

Identification haute résolution de nombres d'ondes pour la caractérisation des stratifiés anisotropes

Pierre Margerit, Arthur Lebée, Jean-François Caron, Kerem Ege, Xavier Boutillon

▶ **To cite this version:**

Pierre Margerit, Arthur Lebée, Jean-François Caron, Kerem Ege, Xavier Boutillon. Identification haute résolution de nombres d'ondes pour la caractérisation des stratifiés anisotropes. Journées Nationales sur les Composites 2017, École des Ponts ParisTech (ENPC), Jun 2017, 77455 Champs-sur-Marne, France. pp.151985. hal-01621542

HAL Id: hal-01621542
https://hal.science/hal-01621542

Submitted on 23 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse haute résolution de nombres d'ondes (HRWA) pour la caractérisation des stratifiés anisotropes

High-Resolution Wavenumber Analysis (HRWA) for anisotropic laminates characterization

Pierre Margerit[1], Arthur Lebée[1], Jean-François Caron[1], Kerem Ege[2] et Xavier Boutillon[3]

1 : UMR 8205, Laboratoire NAVIER
Ecole des Ponts, Université Paris-Est
6-8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Champs-sur-Marne
e-mails : pierre.margerit@enpc.fr , arthur.lebee@enpc.fr et jean-francois.caron@enpc.fr

2 : Univ Lyon, INSA-Lyon, LVA EA677, F-69621 Villeurbanne, France
e-mail : kerem.ege@insa-lyon.fr

3 : CNRS UMR 7649, Laboratoire de Mécanique des Solides
Département de mécanique, École Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
e-mail : boutillon@lms.polytechnique.fr

Résumé

Une méthode originale d'extraction haute résolution de nombres d'onde (HRWA pour *High Resolution Wavenumber Analysis*), qui permet la caractérisation large bande et locale du comportement viscoélastique linéaire de plaques composites anisotropes, est présentée. Cette méthode, indépendante des conditions aux limites et du type d'excitation, est héritée de méthodes de traitement du signal, ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) et ESTER (*ESTimation of ERror*), robustes et complètement automatisées. L'implémentation de la méthode HRWA est développée. Trois cas de mesure sur échantillons sont présentés et permettent de montrer les différents potentiels de la méthode. On montre la possibilité d'identifier différents types d'onde (de flexion, de compression, de cisaillement) sur une même mesure. Un phénomène de *band-gap* est identifié sur un sandwich nid d'abeille. Les différentes directions de fibres dans une plaque à anisotropie variable sont identifiées.

Abstract

A new method, called HRWA for *High Resolution Wavenumber Analysis* is presented. It permits the wide-band and local identification of linear viscoelastic behavior of anisotropic plates. It is independent from the boundary conditions or the excitation type. Inherited from ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) and ESTER (*ESTimation of ERror*) signal processing methods, it is robust and fully automated. The HRWA implementation is developped. Three main experimental sudy cases are presented. Different wave types (bending, shear and compression) are identified in the velocity measured field. A *band-gap* is identified on a honeycomb-core sandwich. The directions of fibres of a plate with spatially variable anisotropy are identified.

Mots Clés : Caractérisation Non Destructive, Méthodes Haute Résolution, Propagation des Ondes
Keywords : Non-Destructive Characterisation, High-Resolution Methods, Wave Propagation

1. Introduction

Les composites, de par leur comportement mécanique complexe et la liberté de fabrication qu'ils offrent, amènent de nouvelles problématiques concernant leur caractérisation. De nombreuses applications, allant du suivi de process industriel au remplacement des matériaux classiques par des composites, en passant par l'optimisation des structures, nécessitent en effet une caractérisation fine des propriétés structurelles du matériau fabriqué.

La caractérisation du comportement linéaire en dynamique des composites reçoit une forte attention de la part de la communauté scientifique, entrainant l'amélioration des techniques de contrôle non destructif. Parmi celles-ci, on peut citer l'analyse modale ou encore le contrôle par ultrasons. Ces deux méthodes possèdent des domaines de validité très distincts, la première étant limitée aux basses fréquences et la deuxièmes aux hautes fréquences. Ces dernières années, l'apparition de moyens permettant la mesure sur des maillages fins (caméras haute-vitesse, vibromètre laser à balayage, etc.)

