

Une note sur les intervalles de Tamari

Frédéric Chapoton

▶ **To cite this version:**

Frédéric Chapoton. Une note sur les intervalles de Tamari. Annales Mathématiques Blaise Pascal, 2018, 25 (2), pp.299-314. 10.5802/ambp.378 . hal-01634074

HAL Id: hal-01634074
https://hal.science/hal-01634074

Submitted on 13 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une note sur les intervalles de Tamari

F. Chapoton

13 novembre 2017

Résumé

À tout ordre partiel P, on associe un polynôme $\mathbb{D}_P$ en quatre variables, qui énumère les intervalles dans P en fonction de quatre paramètres dont la description utilise un ordre partiel naturel sur les intervalles.

On s'intéresse aux symétries de cet invariant général lorsqu'il est appliqué à une famille importante d'ordres partiels, les treillis de Tamari. On obtient une symétrie ternaire pour une spécialisation du polynôme (en utilisant une équation fonctionnelle et une équation algébrique pour la série génératrice) et une conjecture sur une symétrie globale du polynôme. On décrit le sous-ensemble connu des intervalles synchrones des treillis de Tamari en terme d'une facette dans un polytope de Newton. On relie une autre spécialisation du polynôme aux statistiques provenant de la canopée des arbres binaires plans.

1 Polynômes de valence et posets d'intervalles

Soit P un poset (ensemble muni d'un ordre partiel) fini. On peut lui associer un polynôme en 2 variables

$$D_P(a, \overline{a}) = \sum_{u \in P} a^{\mathrm{out}(u)} \overline{a}^{\mathrm{in}(u)},$$

qui compte les sommets de P selon leur valence sortante (pour a) et entrante (pour $\overline{a}$) dans le diagramme de Hasse de P. On convient d'orienter les arêtes du diagramme de Hasse dans le sens croissant pour le poset : $u \to v$ implique $u \leq v$. On va aussi utiliser la notation $u \lhd v$ pour la relation de couverture.

Par exemple, pour le treillis de Tamari $\mathbf{Tam}_3$ ayant un diagramme de Hasse en forme de pentagone, on trouve

$$D_{\mathbf{Tam}_3}(a, \overline{a}) = a^2 + 3a\overline{a} + \overline{a}^2.$$

Pour un produit cartésien de posets $P \times Q$, le polynôme $D_{P \times Q}$ est le produit des polynômes D_P et D_Q. Le polynôme $D_{P^\star}$ pour le poset dual $P^\star$ est

$$D_{P^\star}(a, \overline{a}) = D_P(\overline{a}, a).$$

Le polynôme D_P est donc symétrique en a et $\overline{a}$ lorsque le poset P est auto-dual.

En général, le polynôme D_P n'est pas homogène et ne présente pas de régularité visible au niveau de son support. Par exemple pour l'ordre de Bruhat sur le groupe symétrique, rien ne saute aux yeux.

À chaque poset P, on peut par ailleurs associer le poset de ses intervalles $\mathrm{Int}(P)$. C'est un ordre partiel sur l'ensemble des paires (u, v) avec $u \leq v$ dans P, donné par la relation $(u, v) \leq (u', v')$ si et seulement si $u \leq u'$ et $v \leq v'$. Les couvertures d'un intervalle (u, v) sont soit de la forme (u', v) pour u' une couverture de u dans P qui reste inférieure à v, soit de la forme (u, v') pour une couverture quelconque v' de v dans P.

Le poset des intervalles $\mathrm{Int}(P^\star)$ du poset dual $P^\star$ est le dual du poset des intervalles de P. Le poset des intervalles d'un produit cartésien $P \times Q$ est le produit cartésien des posets d'intervalles de P et de Q.

Dans le cas d'un poset d'intervalles, on peut raffiner le polynôme $D_{\mathrm{Int}(P)}$ en introduisant quatre variables $x, y, \overline{y}, \overline{x}$ qui correspondent respectivement à quatre types d'arêtes incidentes au sommet (u, v) dans le diagramme de Hasse de $\mathrm{Int}(P)$:

— x : arête sortante $(u, v) \lhd (u', v)$ avec $u \lhd u' \leq v$,
— y : arête sortante $(u, v) \lhd (u, v')$ avec $v \lhd v'$,
— $\overline{y}$: arête entrante $(u', v) \lhd (u, v)$ avec $u' \lhd u$,
— $\overline{x}$: arête entrante $(u, v') \lhd (u, v)$ avec $u \leq v' \lhd v$.

On définit donc ainsi un polynôme $\mathbb{D}_P(x, y, \overline{y}, \overline{x})$ en 4 variables, comme la somme sur l'ensemble des intervalles des monômes $x^\star y^\star \overline{y}^\star \overline{x}^\star$ dont les puissances décrivent les arêtes entrantes et sortantes pour un intervalle (u, v).

Le polynôme associé au poset dual $P^\star$ est donné par

$$\mathbb{D}_{P^\star}(x, y, \overline{y}, \overline{x}) = \mathbb{D}_P(\overline{x}, \overline{y}, y, x).$$

Lorsque le poset P est auto-dual, le poset $\mathrm{Int}(P)$ l'est aussi et le polynôme $\mathbb{D}_P(x, y, \overline{y}, \overline{x})$ est invariant sous l'involution $x \leftrightarrow \overline{x}$ et $y \leftrightarrow \overline{y}$.

