et que D3 est parallèle à D2, D3 n'est pas forcément parallèle à D1 »

Quelques élèves retranscrivent le postulat 5' (lequel implique la négation de P5 mais ne lui est pas équivalent) :

« Il existe une infinité de géodésiques parallèles à la géodésique D et passant par le point A distinct de D […] »

Le peu de réussite à cette question suggère la nécessité d'un travail plus approfondi en classe afin de discuter la négation de P5 en ayant au préalable explicité la structure logique de ce postulat (lequel mobilise à la fois un quantificateur universel et existentiel). Les recherches en didactique soulignent en effet les difficultés des élèves à manipuler de tels énoncés doublement quantifiés. Bien que l'activité se prête à un tel travail logique, dans l'esprit des programmes, cet objectif n'a pas été assigné lors de la réalisation de l'activité en classe, l'accent ayant été mis davantage sur les objectifs épistémologiques. Ceci contribue à expliquer les résultats obtenus.

Question 4 (Faire une synthèse des différences que vous avez constatées entre la géométrie euclidienne et celle du demi-plan de Poincaré).

Certaines réponses mentionnent une seule distinction entre les deux types de géométrie, que ce soit la non transitivité du parallélisme ou la somme des angles. La plupart mentionnent cependant plusieurs différences, toutes correctes, par exemple le fait qu'on ne travaille que dans un demi-plan et le comportement de la distance à l'approche de l'axe des abscisses :

> « Différence du plan (y > 0 imaginaire). Différence d'unité (plus on s'approche de l'axe des abscisses, plus on s'en éloigne). Différence des parallèles (infinités passant par un point). La somme des angles d'un triangle est inférieure à 180°.»

Plusieurs élèves mentionnent le « remplacement » des droites par les géodésiques sans plus de détails.

Bilan

Si l'enjeu axiomatique du statut du postulat des parallèles (son indépendance logique) a été retenu par les élèves, les techniques logiques (raisonnement par l'absurde, négation, etc.) ne sont pas maîtrisées. En revanche, le raisonnement par disjonction de cas (en fonction des types de géodésiques) ne pose pas de problèmes majeurs et les élèves comprennent rapidement qu'on attend d'eux plusieurs figures.

La compréhension du demi-plan de Poincaré comme modèle réalisant une géométrie non-euclidienne n'a rien de naturel et nécessite que le professeur explique en quoi le contrat est rempli (le postulat des parallèles est bien un axiome, un énoncé indémontrable à partir des autres axiomes) en fin d'activité. Les réponses et l'attitude de certains élèves suggèrent que la géométrie de Poincaré est perçue comme un jeu logico-géométrique, une curiosité, davantage que comme une géométrie « légitime ». Ceci vient souligner l'importance de débattre du statut du demi-plan de Poincaré lors de la discussion philosophique.

4.3 Les élèves accèdent-ils aux principaux éléments de la réflexion philosophique ?

Les réponses des élèves au questionnaire sur les contenus philosophiques ont permis d'évaluer leur compréhension des notions et questions philosophiques abordées lors de l'activité sur le demi-plan de Poincaré :

Question 1 (Quelle est la différence entre un axiome et un théorème en mathématiques ?)

Dans les deux classes, environ la moitié des élèves exprime l'idée que la vérité d'un théorème doit être démontrée par contraste avec un axiome (un exemple de réponse :

> « Un axiome est un postulat, une loi. Un théorème est un énoncé pouvant être prouvé à l'aide d'un axiome, d'un postulat. »

Pour autant, peu d'élèves explicitent l'idée que la vérité d'un axiome est posée au départ (ce qui est le cas de la réponse suivante :

> « Axiome : on le dit comme vrai sans démonstration. Théorème : démonstration à partir des postulats. »

Pour l'autre moitié des élèves, la différence entre axiome et démonstration reste confuse comme le révèlent par exemple les réponses suivantes :

> « Un axiome c'est un postulat c'est démontré comme vrai. Alors qu'un théorème peut être vrai ou faux. »

« Axiome : à démontrer car pas forcément rationnel. Théorème : prouvé car rationnel. »

Question 2 (Qu'est-ce qui a conduit les mathématiciens à développer des géométries non euclidiennes ? Par quel type de raisonnement ?)