ont permis le développement de méthodes *moyennes fréquences* [1][2][3]. Certaines de ces méthodes se basent sur l'étude de la propagation d'ondes planes dans les structures. On postule alors que le champ mesuré est formé par une somme discrète d'ondes planes , celles-ci respectant les lois de dispersion données par l'opérateur d'équilibre linéaire homogène local. Ces méthodes permettent donc de s'affranchir des conditions aux limites et des types d'excitation.
La méthode HRWA (pour *High-Resolution Wavenumber Analysis*) présentée ici s'intéresse également à l'extraction des ondes planes présentes dans un champ mesuré. Elle fait partie de la famille des méthodes de Prony, qui se basent sur son observation originale de 1795 [4] au sujet de la relation entre différentes mesures d'un signal composé de pôles complexes, sur un maillage de points réguliers. Ces méthodes sont dites *haute résolution*, dans le sens où elles permettent d'outrepasser les limitations de la transformée de Fourier dues à la taille de la fenêtre d'étude (principe d'incertitude). La méthode HRWA identifie donc un spectre discret de nombres d'onde complexes dominants dans la réponse de la structure. Elle se sert du formalisme de l'algorithme ESPRIT [5] pour extraire ces nombres d'onde par un simple problème linéaire. L'ordre du signal (nombre de raies dans le spectre) est déterminé de façon automatique grâce au critère ESTER [6]. À partir de ces nombres d'ondes et d'un modèle réduit de structure, on peut remonter au comportement viscoélastique généralisé du matériau. L'aspect haute-résolution de la méthode permet, par rapport aux méthodes existantes, d'étendre l'extraction des nombres d'onde aux basses fréquences et de réduire la taille de la fenêtre spatiale d'observation, afin de déterminer le comportement linéaire local du matériau.
Le papier est organisé en deux parties : tout d'abord, on présente succinctement la méthode HRWA et les algorithmes utilisés. On montre ensuite de nombreux résultats d'extraction de nombres d'onde expérimentaux, permettant de donner un aperçu des possibilités de la méthode proposée.

2. La méthode HRWA

La méthode HRWA (*High-Resolution Wavenumber Analysis*) est motivée par les limitations de la transformée de Fourier en terme de résolution, et le problème non-linéaire de recherche de nombres d'ondes, qu'il est nécessaire de résoudre dans les méthodes existantes [1]. Elle consiste en l'adaptation des méthodes hautes résolution ou méthodes de Prony, bien connues de la communauté de traitement du signal, à l'extraction de nombres d'ondes. Il faut noter que l'adaptation de ces méthodes à l'extraction des fréquences temporelles, contenues dans une réponse transitoire de structure, permet la résolution de modes que leur amortissement rend inaccessibles aux méthodes utilisant la FFT (analyse modale haute définition[7]).
L'observation de Prony [4], effectuée à l'origine sur un signal unidimensionnel, est maintenant généralisée aux signaux de dimension quelconque [8]. De nombreux travaux s'en inspirent [9][10][11], notamment dans la prise en compte de l'influence du bruit de mesure. L'algorithme ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)* [5], qui en fait partie, est utilisé dans la méthode HRWA. Dans le présent papier, on s'intéressera au cas des plaques uniquement, les développements qui suivent sont donc adaptés aux signaux de dimension deux. Toutefois, la dimension du signal n'est pas une limitation de la HRWA, et celle-ci est adaptée également aux poutres (1D) et solides 3D.
On postule que la réponse harmonique de la structure d'intérêt peut être représentée comme la somme u de R ondes planes, de vecteur d'onde $\mathbf{k}_r = [k_{1,r}, k_{2,r}]$, et d'un bruit b. Le nombre d'onde est complexe, afin de modéliser l'amortissement spatial de l'onde, et ses parties réelle et imaginaire ne sont pas nécessairement colinéaires. Le signal résultant $\mathbf{S}$, mesuré sur une grille de points bidimensionnelle régulière $\{\mathbf{x}_{nm}\}$, de pas $\{\Delta_1, \Delta_2\}$, peut alors être exprimé sous la forme :

$$S[n,m] = u(\mathbf{x}_{nm}) + b(\mathbf{x}_{nm}) = \sum_{r=1}^{R} a_r \, z_{1,r}^{n} \, z_{2,r}^{m} + b(\mathbf{x}_{nm}) \qquad \text{(Eq. 1)}$$

Où les a_r sont les amplitudes des ondes liées aux pôles complexes $z_{1,r} = \mathrm{e}^{\jmath k_{1,r}\Delta_1}$ et $z_{2,r} = \mathrm{e}^{\jmath k_{2,r}\Delta_2}$.