Pour un produit cartésien de posets $P \times Q$, le polynôme $\mathbb{D}_{P\times Q}$ est le produit des polynômes $\mathbb{D}_P$ et $\mathbb{D}_Q$.

On retrouve bien sûr le polynôme plus simple en deux variables $a, \overline{a}$ par la substitution

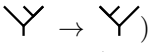
$$D_{\mathrm{Int}(P)}(a, \overline{a}) = \mathbb{D}_P(a, a, \overline{a}, \overline{a}).$$

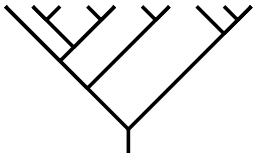
Convention : par abus de notation, on dira qu'un intervalle (u, v) dans P est de degré d par rapport à un sous-ensemble de $\{x, y, \overline{y}, \overline{x}\}$ si le monôme correspondant dans $\mathbb{D}_P$ est de degré total d par rapport à cet ensemble de variables.

2 Le cas des treillis de Tamari

Les treillis de Tamari et leurs intervalles ont fait l'objet de nombreuses recherches récentes, voir entre autres articles [CCP14, Cha07, BMCPR13, BMFPR11, BB09, FPR17, PRV17] et le volume [MHPS12].

On va utiliser les conventions suivantes pour les treillis de Tamari $\mathbf{Tam}_n$. Le treillis $\mathbf{Tam}_n$ est vu comme un ordre partiel sur les arbres binaires plans avec n sommet internes et $n+1$ feuilles, qu'on va dessiner comme dans la figure ci-dessous. On utilisera le mot *sommet* pour signifier sommet interne. Les arbres binaires plans ont leur racine (qui est un sommet interne) en bas et croissent vers le haut. L'arbre minimum est le peigne droit (dont aucun sommet n'a de fils gauche), l'arbre maximum est le peigne gauche (dont aucun sommet n'a de fils droit). La relation d'ordre est la clôture transitive de la relation de couverture,

qui est la rotation des arbres binaires plans (dans le sens  $\rightarrow$). On rappelle que le poset $\mathbf{Tam}_n$ est auto-dual, par le biais du renversement gauche-droite des arbres binaires. La *canopée* d'un arbre binaire à $n+1$ feuilles est un suite de $n+1$ lettres L ou R, chaque lettre décrivant l'orientation d'une feuille, les feuilles étant considérées de gauche à droite. Par exemple, l'arbre binaire



a pour canopée $(L, L, R, L, R, L, R, L, L, R)$.

On observe, en calculant les premiers polynômes $D_{\mathrm{Int}(\mathbf{Tam}_n)}(a, \overline{a})$, la propriété remarquable que leur support (ensemble des monômes) forme un triangle

$$\{(i, j) \mid i + j \geq n - 1, i \leq n - 1, j \leq n - 1\}.$$

Voici les premiers de ces triangles pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (avec l'origine des coordonnées en bas à gauche) :

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ & 3 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 4 \\ & 6 & 16 & 11 \\ & & 6 & 6 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 35 & 36 & 9 \\ & 10 & 50 & 86 & 36 \\ & & 20 & 50 & 35 \\ & & & 10 & 10 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme raffiné $\mathbb{D}_n = \mathbb{D}_{\mathbf{Tam}_n}$ est encore plus remarquable, d'abord par la symétrie ternaire suivante, inattendue.

Théorème 2.1

(A) Le polynôme $\mathbb{D}_n(x, y, \overline{y}, 1)$ est totalement symétrique en $x, y, \overline{y}$.

(B) Le polynôme $\mathbb{D}_n(1, y, \overline{y}, \overline{x})$ est totalement symétrique en $y, \overline{y}, \overline{x}$.

Les deux énoncés (A) et (B) sont équivalents par l'invariance connue sous l'involution (provenant de l'auto-dualité de $\mathbf{Tam}_n$) qui échange x avec $\overline{x}$ ainsi que y avec $\overline{y}$. Il n'y a aucune raison *a priori* d'attendre une symétrie totale entre x, y et $\overline{y}$. *A posteriori*, on peut soupçonner que la bijection connue avec les triangulations [BB09] pourrait expliquer cette symétrie ternaire. La preuve de ce théorème passe par l'obtention d'une équation algébrique pour la série génératrice des $\mathbb{D}_n(x, y, \overline{y}, 1)$ dans la section 3.3.

Comme conséquence de ce théorème, les paires de variables

$$(x, y), (x, \overline{y}), (y, \overline{y}), (y, \overline{x}), (\overline{y}, \overline{x})$$

ont toutes la même double-distribution. Dans la section 5, on identifie cette double-distribution avec celle de deux paramètres décrivant les canopées des intervalles de Tamari. La double-distribution pour la paire $(x, \overline{x})$ est très différente, presque diagonale.

Une autre symétrie de $\mathbb{D}_n$ reste à démontrer.

Conjecture 2.2 *Le polynôme $\mathbb{D}_n$ est symétrique par échange de x et $\overline{x}$. Il est aussi symétrique par échange de y et $\overline{y}$.*

Les deux parties de l'énoncé sont équivalentes du fait de l'invariance connue sous l'échange simultané de $x \leftrightarrow \overline{x}$ et $y \leftrightarrow \overline{y}$. Cet énoncé a été vérifié expérimentalement jusqu'à $n = 8$ inclus. Il échappe aux techniques de preuves utilisées ici, car on ne dispose pas d'équations catalytiques pour la série génératrice tenant compte des 4 variables $x, y, \overline{y}, \overline{x}$. Il semble tentant de chercher un involution pour démontrer cette conjecture. Un calcul pour $n = 6$ montre qu'une telle involution ne peut pas préserver la longueur des chaînes maximales dans les intervalles.