Sur la première partie de cette question, la pertinence des réponses des élèves est graduée. Voici les différentes catégories de réponses données dans l'ordre croissant de pertinence :

- confusion entre la question de l'origine des GNE et celle de leur confrontation au réel (ex : « Les GNE naissent lorsque nous trouvons des exemples qui ne répondent pas à la géométrie euclidienne. Par exemple, la terre, le plan de la terre, ne répond aux géométries euclidiennes ») ;
- idée du doute sans autre précision (« Les GNE naissent par le doute ») ;
- idée de la remise en cause d'un postulat sans/en précisant lequel (ex : « Les GNE naissent d'un doute sur un ou plusieurs postulat(s) ») ;
- idée d'une construction interne aux mathématiques (ex : « Elles naissent à partir de constructions axiomatiques soit par un raisonnement logique ») ;
- idée de la remise en cause d'un postulat & d'une construction interne aux mathématiques.

Par quel type de raisonnement les mathématiciens ont-ils développé les géométries non euclidiennes (seconde partie de la question 2) ? Une partie des réponses (la moitié dans la classe de Sète) est non pertinente ou confuse :

« Un raisonnement par démonstration : montrer la validité d'un fait. »

Une autre partie des réponses (l'autre moitié dans la classe de Sète) montre que les élèves ont retenu l'idée du raisonnement par l'absurde, mais la majorité d'entre eux ne semble pas au clair sur l'objet de ce raisonnement :

« On fait un raisonnement par l'absurde, on suppose… » [la réponse s'arrêtant là]

Les élèves qui donnent une réponse correcte et bien développée sont l'exception :

« On constate que le 5^{e} postulat peut être modifié sans que les 4 autres n'en soient également changés. »

Question 3 (La géométrie de Poincaré est-elle vraie ? Expliquez votre réponse)

Les réponses à cette question sur la vérité de la géométrie de Poincaré révèlent de façon générale une difficulté des élèves à assimiler les deux définitions de la vérité (i.e., vérité cohérence et vérité correspondance) et/ou à distinguer les deux types de rapports au réel (i.e., rapport d'adéquation et rapport pratique). Une partie des élèves (la moitié dans la classe de Sète) n'a retenu qu'une seule définition de la vérité, celle de vérité cohérence :

« Elle est vraie car elle est cohérente et valide. »

Une autre partie des élèves (un quart dans la classe de Sète, une moitié dans la classe de Lodève) exprime l'idée que la vérité de la géométrie de Poincaré est relative ou pratique :

« Elle est vraie, mais cela dépend de la condition dans laquelle on l'utilise. »
« Elle n'est ni vraie ni fausse, mais elle peut être utile. »

Question 4 (Peut-on parler de vérité en géométrie ? Justifiez votre réponse)

Une partie des élèves, la moitié dans la classe de Lodève, apporte une réponse pertinente. Soit la vérité des géométries est interrogée en direction de ses fondements :

> « Non car on utilise des postulats qu'on ne peut démontrer » ou « la géométrie se base sur des conventions. »

soit la vérité des géométries est interrogée en direction du rapport à l'expérience. Ce second aspect est le plus développé par les élèves, compte tenu de la problématique retenue pour le scénario. Il donne lieu à une distinction entre vérité absolue et vérité pratique :

> « Les géométries sont plus ou moins adaptées aux situations [selon qu'on se place sur] un plan [ou une] hyperbole »

Question 5 (Expliquez en quoi consiste l'extraordinaire efficacité des mathématiques et citez des exemples)

Une majorité d'élèves dans les deux classes ne semble pas avoir compris cette idée de l'extraordinaire efficacité des mathématiques Les réponses se limitent souvent à un « ça marche » sans expliquer ce qu'il y a d'extraordinaire. Un quart des élèves de la classe de Sète évoque l'exemple du GPS donné dans le cours. Seul un élève donne une réponse qui traduit une compréhension de cette idée et qui inclut un exemple pertinent :

> « A partir d'un problème interne (problème postulat), on a pu trouver une GNE pouvant être utilisée : ex globe. »

Soulignons que la question de l'extraordinaire efficacité des mathématiques a seulement été évoquée dans la classe de Sète et a fait l'objet d'un traitement bref dans la classe de Lodève.