2.1. Matrices de Vandermonde et de Hankel

Le paragraphe qui suit décrit deux matrices caractéristiques de l'algorithme ESPRIT, utilisé dans la méthode HRWA.
À partir des R pôles $z_{2,r}$ liés à la dimension 2 du signal $\mathbf{S}$ de longueur L_2, on forme la matrice de Vandermonde $\mathbf{V_2}$:

$$\mathbf{V_2^{(L_2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_{2,1} & z_{2,2} & \cdots & z_{2,R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{2,1}^{L_2-1} & z_{2,2}^{L_2-1} & \cdots & z_{2,R}^{L_2-1} \end{bmatrix}_{L_2 \times R} \quad \text{(Eq. 2)}$$

La matrice de Vandermonde liée au signal complet $\mathbf{S}$ de taille $(L_1 \times L_2)$ est donc sous la forme :

$$\mathbf{V}_{(L_1 L_2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{V_2^{(L_2)}} \\ \mathbf{V_2^{(L_2)}} \cdot \mathbf{Z}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{V_2^{(L_2)}} \cdot \mathbf{Z}_1^{L_1-1} \end{bmatrix}_{L_1 L_2 \times R} \quad \text{(Eq. 3)}$$

avec $\mathbf{Z}_1 = \mathrm{diag}(\{z_{1,1}, z_{1,2}, \ldots, z_{1,R}\})$. Si le signal $\mathbf{S}$ est sans bruit et qu'on le lit par lignes $\mathbf{s} = \left[S[1,1], \ldots, S[1,L_2], S[2\right.$ il respecte exactement : $\mathbf{s} = \mathbf{V}_{(L_1 L_2)} \cdot \mathbf{a}$, avec $\mathbf{a} = \left[a_1, a_2, \ldots, a_R\right]$. Cette matrice particulière possède une propriété d'invariance par translation d'un sous-domaine, qui est utilisée dans l'algorithme ESPRIT (invariance *rotationnelle*).

À partir de la $n^{\text{ième}}$ ligne du signal $\mathbf{s}$, on peut construire la matrice de *Hankel* $\mathbf{H_{S[n,:]}}$ de la façon suivante :

$$\mathbf{H_{S[n,:]}} = \begin{bmatrix} S[n,1] & S[n,2] & \cdots & S[n,K_2] \\ S[n,2] & S[n,3] & \cdots & S[n,K_2+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S[n,N_2] & S[n,N_2+1] & \cdots & S[n,L_2] \end{bmatrix}_{N_2 \times K_2} \quad \text{(Eq. 4)}$$

où K_2, dont le rôle est discuté plus loin, définit la forme de la matrice, et $N_2 = L_2 - K_2$.
Pour le signal complet, on construit la matrice de *Hankel-Hankel-par-blocs (HbH)*, composée des matrices de Hankel formées par les lignes du signal :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H_{S[1,:]}} & \mathbf{H_{S[2,:]}} & \cdots & \mathbf{H_{S[K_1,:]}} \\ \mathbf{H_{S[2,:]}} & \mathbf{H_{S[3,:]}} & \cdots & \mathbf{H_{S[K_1+1,:]}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H_{S[L_1-K_1,:]}} & \mathbf{H_{S[2,:]}} & \cdots & \mathbf{H_{S[L_1,:]}} \end{bmatrix}_{N_1 N_2 \times K_1 K_2} \quad \text{(Eq. 5)}$$

Cette matrice HbH permet de calculer la matrice d'autocovariance du signal. On peut montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}_{(N_1 N_2)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}^*_{(K_1 K_2)} \quad \text{(Eq. 6)}$$

où $.^*$ dénote la transposée hermitienne et $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\{a_1, a_2, \ldots, a_R\})$.

2.2. Extraction des pôles du signal avec ESPRIT

Sans la prise en compte du bruit b , l'observation de Prony sur le signal "pur" u, généralisée en 2D et exprimée dans le cadre de l'algorithme ESPRIT [5][12] (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)*, formule une relation de récurrence entre les matrices de Vandermonde construites à partir de deux sous-parties du signal, pour chaque dimension $d \in \{1, 2\}$ de celui-ci :

$$\mathbf{V}^{\uparrow d}_{(L_1-1)(L_2-1)} = \mathbf{V}^{\downarrow d}_{3\,(L_1-1)(L_2-1)} \cdot \mathbf{Z}_d \quad \text{(Eq. 7)}$$