Un sous-ensemble remarquable des intervalles de $\mathbf{Tam}_n$ est formé par les intervalles synchrones, qui sont ceux où la canopée du minimum est égale à la canopée du maximum. Cet ensemble a le même cardinal que les permutations triables-par-deux-piles dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ [FPR17] (voir A139).

Théorème 2.3 *Les intervalles synchrones dans $\mathbf{Tam}_n$ sont exactement les intervalles de $\mathbf{Tam}_n$ de degré $n-1$ en $(y, \overline{y})$.*

La preuve sera donnée dans la section 3.4.

Par l'égalité des double-distributions mentionnée plus haut, on a donc au total 5 sous-ensembles d'intervalles de $\mathbf{Tam}_n$ de même cardinal que les permutations triables-par-deux-piles, lorsque le degré en $(x, y), (x, \overline{y}), (y, \overline{y}), (y, \overline{x})$ ou $(\overline{y}, \overline{x})$ est $n - 1$.

La distribution induite, par exemple celle des variables (x, y) sur les intervalles de degré $n - 1$ en (x, y) semble être identique à celle des permutations triables-par-deux-piles selon une statistique connue (voir A82680).

3 Séries génératrices

On va chercher une équation fonctionnelle pour la série génératrice des $\mathbb{D}_n(x, y, \overline{y}, 1)$, puis montrer que ceci implique que cette série génératrice est algébrique et enfin observer la symétrie ternaire sur l'équation algébrique obtenue.

3.1 Description combinatoire

On va utiliser comme série génératrice une série formelle en la variable t (qui compte le nombre de sommets dans les arbres binaires plans) à coefficients dans $\mathbf{Q}[u, v, x, y, \overline{y}]$. Ici u et v sont 2 variables catalytiques (auxiliaires), qui sont utiles (et même nécessaires) pour écrire les équations fonctionnelles.

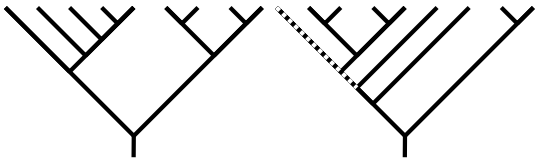
Tout arbre binaire S dans $\mathbf{Tam}_n$ admet une unique décomposition par découpage le long de son bord gauche. Plus précisément, S admet une unique décomposition maximale de la forme $S_0/S_1/\ldots/S_\ell$, où l'opération associative S_i/S_j est la greffe de la racine de S_i sur la feuille la plus à gauche de S_j. On dit que S est *indécomposable* lorsque cette décomposition est triviale ($\ell = 0$).

Soit S un arbre binaire dans $\mathbf{Tam}_n$ avec une décomposition maximale comme ci-dessus, de la forme $S_0/S_1/\ldots/S_\ell$. On peut lui associer une composition $\mathcal{C}(S)$ qui est la liste $(n_0, n_1, \ldots, n_\ell)$ des nombres de sommets des arbres binaires S_i. Pour l'arbre dessiné au début de la section 2, la composition $\mathcal{C}(S)$ est $(4, 2, 3)$.

Si $S \leq T$ dans $\mathbf{Tam}_n$, la composition $\mathcal{C}(S)$ est plus grossière que la composition $\mathcal{C}(T)$. Il suffit de le voir pour une couverture $S \lhd T$ dans $\mathbf{Tam}_n$; dans ce cas la propriété découle de la description des couvertures par rotation  des arbres binaires.

En particulier, soit k_S le dernier nombre dans la composition $\mathcal{C}(S)$. C'est le nombre de sommets du dernier terme (celui qui contient la racine) dans la décomposition par découpage le long du bord gauche de S.

Il existe alors une unique partition de l'ensemble des arêtes du bord gauche de T en une partie U (en bas) et une partie V (en haut) telle que l'arbre (contenant la racine) obtenu en coupant au milieu de l'arête inférieure de V ait exactement k_S sommets.



Voici une illustration de cette description avec S à gauche de composition $\mathcal{C}(S) = (4, 4)$ et T à droite de composition $\mathcal{C}(T) = (4, 1, 1, 2)$, et la partie V du bord de T en pointillés.

On va utiliser la variable u pour tenir compte de la taille de U et la variable v pour tenir compte de la taille de V.

On va maintenant se servir de la même description récursive des intervalles de $\mathbf{Tam}_n$ que dans [Cha07], auquel le lecteur pourra se reporter pour davantage de détails.

On dit qu'un intervalle (S, T) est *indécomposable* lorsque S est indécomposable. Tout intervalle admet une unique écriture sous la forme

$$(S_0/S_1/\ldots/S_\ell, T_0/T_1/\ldots/T_\ell)$$

où (S_i, T_i) est un intervalle indécomposable pour tout i. Ceci résulte du fait que la composition $\mathcal{C}(S)$ est plus grossière que $\mathcal{C}(T)$. Dans cette situation, l'intervalle (S, T) est isomorphe au produit cartésien des intervalles (S_i, T_i).