Question 6 (Expliquez ce que vous avez compris des rapports entre la raison et le réel)

Une minorité des élèves (5/22 dans la classe de Sète et 3/28 dans la classe de Lodève) formule une réponse pertinente :

> « La raison permet de concevoir les choses, d'émettre des concepts afin de comprendre le réel grâce à des recherches par exemple, des raisonnements et des démonstrations. »

Les autres réponses sont confuses et montrent toute la difficulté des élèves à s'approprier correctement ces deux concepts :

> « Le réel est en fait abstrait, ce que l'on ne comprend pas forcément au 1er aspect. Le réel n'est pas les sens. Les sens ne limitent pas le réel. »

Bilan

Les réponses à ce questionnaire montrent que les élèves ont eu des difficultés à s'approprier les notions et problèmes philosophiques qui ont fait l'objet de l'activité du demi-plan de Poincaré. Les questions portant sur la vérité de manière générale sont les mieux comprises. Mais les questions plus précises et plus approfondies, sur le rapport entre la raison et réel, montrent les limites de cette compréhension. Cependant, les réponses pertinentes de certains élèves révèlent que ces notions et questions ne sont pas inaccessibles. En outre, il convient de souligner que ces notions et ces questions sont très complexes. Par conséquent, on ne peut attendre d'une activité se déroulant sur deux séances qu'elle permette à l'ensemble des élèves d'accéder à une compréhension fine de celles-ci.

5. Conclusion et perspectives

Les GNE constituent un objet interdisciplinaire dont l'étude est potentiellement très riche non seulement dans le cadre de l'enseignement de la philosophie, en particulier pour traiter la question de la vérité, mais également dans celui de l'enseignement des mathématiques, pour discuter la notion d'axiome et les rapports des mathématiques avec le réel, ou travailler le raisonnement et la logique, ou encore les fonctions logarithmes et exponentielles. Toutefois, cet objet est aussi très complexe à cerner. Est-il possible de l'étudier en classe de Terminale suivant la double perspective mathématique et philosophique de façon accessible pour les élèves et de sorte à rendre possible les apprentissages visés par ces deux disciplines ?

Dans cet article, nous avons exploré cette question à travers la présentation et l'analyse d'une séquence pédagogique développée de façon collaborative et itérative, c'est-à-dire par des allers-retours entre conception et expérimentation. Nous avons privilégié une approche didactique proprement interdisciplinaire, c'est-à-dire qui ne se contente pas de juxtaposer les regards mathématique et philosophique, mais qui s'efforce de les combiner pour en tirer un bénéfice mutuel : d'un côté, le travail mathématique des GNE avec les élèves permet de rendre plus substantiel l'exemple jouant le rôle de support au questionnement philosophique sur la vérité, de l'autre la contextualisation des exercices mathématiques dans le cadre d'une réflexion philosophique apporte du sens aux notions mathématiques enseignées. Nous avons développé dans le §2 les multiples enjeux, tant philosophiques que mathématiques, dont cet exemple des GNE permet de se saisir. La séquence pédagogique présentée dans le §3 a mis en évidence la possibilité d'un scénario pour la classe qui articule de manière cohérente les volets philosophique et mathématique. Nous pensons qu'un tel dispositif pédagogique offre une richesse potentielle tant pour la réflexion philosophique que pour le raisonnement mathématique.