Où $\mathbf{Z}_d = \mathrm{diag}(\{z_{d,1}, z_{d,2}, \ldots, z_{d,R}\})$. Les signes $\downarrow d$ et $\uparrow d$ désignent respectivement la troncature du premier et du dernier indice dans le signal, dans la direction d. Par exemple, la matrice $\mathbf{V}^{\uparrow 1}_{(L_1-1)(L_2-1)}$ est formée à partir des $L_1 - 1$ premières lignes du signal.
Cette propriété d'invariance devient fausse en présence de bruit dans le signal. La stratégie consiste donc à travailler sur la matrice d'autocovariance $\mathbf{C_{SS}}$ du signal bruité :

$$\mathbf{C_{SS}} = \mathbf{H}^*\mathbf{H} \qquad \text{(Eq. 8)}$$

Sans bruit, cette matrice serait de rang R, ce qui devient faux en présence de bruit. Cependant, puisqu'elle représente un estimateur asymptotiquement sans biais pour l'autocovariance du signal, ses vecteurs propres sont peu sensibles à un bruit non auto-corrélé. En isolant les R vecteurs propres $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_R\}$ de $\mathbf{C_{SS}}$, liés à ses R valeurs propres dominantes, on décrit un sous-espace signal identique au sous-espace décrit par les matrices de Vandermonde.
Dans la construction de la matrice de Hankel par blocs, (Eq. 4) et (Eq. 5), on doit choisir les paramètres $\{K_d, d \in \{1, 2\}\}$ pour déterminer la forme de cette matrice. L'étude de $\mathbf{C_{SS}}$ et $\mathbf{W}$ amène la contrainte $R \leq K_1 K_2$. Kumaresan et Tufts ont proposé d'utiliser ce paramètre pour ajouter des pôles virtuels dans l'analyse, ayant pour rôle de décrire une éventuelle partie corrélée au bruit, en permettant d'en séparer l'influence sur les pôles recherchés. En pratique, la meilleure stratégie [8] consiste à choisir une forme de $\mathbf{H}$ quasi carrée, soit $K_d \approx L_d/2$.
Les matrices $\mathbf{V}_{(L_1 L_2)}$ et $\mathbf{W}$ décrivant le même sous-espace, il existe une relation de transfert entre celles-ci : $\mathbf{V}_{(L_1 L_2)} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{T}$. En intégrant cette dernière relation dans l'invariance rotationnelle (Eq. 7), il vient :

$$\mathbf{Z}_d = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{T} \qquad \text{(Eq. 9)}$$

avec

$$\mathbf{F}_d = (\mathbf{W}_{\downarrow d})^{\dagger} \cdot \mathbf{W}_{\uparrow d} \qquad \text{(Eq. 10)}$$

où $.^{\dagger}$ dénote la matrice pseudo-inverse. Ainsi, l'extraction des pôles $z_{d,r}$ se fait par le biais de la diagonalisation des matrices $\mathbf{F}_d$. Si les deux diagonalisations sont faites indépendamment, une étape supplémentaire consistant à appairer les pôles des deux directions est nécessaire. Rouquette [12] propose de diagonaliser de façon conjointe les deux matrices $\mathbf{F}_d$ liées aux deux dimensions du signal, par la diagonalisation d'une matrice $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \beta\,\mathbf{F}_1 + (1 - \beta)\,\mathbf{F}_2 \qquad \text{(Eq. 11)}$$

où le paramètre β, arbitraire, est choisi différent de $1/2$, pour autoriser les valeurs propres de multiplicité supérieure à 1.
Grâce à l'algorithme ESPRIT, on obtient, par une cascade de traitements linéaires, les paires de pôles contenus dans un signal à deux dimensions, mesuré sur une grille régulière de points. Toutefois, le nombre de pôles R, ou *ordre* du signal, jusqu'ici supposé connu, est dans la pratique inconnu. Une mauvaise estimation de l'ordre du signal compromet fortement l'estimation des matrices $\mathbf{F}_d$, et donc des pôles. Il est donc nécessaire d'estimer correctement R.