Tout intervalle indécomposable (S, T) dans $\mathbf{Tam}_n$ pour $n \geq 2$ s'obtient de manière unique à partir d'un intervalle (S', T') dans $\mathbf{Tam}_{n-1}$ par la procédure suivante. L'arbre S s'obtient en ajoutant à S' une feuille qui vient s'attacher à gauche sur l'arête située sous la racine de S'. On note le résultat $Y \backslash S'$. L'arbre T s'obtient en ajoutant à T' une feuille qui vient s'attacher à gauche sur une des arêtes du bord gauche de T'. On note $Y * T'$ l'ensemble des arbres obtenus ainsi. Si a est une arête du bord de T', one note $Y *_a T'$ l'arbre obtenu en ajoutant à gauche une feuille sur l'arête a. Le nombre d'intervalles (S, T) ainsi construits à partir d'un intervalle (S', T') fixé est donc égal au nombre d'arêtes du bord gauche de T'.

Ces deux décompositions donnent une description récursive complète des intervalles de Tamari. Il reste à comprendre le comportement des paramètres qui nous intéressent dans ces décompositions.

On utilise deux séries génératrices :
— la série Θ pour les intervalles indécomposables,

— la série Φ pour tous les intervalles.

On va utiliser la description alternative suivante des statistiques contrôlées par les variables $x, y, \overline{y}$, qui résulte directement de la description des couvertures dans $\mathbf{Tam}_n$ par la rotation des arbres binaires plans. Pour un intervalle (S, T), la puissance de de y est le nombre d'arêtes internes de T de direction / et celle de $\overline{y}$ est le nombre d'arêtes internes de S de direction \. La puissance de x est plus subtile, bornée par le nombre d'arêtes internes de S de direction /, mais sous la condition que la rotation de S associée à cette arête donne un arbre inférieur à T.

Proposition 3.1 *On a les équations fonctionnelles :*

$$\Phi(u, v) = \Theta(u, v) + \overline{y}\Phi(v, v)\Theta(u, v)/v, \tag{1}$$

et

$$\Theta(u, v) = tv\Big(u + yu\frac{\Phi(u, 1) - \Phi(1, 1)}{u - 1} + xyu\frac{\Phi(u, u) - \Phi(u, 1)}{u - 1} + (x - xy)\Phi(u, u)\Big). \tag{2}$$

Preuve. La première équation (1) s'obtient par découpage d'un intervalle (S, T) le long du bord gauche. Un intervalle est soit indécomposable, soit de la forme $(S_0/S_1, T_0/T_1)$ avec (S_0, T_0) un intervalle et (S_1, T_1) un intervalle indécomposable.

Lorsque l'intervalle (S, T) est indécomposable, on a le premier terme du membre de droite de (1).

Sinon, on ajoute une arête interne d'orientation \ le long des bords gauches de S et de T. On obtient donc un facteur $\overline{y}$ supplémentaire, et il n'y a pas de facteur x ou y à ajouter. En ce qui concerne le découpage du bord gauche de T en deux parties U et V, il doit nécessairement se produire dans le facteur T_1. On doit aussi diviser par v pour tenir compte de la greffe, qui supprime une arête du bord gauche. Ceci donne le second terme du membre de droite de (1).

La preuve de la seconde équation (2) est plus compliquée. Le premier terme tuv correspond à l'unique intervalle dans $\mathbf{Tam}_1$, qui est bien indécomposable. Les trois autres termes correspondent à la distinction de plusieurs cas pour les intervalles indécomposables (S, T) avec $S = Y\backslash S'$ et T dans $Y * T'$. Il faut étudier les arêtes internes nouvelles dans $Y\backslash S'$ et $Y * T'$ avec soin, en fonction de l'endroit où se greffe la nouvelle arête sur le bord gauche de T'.

On peut d'abord comprendre le rôle de la variable v en facteur. Comme S est indécomposable, la composition $\mathcal{C}_S$ a une seule part. Seule l'arête supérieure du bord gauche de T est donc dans V, ce qui correspond au facteur v dans le membre de droite de (2).

La construction de S et T à partir de S' et T' ajoute des arêtes internes. Dans S, on obtient toujours une arête interne d'orientation / en plus sous la racine de S'. Elle peut contribuer éventuellement à un facteur x (voir ci-après), mais aucun facteur $\overline{y}$ n'intervient. Dans T, on ajoute en général une arête interne d'orientation /, sauf lorsque la nouvelle feuille vient se greffer tout en haut du bord gauche de T' qui donne une arête interne d'orientation \ en plus. On aura donc un facteur y pour tous les arbres T dans $Y * T'$ sauf pour l'arbre Y/T'. Cette distinction donne lieu à un terme correctif, le dernier terme dans le membre de droite de (2).

Il reste à comprendre le comportement de la variable x. C'est le point le plus subtil. On se donne donc un intervalle indécomposable (S,T) avec $S = Y\backslash S'$ et T obtenu par ajout d'une feuille à T', qui se greffe sur l'arête a du bord gauche de T'.

Si T est un arbre et a une arête du bord gauche de T, on note $k_a(T)$ le nombre de sommets dans le sous-arbre de T (contenant la racine de T) obtenu en coupant l'arête a.

