



**HAL**  
open science

# Optimisation itérative par majoration-minimisation pour l'estimation statistique sous l'hypothèse d'un bruit ricien

Qianyi Jiang, Said Moussaoui, Jérôme Idier, Guylaine Collewet

## ► To cite this version:

Qianyi Jiang, Said Moussaoui, Jérôme Idier, Guylaine Collewet. Optimisation itérative par majoration-minimisation pour l'estimation statistique sous l'hypothèse d'un bruit ricien. Actes du XXVIème colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images, Sep 2017, Juan-Les-Pins, France. hal-01653036

**HAL Id: hal-01653036**

**<https://hal.science/hal-01653036>**

Submitted on 18 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation itérative par majoration-minimisation pour l'estimation statistique sous l'hypothèse d'un bruit ricien

Qianyi JIANG<sup>1</sup>, Saïd MOUSSAOUI<sup>1</sup>, Jérôme IDIER<sup>1</sup>, Guylaine COLLEWET<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N, CNRS UMR 6004), 1 rue de la Noë, 44321 Nantes Cedex 3, France

<sup>2</sup>IRSTEA, UR OPAALE CS 64427, 35044 Rennes, France

qianyi.jiang@eleves.ec-nantes.fr

**Résumé** – Cette communication s'intéresse à l'estimation statistique d'un signal perturbé par un bruit ricien avec comme objectif de proposer une méthode de débruitage efficace. L'application ciblée concerne le traitement d'images biologiques obtenues par résonance magnétique. Partant du constat que le critère à minimiser est unimodal mais non-convexe, la principale contribution de cette communication consiste en la proposition d'une stratégie d'optimisation fondée sur les techniques de majoration-minimisation quadratique après introduction d'une transformation permettant la convexification du critère à minimiser. Le schéma de descente itérative proposé sera comparé à l'approche de descente MM de référence. Les performances sont analysées en utilisant des données réelles issues de l'analyse d'échantillons agroalimentaires.

**Abstract** – This paper addresses statistical estimation of signals corrupted by a Rician noise with the aim to propose an efficient denoising method. The aimed application is the restoration of magnetic resonance images. Starting from the fact that the criterion to minimize is non-convex but unimodal, the main contribution of this work is to propose an optimization scheme based on the majoration-minimization principle after introducing a variable change allowing to get a strictly convex criterion. The resulting descent algorithm is compared to the classical MM descent algorithm and its performances are analyzed using real data sets of food sample analysis.

## 1 Introduction

Le bruit en imagerie par résonance magnétique (IRM) est la principale source de difficulté pour l'interprétation des images. Des temps d'acquisition doivent être suffisamment longs pour obtenir des images ayant un rapport sur bruit (RSB) suffisant. Dans certaines applications, il est nécessaire de réduire les temps d'acquisition des images et d'associer au système d'imagerie des routines de réduction de bruit [7]. Cependant, l'efficacité des méthodes de débruitage doit être éprouvée et notamment par la prise en compte de la statistique du bruit de mesure. En effet, comme le bruit IRM est supposé gaussien indépendant et identiquement distribué dans l'espace complexe des mesures (partie réelle et partie imaginaire), les images en module suivent une distribution de Rice [3]. Or, dans plusieurs applications de l'IRM, c'est le module du signal qui est traité du fait de la sensibilité de la phase à plusieurs effets instrumentaux tels que l'hétérogénéité du champ magnétique, la température de l'échantillon et le mouvement de l'objet observé. Ceci rend inefficace l'utilisation des techniques de débruitage fondées sur l'hypothèse d'un bruit gaussien.