2.3. Le critère ESTER

Pour l'estimation sans connaissance *a priori* de l'ordre d'un signal, Badeau propose le critere ESTER (*ESTimation of ERror*) [6], pour un signal unidimensionnel, basé sur l'erreur d'estimation de la matrice $\mathbf{F}_d$. Cette matrice, estimée aux moindres carrés (Eq. 10), est en effet très sensible à une mauvaise estimation de R. Le critère ESTER cherche donc à minimiser l'erreur d'estimation :

$$\Sigma_d(r) = ||\mathbf{W}_{\downarrow d}(r) \cdot \mathbf{F}_d(r) - \mathbf{W}_{\uparrow d}(r)||_2 \qquad \text{(Eq. 12)}$$

Des versions multidimensionnelles de ce critère existent [13], consistant en la moyenne arithmétique ou géométrique du critère unidirectionnel exprimé dans chacune des dimensions.

Grâce au critère ESTER, qui se sert des mêmes outils que l'algorithme ESPRIT, on est capable d'identifier, pour peu que l'erreur d'estimation présente un contraste suffisant, un nombre de pôles complexes dans le signal.

Pour plus de clarté, l'implémentation de la méthode HRWA, adaptée à l'extraction de nombres d'ondes sur des signaux surfaciques, est résumée dans le paragraphe qui suit.

2.4. Implémentation de la méthode HRWA

La méthode s'applique à une réponse de structure bidimensionnelle, mesurée sur une grille régulière de pas $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ et de taille $L_1 \times L_2$. On prendra la transformée de Fourier du signal temporel en chaque point, afin d'effectuer l'analyse à fréquence fixe. Ainsi, on obtiendra, à chaque fréquence ω_i, des vecteurs d'onde complexes $\mathbf{k}_{r,i} = [k_{1,r,i}, k_{2,r,i}]$:

$$\mathbf{HRWA}^{2D} \ : \ \mathbf{S}[\omega_i] \longrightarrow \{\mathbf{k}_{r,i}\} \qquad \text{(Eq. 13)}$$

Pour chaque fréquence ω_i :

1. Construire la matrice de *Hankel-Hankel-par-blocs* $\mathbf{H}$ (Eq. 5) à partir du signal $\mathbf{S}[\omega_i]$, en choisissant $K_d \approx L_d/2$
2. Calculer la matrice d'autocovariance $\mathbf{C_{SS}}$ (Eq. 8) et en effectuer la décomposition en valeurs propres
3. Pour chaque $r \in \{r_{min}, \ldots, r_{max}\}$
   (a) Construire la matrice $\mathbf{W}$ à partir des r vecteurs propres dominants de $\mathbf{C_{SS}}$
   (b) Évaluer les matrices $\mathbf{F}_d$, $d \in \{1, 2\}$ (Eq. 10)
   (c) Calculer le produit des erreurs de troncature $\Pi(r) = \Sigma_1(r) \cdot \Sigma_2(r)$ (Eq. 12)

   L'ordre R est choisi tel que $\Pi(R) = \min_r \Pi(r)$
4. Construire (Eq. 11) et diagonaliser $\mathbf{K} = \mathbf{T}\,\mathbf{D}\,\mathbf{T}^{-1}$ pour évaluer $\mathbf{T}$
5. Extraire les pôles du signal $\mathbf{Z}_d$ (Eq. 9)
6. En déduire les R vecteurs d'onde complexes $\mathbf{k}_{r,i} = \left[-J\frac{\ln(z_{1,r})}{\Delta_1}, \ -J\frac{\ln(z_{2,r})}{\Delta_2}\right]$