On a besoin de la description précise suivante de l'intervalle (S,T) (implicite dans [Cha07, §4]). Les éléments de cet intervalle sont exactement les arbres $R = Y *_b R'$ obtenus à partir d'un élément R' dans l'intervalle (S',T') en ajoutant une feuille qui se greffe sur l'arête b du bord gauche de R', sous la condition que $k_b(R') \leq k_a(T')$. Les couvertures dans l'intervalle (S,T) sont de deux types. Le premier type de couverture (type I) est un changement de l'arête b vers l'arête b' située juste en dessus, si $k_{b'}(R') \leq k_a(T')$. Le second type de couvertures (type II) provient d'une couverture $R' \lhd R''$ dans l'intervalle (S',T'). Une telle couverture peut modifier le coté gauche de R', mais il existe toujours une unique arête c du bord gauche de R'' telle que $k_c(R'') = k_b(R')$. Cette arête c donne la couverture $(Y *_b R') \lhd (Y *_c R'')$ dans (S,T).

En utilisant cette description, on peut comprendre quelles couvertures de S restent inférieures à T, parmi toutes les couvertures associées aux arêtes $\backslash$ de S. Ce sont d'une part des couvertures provenant directement des couvertures de S' qui restent inférieures à T' (type II) et d'autre part les couvertures de S où la rotation se produit en la racine de S (type I). Si on effectue une telle rotation vers un arbre dans (S,T), on voit que la valeur correspondante de $k_b(R')$ est égale au dernier terme $k(S')$ de la composition $\mathcal{C}(S')$, ce qui est possible si est seulement si $k(S') \leq k_a(T')$.

On voir donc qu'une nouvelle couverture de type x apparaît (en plus des couvertures de ce type héritées de (S',T')) si et seulement si la construction de T se fait en attachant une arête a dans la partie V du bord de T'. Cette distinction donne lieu aux deux termes avec division par $u-1$ dans le membre de droite de (2), qui correspondent aux cas $a \in U$ et $a \in V$. ■

Remarque 3.2 *Si on spécialise le système (1), (2) en $x = 1$, on peut passer à un seul paramètre catalytique (en identifiant u et v, on retombe sur le paramètre catalytique usuel pour les intervalles de Tamari). Par contre, si on spécialise en $y = 1$, on a quand même besoin de u et v, mais c'est une équation du même type un peu plus simple. On peut aussi spécialiser en $\overline{y} = 1$ sans aucune difficulté.*

Remarque 3.3 *À la place de (1), on peut utiliser*

$$\Phi(u,v) = \Theta(u,v) + \overline{y}\Theta(v,v)\Phi(u,v)/v, \tag{3}$$

qui se démontre facilement de manière combinatoire.

Remarque 3.4 *En fait, on peut se débarrasser de la variable v en faisant d'une part $v = 1$ et d'autre part $v = u$ dans les équation (1) et (2). Ça permet de se ramener à un système de deux équations en $\Phi(u,u)$, $\Phi(u,1)$ et $\Phi(1,1)$ dont*

$$(u + \overline{y}\Phi(u,u))\Phi(u,1) = \Phi(u,u)(1 + \overline{y}\Phi(1,1)). \tag{4}$$

Ceci sert de point de départ pour montrer l'algébricité, voir la section 3.3.

Les premiers termes de $\Phi(u,v)$ et $\Theta(u,v)$ sont :

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= uvt + \left(u^2vx + uv^2\overline{y} + uvy\right)t^2 \\ &\quad + \left(u^3vx^2 + u^3vx\overline{y} + u^2v^2x\overline{y} + uv^3x\overline{y} + u^2vxy\overline{y} + uv^3\overline{y}^2 + 2u^2vxy\right. \\ &\quad \left. + 2uv^2y\overline{y} + uvxy + uvy^2 + uvy\overline{y}\right)t^3 + O(t^4) \\ \Theta(u,v) &= uvt + \left(u^2vx + uvy\right)t^2 \\ &\quad + \left(u^3vx^2 + u^3vx\overline{y} + u^2vxy\overline{y} + 2u^2vxy + uvxy + uvy^2 + uvy\overline{y}\right)t^3 + O(t^4)\end{aligned}$$

et en $(u,v) = (1,1)$:

$$\begin{aligned}\Phi(1,1) &= t + (x + y + \overline{y})\,t^2 + \left(xy\overline{y} + x^2 + 3xy + y^2 + 3x\overline{y} + 3y\overline{y} + \overline{y}^2\right)t^3 + O(t^4) \\ \Theta(1,1) &= t + (x + y)\,t^2 + \left(xy\overline{y} + x^2 + 3xy + y^2 + x\overline{y} + y\overline{y}\right)t^3 + O(t^4)\end{aligned}$$

On va montrer dans la section 3.3 qu'une fois oubliés les paramètres catalytiques u et v, la série $\Phi(1,1)$ est totalement symétrique en x, y et $\overline{y}$.

3.2 q-analogue

Un autre paramètre important sur les intervalles de Tamari est la longueur de la plus grande chaîne entre le minimum et le maximum d'un intervalle, c'est-à-dire le nombre maximal de rotations nécessaires pour passer du minimum au maximum. Ce paramètre est aussi appelé le nombre d'inversions de cet intervalle.

On peut facilement ajouter le paramètre q pour la longueur de la plus grande chaîne dans les équations (1) et (2) avec $x, y, \overline{y}, u, v$.

L'équation (1) pour Φ reste inchangée, car la puissance de q est additive pour ce type de décomposition. Pour l'équation (2), on trouve

$$\Theta(u,v) = tv\Big(u + yu\frac{\Phi(qu,1) - \Phi(1,1)}{qu-1} + xyu\frac{\Phi(qu,qu) - \Phi(qu,1)}{qu-1} + \frac{x-xy}{q}\Phi(qu,qu)\Big). \quad (5)$$

Par auto-dualité du poset de Tamari, q a la même double-distribution avec $\overline{y}$ et y. La double-distribution avec x ou $\overline{x}$ est différente.