Une méthode dite conventionnelle (CA), fondée sur le moment d'ordre deux de la distribution de Rice, a été proposée dans [6]. Quelques années plus tard, Sijber et al. [8] ont proposé une autre méthode d'estimation basée sur le principe de maximum vraisemblance (MV). L'estimateur MV est un compromis entre précision et efficacité statistique mais son application à des images réelles, tel que mentionné par Santiago [1],

ne permet pas d'avoir une performance satisfaisante à cause de l'apparition d'un flou. Ce phénomène n'est pas dû à la méthode MV elle-même, mais au fait qu'elle était initialement conçue pour plusieurs images. En fait, il y a deux approches possibles pour son application dans le cas d'une seule image : utiliser les voisinages de chaque pixel pour estimer la vraisemblance ou prendre en compte simplement le pixel unique. Dans le premier cas, l'estimation locale provoque le flou. Dans l'autre cas, le manque d'information entraîne une faible réduction de bruit. La solution dans ce cas est d'ajouter de l'information a priori à travers une régularisation.

Dans cette communication, nous proposons une méthode de maximum de vraisemblance régularisé pour améliorer la performance de restauration d'images IRM à partir d'une seule mesure, à la fois en temps de calcul et en qualité de restauration. Nous introduisons une régularisation entropique et nous proposons un algorithme d'optimisation par majoration-minimisation (MM) adapté à la structure du critère à minimiser. La validité de la méthode est illustrée sur la base d'images réelles issues de mesures sur des échantillons agroalimentaires.

## 2 Formulation du problème

L'amplitude du signal mesuré en IRM suit une distribution de Rice :

$$p(M_i | A) = \frac{M_i}{\sigma^2} e^{-\frac{M_i^2 + A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{AM_i}{\sigma^2}\right) u(M_i), \quad (1)$$

où  $I_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel modifiée de premier espèce d'ordre zéro,  $A$  représente l'amplitude du signal à estimer<sup>1</sup> et  $M_i$  correspond à la  $i$ -ème mesure,  $\sigma^2$  est la variance du bruit gaussien,  $u$  désigne la fonction indicatrice.

Sous l'hypothèse d'indépendance des  $N$  mesures  $M_i$ , la fonction objectif à minimiser pour l'estimation de l'intensité  $A$  par maximum de vraisemblance s'exprime par :

$$L(A) = -\log \prod_{i=1}^N p(M_i|A) = -\sum_{i=1}^N \log I_0\left(\frac{AM_i}{\sigma^2}\right) + \sum_{i=1}^N \frac{A^2 + M_i^2}{2\sigma^2} - \sum_{i=1}^N \log\left(\frac{M_i}{\sigma^2}\right). \quad (2)$$

D'après le critère (2), la méthode classique du MV est formulée pour plusieurs acquisitions alors que dans notre cas nous considérerons une seule image ( $N = 1$ ). Par conséquent, une approche alternative pour compléter l'information statistique et reconstruire les images à partir de données incomplètes est d'introduire un terme de régularisation.

En l'absence de régularisation, la fonction objectif possède un minimum local et  $A = 0$  est toujours une solution triviale [11]. Dans [9], les auteurs ont proposé une estimation de maximum vraisemblance pénalisé fondée sur une majoration quadratique et une régularisation de type variation totale. Nous proposons d'appliquer une autre régularisation de type entropique [5], qui du fait que son gradient soit infini en 0 permet d'assurer la positivité des intensités des pixels de l'image. Considérons le cas de l'entropie de Burg qui correspond à :

$$R(A) = -\log A. \quad (3)$$

Signalons que d'autres formes d'entropies peuvent être utilisées et les développements qui vont suivre resteront valables, moyennant quelques adaptations techniques.

L'expression finale du critère à minimiser et l'estimateur qui en découle sont donnés par :

$$F(A) = -\log p(M|A) + \beta R(A) \quad (4)$$

$$\hat{A} = \arg \min_A F(A) \quad (5)$$

où  $\beta$  est le paramètre qui permet d'ajuster le poids du terme de régularisation.