Cependant, les contenus mathématiques étudiés et les idées philosophiques discutées sont complexes. Plusieurs obstacles à la compréhension des élèves ont ainsi été identifiés *a priori* (§3) : par exemple, des obstacles liés à la définition de la géométrie, à la distinction entre droite et géodésique, ou encore au mode de raisonnement mobilisant des théorèmes euclidiens dans un contexte non-euclidien. L'analyse des données recueillies lors de nos expérimentations (§4) vient confirmer la présence de ces obstacles et met en évidence les difficultés des élèves à maîtriser les contenus mathématiques et les idées philosophiques. En outre, la pratique de la géométrie à la règle et au compas en lien avec les théorèmes euclidiens nous a réservé des surprises : alors que nous pensions que l'activité pouvait s'adosser à cette pratique "élémentaire", nous avons pu constater un manque de disponibilité et une fragilité des connaissances géométriques lorsqu'il s'est agi de les mobiliser dans le contexte déstabilisant de la géométrie du demi-plan, d'où un nouvel obstacle. Ainsi, à l'issue de la séquence, de nombreux élèves ne semblent pas être au clair sur la différence entre axiome et théorème, peu d'élèves ont retenu le raisonnement par l'absurde à l'œuvre dans l'émergence des GNE, ou encore la majorité d'entre eux ne semble pas avoir saisi clairement la distinction entre la vérité cohérence et la vérité correspondance.

Comment faire pour que, malgré cette complexité et les difficultés de compréhension qu'elle implique, une séquence sur les GNE soit féconde en termes d'apprentissage pour les élèves sur les plans mathématiques et philosophiques ? Une première piste pour les enseignants consiste à porter une attention toute particulière en classe aux définitions des notions mobilisées. La modalité interdisciplinaire s'avère de ce point de vue une force : elle permet une discussion plus ample des notions méta-mathématiques (axiome, théorème, etc.) que dans le contrat usuel d'un cours plus classique de mathématiques où ces notions demeurent en général implicites. Outre un travail sur la structure logique du cinquième postulat, nous avons également souligné l'importance, pour le bon déroulement de la partie mathématique, de veiller à la disponibilité des connaissances géométriques et de souligner le rôle des théorèmes euclidiens pour la justification des constructions effectuées dans le demi-plan. Une troisième piste consiste à combiner cette séquence sur les GNE avec une autre séquence sur le thème du rapport raison-réel permettant de remobiliser les notions introduites, ou bien de travailler davantage en amont la démonstration mathématique, au sein de chaînes déductives menées dans un contexte plus classique de géométrie, exploitant par exemple les propriétés des parallélogrammes (voir autres ressources produites par le groupe math-philo). De nouvelles expérimentations en classe mettant en oeuvre des variantes de la séquence présentée ici pourront peut-être apporter de nouvelles idées pour rendre les contenus plus accessibles aux élèves.

Il est possible que certains enseignants puissent être réticents à mettre en oeuvre cette séquence en raison de la complexité des contenus mis en jeu (lorsqu'on les considère suivant les multiples perspectives disciplinaires) et de l'originalité du dispositif pédagogique impliquant un enseignants de mathématiques et un enseignant de philosophie. À cet égard, une formation des enseignants semble nécessaire, qu'elle soit en présentiel (dans le cadre d'une formation continue) ou à défaut au moyen de ressources en ligne (en auto-formation). Depuis deux ans, une telle formation, initiée et assurée par le groupe math-philo, est offerte aux enseignants de mathématiques et de philosophie de l'Académie de Montpellier dans le cadre du Plan Académique de Formation. Cette formation, en présentiel sur deux journées, vise d'une part à permettre aux enseignant de s'initier aux GNE suivant plusieurs perspectives disciplinaires, d'autre part à faciliter la mutualisation de la ressource que nous avons produite, de sorte que ces enseignants soient suffisamment armés pour mener en classe cette activité. La culture de l'interdisciplinarité s'acquiert avec le temps et la pratique, elle nécessite des modalités spécifiques de travail en groupe ou d'intervention en classe lors de séances communes. L'exemple des GNE s'est révélé très fécond pour le développement d'une telle culture, à la fois au niveau de notre groupe IREM et des groupes de professeurs stagiaires qui ont suivi nos formations. La richesse de ce thème y est pour beaucoup : il ne cesse de nous mettre au défi, que ce soit sur les plans philosophique, mathématique, pédagogique ou didactique.