3.3 Algébricité et symétrie

On part du système suivant, forme équivalente au système de 4 équations obtenues en faisant $v = 1$ et $v = u$ dans (1), (2), suivi d'une élimination des Θ :

$$\Phi_{uu}(1 + \overline{y}\Phi_{11}) = \Phi_{u1}(u + \overline{y}\Phi_{uu}) \quad (6)$$

$$\Phi_{u1} = t(1 + \overline{y}\Phi_{11})\left(u + yu\frac{\Phi_{u1} - \Phi_{11}}{u-1} + xyu\frac{\Phi_{uu} - \Phi_{u1}}{u-1} + (x - xy)\Phi_{uu}\right) \quad (7)$$

avec des notations abrégées pour les diverses spécialisations des paramètres u et v dans la série Φ.

On élimine alors Φ_{u1} puis on factorise, pour obtenir une équation de type catalytique standard (avec une seule variable catalytique) pour Φ_{uu} de la forme $P(\Phi_{uu}, \Phi_{11}, t, u) = 0$ pour un certain polynôme P.

On écrit alors, en suivant [BMJ06], le système de trois équations algébriques

$$\begin{aligned} P &= 0,\\ \partial_{\Phi_{uu}} P &= 0,\\ \partial_u P &= 0. \end{aligned}$$

Par élimination de Φ_{uu} et u, ce système nous donne une équation algébrique de degré 7 en Φ_{11}. L'élimination directe étant un peu difficile, on commence par éliminer Φ_{uu} pour obtenir deux polynômes, puis on utilise leur résultant en u, qu'on doit factoriser pour obtenir la bonne équation.

On obtient ainsi une (grosse) équation polynomiale, de degré 7 en Φ_{11} et de degré 6 en t, comportant 1478 monômes et des coefficients compris entre -628 et 628. Son polytope de Newton a 109 sommets. Le terme dominant en Φ_{11} a pour coefficient

$$(x-1)(y-1)(\overline{y}-1)x^5y^5\overline{y}^5t^6. \tag{8}$$

On constate que cette équation est totalement symétrique en $x, y, \overline{y}$ et qu'elle s'écrit sous la forme

$$\Phi_{11} = t + \dots \tag{9}$$

où les termes omis sont divisibles par t et ont degré total au moins 2 par rapport aux variables (t, Φ_{11}). Il s'ensuit que cette équation a une unique solution qui est une série formelle en t, donc cette solution hérite de la symétrie ternaire. Ceci démontre le théorème 2.1. Il reste la question de trouver des involutions qui démontrent la symétrie de manière purement combinatoire.

3.4 Intervalles synchrones

On donne ici la preuve du théorème 2.3.

Preuve. D'abord, on a bien une inclusion des intervalles de degré $n-1$ en $y, \overline{y}$ dans les intervalles synchrones. En effet, imposer la restriction sur le degré en $y, \overline{y}$ revient, au vu des équations fonctionnelles (1) et (2), à exclure le terme $x\Phi(u,u)$ dans (2). Au niveau combinatoire, ceci correspond à exclure exactement le seul cas, dans la construction inductive des intervalles, où on peut sortir des intervalles synchrones : lorsqu'on rajoute sur le bord gauche du maximum une feuille tout au sommet.

Pour montrer une égalité des cardinaux, il suffit de résoudre les équations fonctionnelles restreintes. Après simplification en posant $x=1$, $y=1$, $\overline{y}=1$ et $v=u$, celles-ci sont

$$\Phi'(u,u) = \Theta'(u,u) + \Phi'(u,u)\Theta'(u,u)/u,$$

et

$$\Theta'(u,u) = tu\Big(u + u\frac{\Phi'(u,u) - \Phi'(1,1)}{u-1} - \Phi'(u,u)\Big).$$

On en déduit par les méthodes de [BMJ06] l'équation algébrique

$$\Phi_{11}^{'3}t^2 + 6\Phi_{11}^{'2}t^2 + 2\Phi_{11}^{'2}t + 12\Phi_{11}'t^2 - 10\Phi_{11}'t + 8t^2 + \Phi_{11}' - t,$$

qu'il est facile de comparer avec l'équation connue pour la série génératrice commune des permutations triables-par-deux-piles et des intervalles synchrones (voir A139). ∎

4 Diverses propriétés

On regroupe ici diverses propriétés des intervalles en général et des intervalles dans $\mathbf{Tam}_n$ en particulier, ainsi que quelques questions ouvertes.

Lemma 4.1 *Soit P un poset fini. Un intervalle (u, v) est de degré 0 en x ou en $\overline{x}$ si et seulement si cet intervalle est réduit à un point, i.e. $u = v$.*

Preuve. Si l'intervalle réduit à un élément, il n'existe clairement aucune arête de type x ou $\overline{x}$ dans le diagramme de Hasse. Réciproquement, si l'intervalle n'est pas réduit à un point, on peut trouver un chemin de u à v, donc des couvertures de type x et $\overline{x}$. ■

Lemma 4.2 *Soit P un poset fini. Un intervalle (u, v) est de degré 0 en y (resp. en $\overline{y}$) si et seulement si v est un élément maximal du poset P (resp. u un élément minimal)*

Preuve. C'est immédiat, le degré en y étant simplement le nombre d'arêtes sortantes de v dans le diagramme de Hasse de P. Idem pour le degré en $\overline{y}$ et les arêtes entrantes en u. ■