## 2.1 Critère initial, non convexe et unimodal

La fonction objectif ne peut pas être minimisée explicitement et elle n'est pas convexe mais reste unimodale, donc un algorithme d'optimisation itérative peut être appliqué. Nous optons pour un algorithme de descente de type MM. Comme  $f(\cdot) = -\log I_0(\cdot)$  est une fonction concave, celle-ci peut être majorée en tout point  $A_k$  par une fonction affine :

$$f(A) = -\log I_0\left(\frac{AM}{\sigma^2}\right) \leq g_k(A - A_k) + f(A_k), \quad (6)$$

1. L'indice de pixels correspondant est omis pour simplifier les notations

avec  $g_k$  le gradient de  $f(\cdot)$  en  $A_k$  :

$$g_k = -\frac{M}{\sigma^2} \frac{I_1\left(\frac{A_k M}{\sigma^2}\right)}{I_0\left(\frac{A_k M}{\sigma^2}\right)}. \quad (7)$$

où  $A_k$  la valeur estimée à la  $k$ ème itération d'un algorithme de descente et  $I_1(\cdot)$  la fonction de Bessel modifiée du premier espèce et d'ordre un. Par conséquent, la fonction tangente majorante  $H_L(\cdot, A_k)$  de  $L(\cdot)$  et le gradient  $\nabla H_F(\cdot, A_k)$  sont sous la forme :

$$H_L(A, A_k) = \frac{A^2}{2\sigma^2} + g_k(A - A_k) - \log I_0\left(\frac{A_k M}{\sigma^2}\right), \quad (8)$$

$$\nabla H_F(A, A_k) = \frac{A}{\sigma^2} - \frac{\beta}{A} + g_k. \quad (9)$$

La solution positive annulant le gradient donne  $A_{k+1}$  s'exprime selon :

$$A_{k+1} = \frac{\sigma^2}{2} \left( -g_k + \sqrt{g_k^2 + \frac{4\beta}{\sigma^2}} \right). \quad (10)$$

Notons aussi que pour  $\beta = 0$ , cette solution rejoint celle du MV classique [4].

## 2.2 Critère transformé convexe

D'après la proposition 3 de [4], la fonction objectif  $F(\cdot)$ , sans la partie entropie, en introduisant le changement de variable  $y = A^2$  est une fonction convexe et uni-modale (voir l'illustration de la Figure 1). Ainsi, nous proposons de construire une nouvelle fonction majorante du critère convexe et nous appliquerons le schéma de descente MM pour l'optimisation.

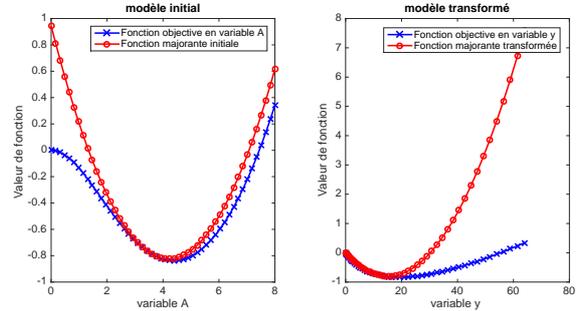


FIGURE 1 – Illustration du modèle initial non convexe unimodal, le critère transformé convexe et les approximations majorantes quadratiques

En notant  $y = A^2$ , la fonction convexe  $\tilde{L}(\cdot)$  et la fonction objectif  $\tilde{F}(\cdot)$  seront :

$$\tilde{L}(y) = \frac{y}{2\sigma^2} + f(\sqrt{y}) \quad (11)$$

$$\tilde{F}(y) = \tilde{L}(y) - \frac{\beta}{2} \log y \quad (12)$$

Nous proposons la fonction tangente majorante quadratique

$$\tilde{H}_L(y, y_k) = \frac{1}{2} B_k (y - y_k)^2 + \nabla \tilde{L}(y_k) (y - y_k) + \tilde{L}(y_k), \quad (13)$$

dont la courbure est définie par  $B_k = \frac{2 \left( \nabla \tilde{L}(y_k) y_k - \tilde{L}(y_k) \right)}{y_k^2}$ .