Annexes

Annexe 1 : le devoir de mathématiques à la maison

Soit A un point de H. Le « cercle de Poincaré » Γ dans H de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M de H tels que $d_H(A,M) = r$.

a) Montrer que Γ est l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient : $$\frac{1+\frac{|AM|}{|\bar{A}M|}}{1-\frac{|AM|}{|\bar{A}M|}} = e^{2r}$$

Montrer que l'équation est $y = \frac{1+x}{1-x}$ équivalente à $x = \frac{y-1}{y+1}$ ($x \neq 1$ et $y \neq -1$). En déduire que Γ est l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient :

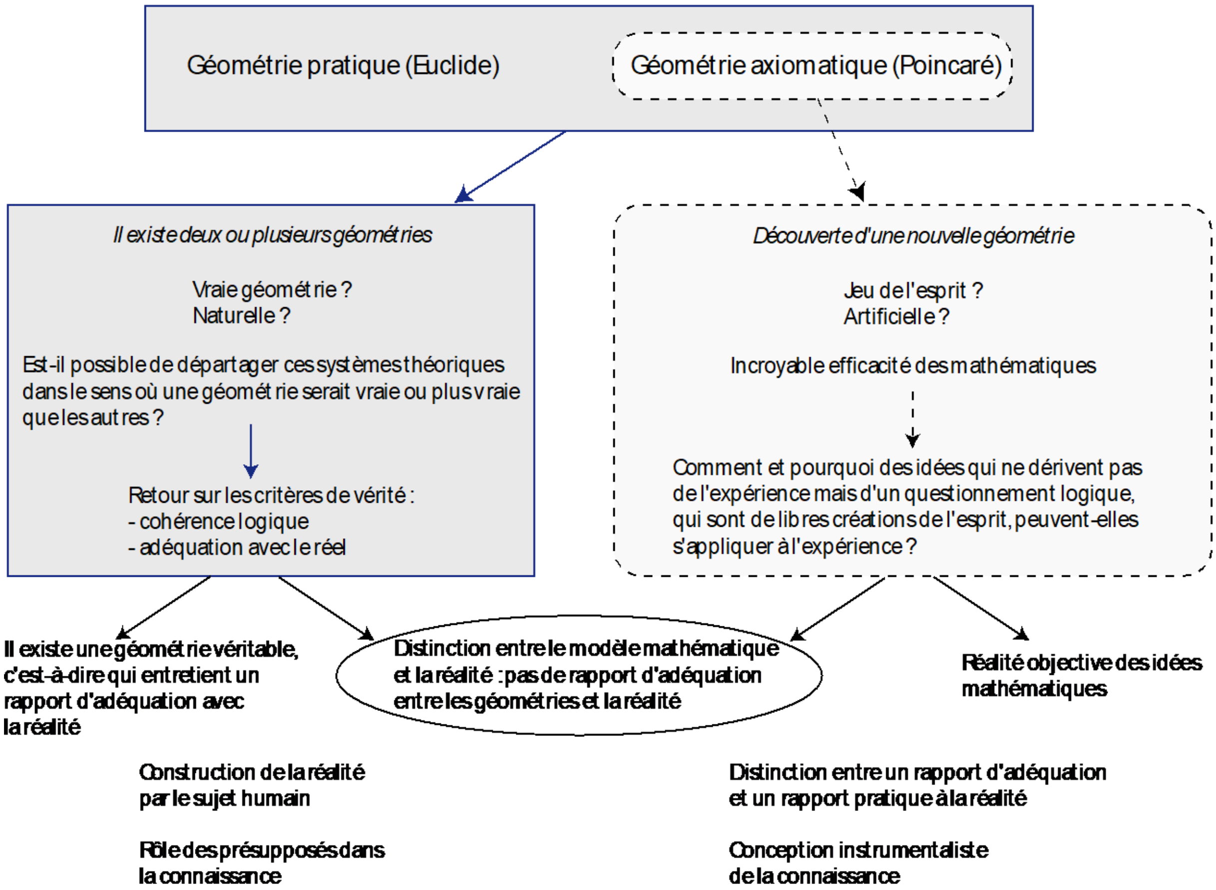
$$\frac{|AM|}{|\bar{A}M|} = \frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1}$$