Lemma 4.3 *Pour le treillis de Tamari $\mathbf{Tam}_n$, le degré de $\mathbb{D}_n$ par rapport à $(x, \overline{y})$ ou $(y, \overline{x})$ est au plus $n - 1$. C'est aussi vrai pour le degré par rapport à (x, y), $(\overline{x}, \overline{y})$ et $(y, \overline{y})$. Le degré de $\mathbb{D}_n$ par rapport à chacune des variables $x, y, \overline{y}, \overline{x}$ est au plus $n - 1$.*

Preuve. Le premier point résulte du fait bien connu que le diagramme de Hasse de $\mathbf{Tam}_n$ est le graphe des sommets et des arêtes de l'associaèdre de dimension $n - 1$, qui est un polytope régulier. Le second point résulte du premier et du théorème 2.1. Le dernier point est une conséquence du premier. ■

Proposition 4.4 *Pour le treillis de Tamari $\mathbf{Tam}_n$, le degré en $(x, y, \overline{y})$ d'un monôme de $\mathbb{D}_n$ est au moins $n - 1$. Le cardinal de l'ensemble des intervalles de degré $n - 1$ en $(x, y, \overline{y})$ est le nombre de cartes enracinés bicubiques, donné par la suite A257.*

Preuve. La borne inférieure s'obtient par récurrence en utilisant la forme des équations fonctionnelles (1) et (2) pour montrer simultanément le même énoncé pour Φ et Θ.

Pour obtenir le cardinal, on réduit les équations fonctionnelles en imposant la contrainte voulue sur le degré et en posant $x = 1$, $y = 1$ et $\overline{y} = 1$:

$$\Phi''(u, v) = \Theta''(u, v) + \Phi''(v, v)\Theta''(u, v)/v, \tag{10}$$

et

$$\Theta''(u, v) = tv\Big(u + u\frac{\Phi''(u, 1) - \Phi''(1, 1)}{u - 1} + \Phi''(u, u)\Big). \tag{11}$$

Pour en déduire une équation algébrique pour $\Phi''(1, 1)$, on procède comme dans la section 3.3. On spécialise ces deux équations en $v = 1$ et $v = u$, obtenant ainsi 4 équations. On élimine $\Theta''(u, 1)$, $\Theta''(u, u)$ et $\Phi''(u, 1)$ pour obtenir une équation

catalytique usuelle sous la forme d'un polynôme en $\Phi''(u,u), \Phi''(1,1), t, u$. On en déduit par les méthodes de [BMJ06], l'équation algébrique

$$16\Phi''^2_{11}t^2 + 24\Phi''_{11}t^2 - 12\Phi''_{11}t + 9t^2 + \Phi''_{11} - t, \tag{12}$$

qu'on peut aisément comparer à celle connue pour la série génératrice de la suite A257. ■

Remarque 4.5 *On peut aussi obtenir par une restriction similaire des équations fonctionnelles pour l'ensemble des intervalles qui sont à la fois de degré $n-1$ en $(y,\overline{y})$ et de degré $n-1$ en $(x,\overline{y})$.*

4.1 Questions ouvertes sur la distribution en $\{x, y, \overline{y}, \overline{x}\}$

Question : peut-on écrire une équation catalytique pour la série complète en $x, y, \overline{y}, \overline{x}$?

Conjecture 4.6 *Les seuls intervalles de degré $n-1$ en $(x,y,\overline{y},\overline{x})$ sont les intervalles simples (S,S).*

Les intervalles simples ont clairement ce degré, parce que le diagramme de Hasse est un graphe régulier.

Conjecture 4.7 *Le nombre d'intervalles de degré $n-1$ en (x,y) et de degré $n-1$ en $(\overline{x},\overline{y})$ est un nombre de Motzkin (A1006).*

L'ensemble d'intervalles correspondant contient clairement l'intervalle formé par $\mathbf{Tam}_n$ tout entier. Il semble que le poset induit par $\mathrm{Int}(\mathbf{Tam}_n)$ sur cet ensemble d'intervalles soit une antichaine.

Proposition 4.8 *Le nombre d'intervalles de degré $n-1$ en $(x,\overline{y})$ et de degré $n-1$ en $(\overline{x},y)$ est un nombre de Motzkin.*

Cet énoncé est équivalent au précédent modulo la conjecture 2.2.

4.2 Racines réelles négatives

Parmi les manières de spécialiser en 1 certaines des variables dans $\mathbb{D}_n$ pour obtenir un polynôme en une variable, il semble s'en trouver trois types (modulo les symétries de $\mathbb{D}_n$) qui donnent des polynômes ayant seulement des racines réelles négatives : ce sont $\mathbb{D}_n(z,1,1,1)$, $\mathbb{D}_n(z,z,1,1)$, $\mathbb{D}_n(z,z,z,1)$.

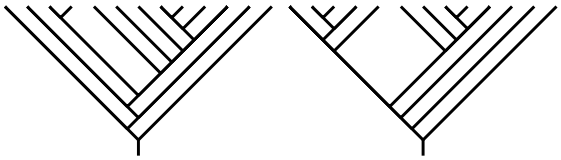
On peut aussi extraire d'autres polynômes en une variable par restriction à des sous-ensembles. On obtient notamment ainsi les polynômes de Narayana A1263, dont on sait que les racines sont réelles négatives (voir [Brä06, §5] pour des références sur ce résultat).