**Discussion.** Cette courbure résulte du choix que la fonction majorante passe par le même point que  $\tilde{L}(\cdot)$  en  $y = 0$ . Cette construction permet d'obtenir l'approximation majorante quadratique de plus faible courbure. La propriété de majoration se déduit du fait que la dérivée troisième de la  $\tilde{F}(\cdot)$  est négative et donc sa courbure est décroissante. Les démonstrations ne seront pas reportées ici par manque de place.

**Proposition 1.** La courbure  $B_k$  de la fonction tangente majorante  $\tilde{H}(\cdot, y_k)$  définie par l'équation (13) est définie positive pour toute valeur de  $y_k$  non-négative.

*Démonstration.* Notons que  $B_k(y)$  peut être formulée comme étant la dérivée de  $b(y) = 2\frac{\tilde{L}(y)}{y} = -2\frac{\log I_0(\sqrt{y})}{y} + \frac{1}{\sigma^2}$ . La preuve consiste à montrer que cette fonction est croissante ou encore à montrer que  $\exp(-P(y))$  est décroissante. Or, la dérivée de  $\exp(-P(y))$  est sous la forme  $I_1(y) - 2yI_0(y)$ , et d'après les théorèmes (15) et (16) de [2], il en résulte  $\frac{I_1(y)}{I_0(y)} \leq 2y$ . Ainsi, la positivité de la courbure est vérifiée.  $\square$

La valeur estimée de  $A$  à itération  $k + 1$  est obtenue avec la racine positive du gradient de  $\tilde{H}_L(\cdot, y_k) - \frac{\beta}{2} \log(\cdot)$  :

$$y_{k+1} = \frac{(y_k B_k - \nabla \tilde{F}(y_k)) + \sqrt{(\nabla \tilde{F}(y_k) - y_k B_k)^2 + \beta B_k}}{2B_k}. \quad (14)$$

## 3 Analyse des performances

### 3.1 Intérêt du changement de variable

Comme les fonctions objectifs définies en fonction de  $A$  et  $y$  sont identiques, nous pouvons comparer les vitesses de convergence des deux algorithmes de descente MM qui en résultent. Pour cela, nous considérons une image réelle de module obtenu par IRM. La variance du bruit est supposée connue et estimée à partir des pixels du fond de l'image [1]. L'image mesurée est prise comme valeur initiale et le test d'arrêt est que la norme infinie du gradient soit inférieure à  $10^{-4}$ .

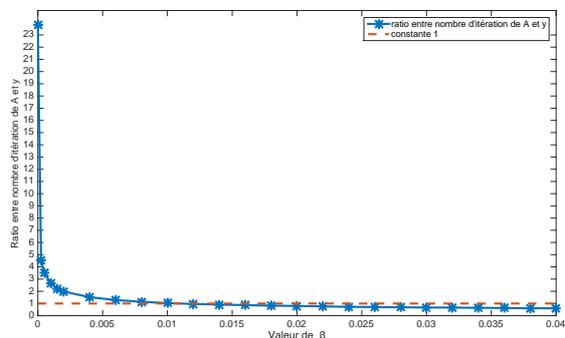


FIGURE 2 – Ratio entre nombre d'itération de variable  $A$  et variable  $y$  pour différentes valeurs de  $\beta$

Il a été constaté que le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence de l'algorithme de descente en  $A$  varie sensiblement en fonction de la valeur de  $\beta$ , contrairement à la descente en  $y = A^2$  qui nécessite un nombre d'itérations de l'ordre de 55 pour toute valeur du paramètre de régularisation. Comme montré sur la Figure 2, pour  $\beta$  proche de zéro, on remarque un facteur d'accélération de l'ordre de 24, ce qui prouve que le changement de variable améliore la vitesse de convergence. Ce constat illustre parfaitement l'intérêt de l'approche proposée, notamment pour l'estimation par maximum de vraisemblance.