b) Montrer que pour tout réel $r \geq 0$: $0 \leq \frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1} \leq 1$

c) En déduire que $|AM| \leq |\bar{A}M|$ et que Γ est contenu dans H.

d) Montrer que Γ est un cercle euclidien dont le centre est sur la droite euclidienne $(\bar{A}A)$ (Cercle d'Apollonius - on pourra considérer le repère orthonormé d'axes $(\bar{A}A)$ et λ et faire un calcul en coordonnées cartésiennes. On posera $k = \frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1}$).

Annexe 2 : schéma synoptique de la discussion philosophique



Références

Blanché, R. (2009). *L'axiomatique*. Paris : PUF.

Bächtold, M. & Hausberger, T. (2013). Les nombres complexes : entre mathématiques, physique et philosophie. Dans *La réforme des programmes de lycées, et alors ?* Actes du colloque IREM, Lyon, 24-25 mai 2013. Paris : IREM de Paris 7, 78-88.

Chabert, J.-L. (1990). Les géométries non euclidiennes. *Repères-IREM*, 1, 79-91.

Einstein, A. et Infeld, L. (2009). *L'évolution des idées en physique*, Paris : Flammarion.

Gonseth, F. (1926). *Les fondements des mathématiques : de la géométrie d'Euclide à la Relativité générale et à l'Intuitionnisme*. Paris : Blanchard.

Guin D. et Trouche L. (2004). Intégration des TICE : concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques. *Repères-IREM*, 55, 81-100.

Jammer, M. (2008). *Concepts d'espace, une histoire des théories de l'espace en physique* (tr. fr.). Paris : Vrin.

Lenoir, Y. (2015). Quelle interdisciplinarité à l'école ? *Cahiers Pédagogiques*, juillet 2015, récupéré de : http://www.cahiers-pedagogiques.com/Quelle-interdisciplinarite-a-l-ecole.

MEN (Ministère de l'Education nationale). (2003). Programme de philosophie en classe terminale générale des séries générales. *Bulletin Officiel de l'Education Nationale*, n°25 du 19 juin 2003.

MEN (Ministère de l'Education nationale). (2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques. Classe terminale de la série scientifique. *Bulletin Officiel de l'Education Nationale*, spécial n° 8 du 13 octobre 2011.

Poincaré, H. (1968a). De la nature des axiomes, dans *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion.

Poincaré, H. (1968b). Les géométries non euclidiennes, dans *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion.

Psillos, S. (1999). *Scientific realism : how science tracks truth*. Londres et New York : Routledge.
Sklar, L. (1976). *Space, time and spacetime*. Berkeley, Los Angeles, London : University of California Press.
Toth, I. (1977). La révolution non euclidienne. *La recherche*, 75, 143-151.
Van Fraassen (2004 [1976]). Sauver les phénomènes. Dans S. Laugier et W. Wagner (eds.), *Philosophie des sciences, II : naturalismes et réalismes* (p. 147-163), Paris : Vrin.
Vitrac, B. & Caveing, M. (1990). *Euclide : Les Eléments. Vol. 1 : Introduction générale et Livres I à IV*. Paris : Presses Universitaires de France (Bibliothèque d'histoire des sciences).
Wigner, E. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13(1), 1-14.