On peut aussi obtenir un polynôme qui compte les permutations triables-par-deux-piles selon un paramètre, voir A82680. Le fait que ces polynômes ont seulement des zéros réels négatifs a été démontré par Brändén [Brä06, Th. 5.1].

5 Relation avec les statistiques de canopée

Une autre classe de statistiques naturelles sur les intervalles de Tamari est fournie par la description de leurs canopées.

À un intervalle de Tamari, on peut associer un mot en trois "double-lettres" LL, LR et RR. Dans ce mot, la lettre en position i décrit les orientations des feuilles en position i dans le minimum et le maximum de l'intervalle. Par exemple, l'intervalle



a pour mot associé (LL, LL, LR, RR, LR, LL, LL, LL, RR, RR, RR, RR, RR). On peut montrer (en considérant l'action de la rotation sur les canopées) que seules les trois combinaisons $(L, L), (L, R)$ et (R, R) sont possibles, d'où l'emploi de ces trois double-lettres.

Par retournement des arbres binaires plans et des intervalles, on a une symétrie évidente d'ordre 2 qui échange LL avec RR. La symétrie d'ordre 3 en $x, y, \overline{y}$ est liée à cette symétrie d'ordre 2 par la relation suivante.

Proposition 5.1 *La double-distribution selon les variables y et $\overline{y}$ coïncide avec la double-distribution selon les variables* LL *et* RR*.*

Preuve. Pour les trois paramètres LL, LR et RR décrivant les canopées, on démontre comme dans la section 3, en utilisant la même décomposition introduite dans [Cha07], les équations

$$\Phi(u) = \Theta(u) + \Phi(u)\Theta(u)/(u\mathsf{LL}), \tag{13}$$

et

$$\Theta(u) = tu\left(\mathsf{LLRR}u + u\mathsf{LL}\frac{\Phi(u) - \Phi(1)}{u-1} + (\mathsf{LR} - \mathsf{LL})\Phi(u)\right). \tag{14}$$

Comme les coefficients de ces séries sont homogènes, on peut sans perte d'information remplacer LR par 1. On peut aussi diviser tous les termes par LL RR. Les équations obtenues sont

$$\Phi(u) = \Theta(u) + \mathsf{RR}\Phi(u)\Theta(u)/u, \tag{15}$$

et

$$\Theta(u) = tu\left(u + u\mathsf{LL}\frac{\Phi(u) - \Phi(1)}{u-1} + (1 - \mathsf{LL})\Phi(u)\right). \tag{16}$$

On voit sans difficulté que ces équations sont identiques à la spécialisation de (1) et (2) en $x = 1$ et $v = u$, en identifiant les variables $\mathsf{LL} = y$ et $\mathsf{RR} = \overline{y}$.

On a donc obtenu la relation voulue entre la double-statistique $(y, \overline{y})$ et la double statistique (LL, RR). ∎

Voici un tableau de cette double-distribution pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 0 \\ 6 & 21 & 10 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 81 & 49 & 0 & 0 \\ 10 & 65 & 81 & 20 & 0 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 5.2 *On ne peut pas espérer une expression simple sous forme de produit de coefficients binomiaux pour les coefficients de cette double-distribution, car certains d'entre eux comportent de grands facteurs premiers (un coefficient dans* $[t^9]\Phi$ *vaut* 84089*). Il en est de même pour les coefficients de la triple-distribution en* $x, y, \overline{y}$ *avec par exemple un coefficient* 18691 *dans* $[t^9]\Phi$*.*

Références

[BB09] Olivier Bernardi and Nicolas Bonichon. Intervals in Catalan lattices and realizers of triangulations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 116(1) :55–75, 2009.

[BMCPR13] Mireille Bousquet-Mélou, Guillaume Chapuy, and Louis-François Préville-Ratelle. The representation of the symmetric group on m-Tamari intervals. *Adv. Math.*, 247 :309–342, 2013.

[BMFPR11] Mireille Bousquet-Mélou, Éric Fusy, and Louis-François Préville-Ratelle. The number of intervals in the m-Tamari lattices. *Electron. J. Combin.*, 18(2) :Paper 31, 26, 2011.

[BMJ06] Mireille Bousquet-Mélou and Arnaud Jehanne. Polynomial equations with one catalytic variable, algebraic series and map enumeration. *J. Combin. Theory Ser. B*, 96(5) :623–672, 2006.

[Brä06] Petter Brändén. On linear transformations preserving the Pólya frequency property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(8) :3697–3716, 2006.

[CCP14] Frédéric Chapoton, Grégory Châtel, and Viviane Pons. Two bijections on Tamari intervals. In *26th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2014)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AT, pages 241–252. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2014.

[Cha07] Frédéric Chapoton. Sur le nombre d'intervalles dans les treillis de Tamari. *Sém. Lothar. Combin.*, 55 :Art. B55f, 18, 2005/07.

[FPR17] Wenjie Fang and Louis-François Préville-Ratelle. The enumeration of generalized Tamari intervals. *European J. Combin.*, 61 :69–84, 2017.

[MHPS12] Folkert Müller-Hoissen, Jean Marcel Pallo, and Jim Stasheff, editors. *Associahedra, Tamari lattices and related structures*, volume 299 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser/Springer, Basel, 2012. Tamari memorial Festschrift.

[PRV17] Louis-François Préville-Ratelle and Xavier Viennot. The enumeration of generalized Tamari intervals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(7) :5219–5239, 2017.