### 3.2 Application au débruitage d'images IRM

Sachant que RSB en IRM est proportionnel au nombre d'acquisitions, nous prenons des images IRM d'une coupe de fromage avec 32 acquisitions comme image de référence et la même coupe avec 8 acquisitions pour tester la méthode proposée. La variance du bruit est calculée selon une méthode d'estimation basée sur la distribution locale de la variance du signal [1]. Pour analyser la qualité du débruitage l'erreur quadratique moyenne normalisée (EQMN) et la déviation absolue moyennée (DAM) sont calculées pour différentes valeurs du paramètre  $\beta$  (voir fig.3).

D'après les résultats de la Figure 3, et d'autres expérimentations avec des images réelles, nous pouvons affirmer que l'estimation par maximum de vraisemblance pénalisé tend à améliorer la qualité de l'image si le paramètre  $\beta$  est bien choisi.

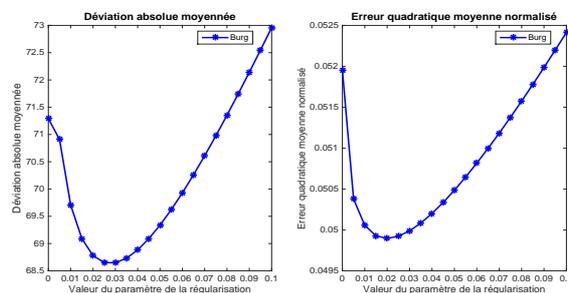


FIGURE 3 – Déviation absolue moyennée (Gauche) et erreur quadratique moyenne normalisée (Droite) pour différentes valeurs de  $\beta$  pour une régularisation entropique.

Nous réalisons également une comparaison avec les méthodes classiques de maximum vraisemblance. L'indice de qualité basé sur la variance locale (QIVL)[10] et l'erreur absolue normalisée (NAE) sont calculés. Le premier donne une mesure du niveau de flou ; plus l'indice est plus proche de 1 meilleure est l'image. Le deuxième évalue la qualité de la réduction du bruit. À partir des résultats présentés dans le tableau 1, on constate que l'estimation de MV pénalisé par l'entropie de Burg permet d'améliorer la qualité de l'image sans introduction du flou.

La figure 4 illustre l'image originale bruitée et les résultats avec différents estimateurs classiques de MV. Nous remarquons que visuellement l'amélioration n'est pas évidente à per-

cevoir en comparant avec la méthode de MV. D'autres formes de régularisations entropique, ou de variation totale, sont en cours d'étude pour obtenir de meilleures performances.

	MV pixel	MV entropie	MV voisinage
QIVL	0.8719	<b>0.8980</b>	0.4162
NAE	0.0431	<b>0.0421</b>	0.0423

TABLE 1 – Mesures de la qualité pour l'estimation par MV par pixel étant donné une seule image, MV pénalisé avec l'entropie de Burg et MV conventionnel utilisant un voisinage  $5 \times 5$

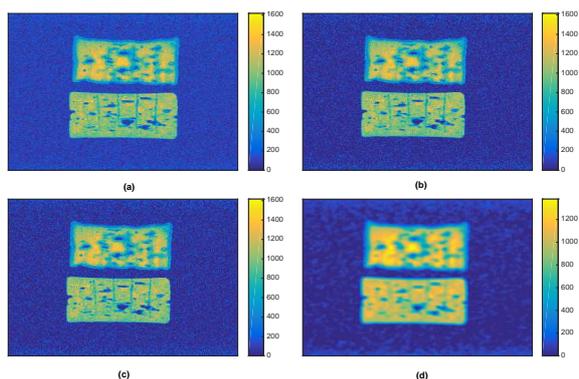


FIGURE 4 – Comparaison des images IRM estimées d'une coupe de fromage : (a) Image originale. (b) MV pixel par pixel. (c) MV pénalisé avec entropie de Burg  $\beta = 0.03$ . (d) MV conventionnel utilisant un voisinage de  $5 \times 5$  pixels.

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié le problème de l'estimation du signal pour l'IRM sous l'hypothèse du bruit de Rice. Nous avons introduit un terme de régularisation basé sur l'entropie de Burg. L'optimisation s'effectue à l'aide d'un algorithme de descente par majoration-minimisation. Le schéma d'optimisation classique repose sur structure de majoration quadratique d'un critère non-convexe mais unimodal. Nous avons proposé une approche originale fondée sur un changement de variable pour assurer la convexité du critère et une majoration quadratique efficace. Le résultat majeur est d'obtenir une accélération notable de la convergence de l'algorithme du maximum de vraisemblance.

Des expériences réalisées avec des images réelles ont montré que la régularisation conduit à une amélioration des estimations. En plus, en utilisant des indices d'évaluation de la qualité des images, nous avons démontré que la méthode proposée permet un compromis entre réduction du bruit et préservation des bords quand une seule image est disponible. En ce qui concerne le choix du paramètre de régularisation  $\beta$ , sa valeur liée à la variance du bruit et de l'amplitude de l'image.

Cependant, selon quelques résultats d'expériences, nous avons noté que ses valeurs optimales restent dans un certain intervalle pour une large gamme de RSB. Pour vérifier cette hypothèse et pour déterminer une expression explicite pour ce paramètre, une recherche plus poussée doit être effectuée. Un autre travail consiste à adapter cet algorithme d'optimisation à d'autres critères de régularisation entropique (telle que celle de Shannon et l'entropie croisée) ou de variation totale.

## 5 Remerciements

Ce travail a été financé par le GDR 720 ISIS dans le cadre de l'appel à projets exploratoires 2016.

## Références

- [1] Santiago AJA-FERNÁNDEZ, Carlos ALBEROLA-LÓPEZ et Carl-Fredrik WESTIN : Noise and signal estimation in magnitude MRI and Rician distributed images : a LMMSE approach. *IEEE transactions on image processing*, 17(8):1383–1398, 2008.
- [2] Donald E AMOS : Computation of modified bessel functions and their ratios. *Mathematics of Computation*, 28(125):239–251, 1974.
- [3] Hákon GUDBJARTSSON et Samuel PATZ : The Rician distribution of noisy MRI data. *Magnetic resonance in medicine*, 34(6):910–914, 1995.
- [4] Jérôme IDIER et Guylaine COLLEWET : Properties of fisher information for rician distributions and consequences in mri. *HAL <hal-01072813>*, 2014.
- [5] Calvin A JOHNSON, Delia MCGARRY, John A COOK, Nallathambi DEVASAHAYAM, James B MITCHELL, Sankaran SUBRAMANIAN et Murali C KRISHNA : Maximum entropy reconstruction methods in electron paramagnetic resonance imaging. *Annals of Operations Research*, 119(1):101–118, 2003.
- [6] G MCGIBNEY et MR SMITH : An unbiased signal-to-noise ratio measure for magnetic resonance images. *Medical physics*, 20(4):1077–1078, 1993.
- [7] J MOHAN, V KRISHNAVENI et Yanhui GUO : A survey on the magnetic resonance image denoising methods. *Biomedical Signal Processing and Control*, 9:56–69, 2014.
- [8] Jan SIJBERS et AJ DEN DEKKER : Maximum likelihood estimation of signal amplitude and noise variance from MR data. *Magnetic Resonance in Medicine*, 51(3):586–594, 2004.
- [9] Divya VARADARAJAN et Justin P HALDAR : A majorize-minimize framework for Rician and non-central Chi MR images. *IEEE transactions on medical imaging*, 34(10):2191–2202, 2015.
- [10] Yu-qing WANG, Wei-ya LIU et Yong WANG : Image quality assessment based on local variance and structure similarity. *Journal of Optoelectronics-Laser*, 19(11):1546–1553, 2008.
- [11] Tatiana V YAKOVLEVA et Nicolas S KULBERG : Noise and signal estimation in MRI : two-parametric analysis of Rice-distributed data by means of the maximum likelihood approach. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 2(3):67–79, 2013.