3. Résultats expérimentaux

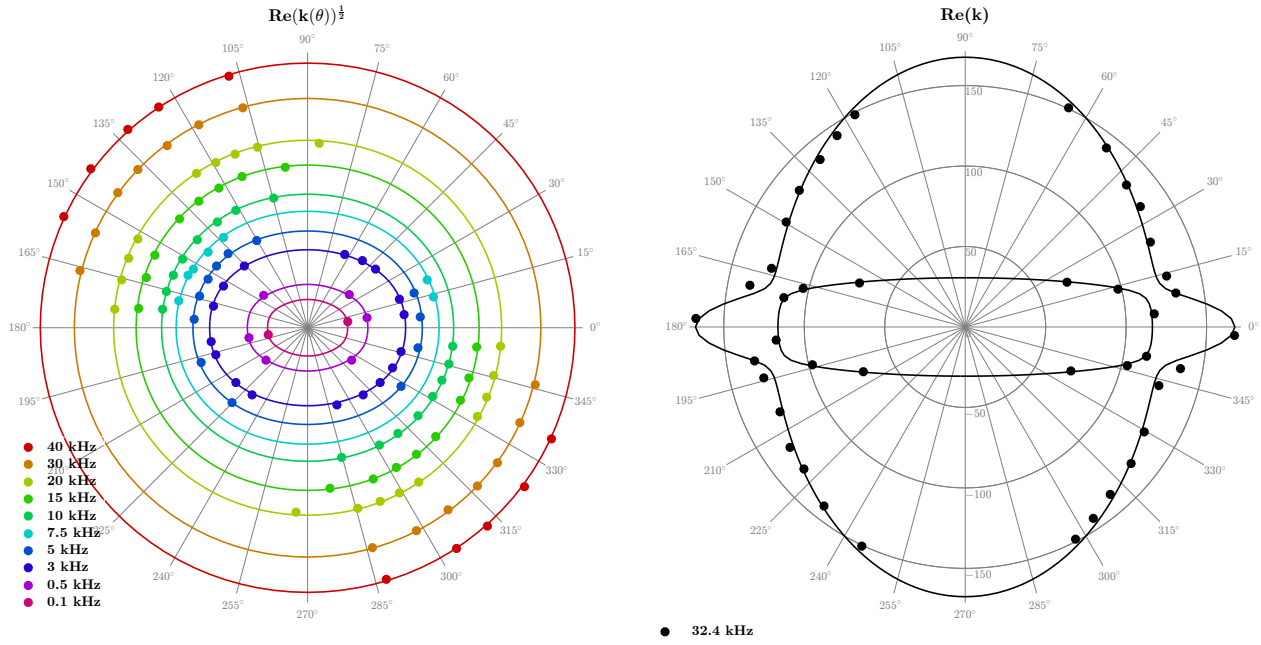
Cette partie a pour but de présenter différentes façons d'utiliser la méthode HRWA pour l'étude du comportement dynamique linéaire des plaques composites.
Le premier résultat, effectué sur une plaque sandwich orthotrope de petite taille, permet de mettre en valeur l'aspect *large bande* de la méthode, ainsi que la concordance des résultats avec une modélisation simple, dans un but d'identification de comportement généralisé. On montre aussi la possibilité d'identifier, grâce à la résolution de la méthode, des ondes longitudinales et de cisaillement, dont le mouvement est normalement contenu *dans le plan*, et dont les longueurs d'ondes sont grandes.
Le deuxième résultat, à plus haute fréquence, et appliqué sur une plaque sandwich avec âme en nid d'abeille, permet de montrer l'identification d'un comportement fortement dispersif : changement de la direction forte d'anisotropie, *band gap*. De plus, on montre la possibilité d'identifier des nombres d'onde locaux, avec un résultat sur l'amortissement spatial des ondes.
Le troisième et dernier résultat démontre le potentiel de la méthode à identifier des propriétés locales de la structure : l'extraction des nombres d'ondes y est faite par *zones* sur une plaque à anisotropie variable, montrant les différents diagrammes polaires de dispersion, fortement reliés à la direction locale des fibres.
Les propriétés mécaniques approximatives des matériaux utilisés pour la fabrication des plaques composites sont résumées dans le tableau 1.

Matériau	Épaisseur	E_L	E_T	G_{LT}	ν_{LT}	Densité ρ
Mousse PVC HD	5 mm	100 MPa	100 MPa	38 MPa	0.3	85 kg/m^3
Nid d'abeille	5 mm	...	...	...	...	50 kg/m^3
Carbone Prepreg	170 μm	110 GPa	8 GPa	4 GPa	0.24	1450 kg/m^3

Tab. 1.: Propriétés des matériaux utilisés pour la fabrication des plaques

Pour les deux premières études, le vibromètre laser à balayage du Laboratoire de Vibrations et d'Acoustique (LVA) de l'INSA de Lyon a été utilisé pour obtenir les mesures du champ de vitesses, qui ont ensuite été traitées par la méthode HRWA. Pour la troisième étude, une installation expérimentale consistant à monter un vibromètre laser mono-point sur un bras robot a été utilisée. Cette installation, développée en interne au Laboratoire NAVIER de l'École nationale des Ponts et Chaussées, permet de mesurer un champ de vitesse 3D sur une surface complexe. Pour les besoins de la présente étude, il a été utilisé en incidence normale sur la plaque afin de fournir des données similaires à l'outil du LVA. Il faut noter que les temps de mesure sur de telles installations sont assez importants, de l'ordre de la dizaine d'heures. Toutefois, avec l'amélioration des technologies de caméras rapides et des techniques de traitement d'images, ces temps de mesure pourraient être réduits drastiquement.

3.1. Plaque sandwich orthotrope mousse-carbone



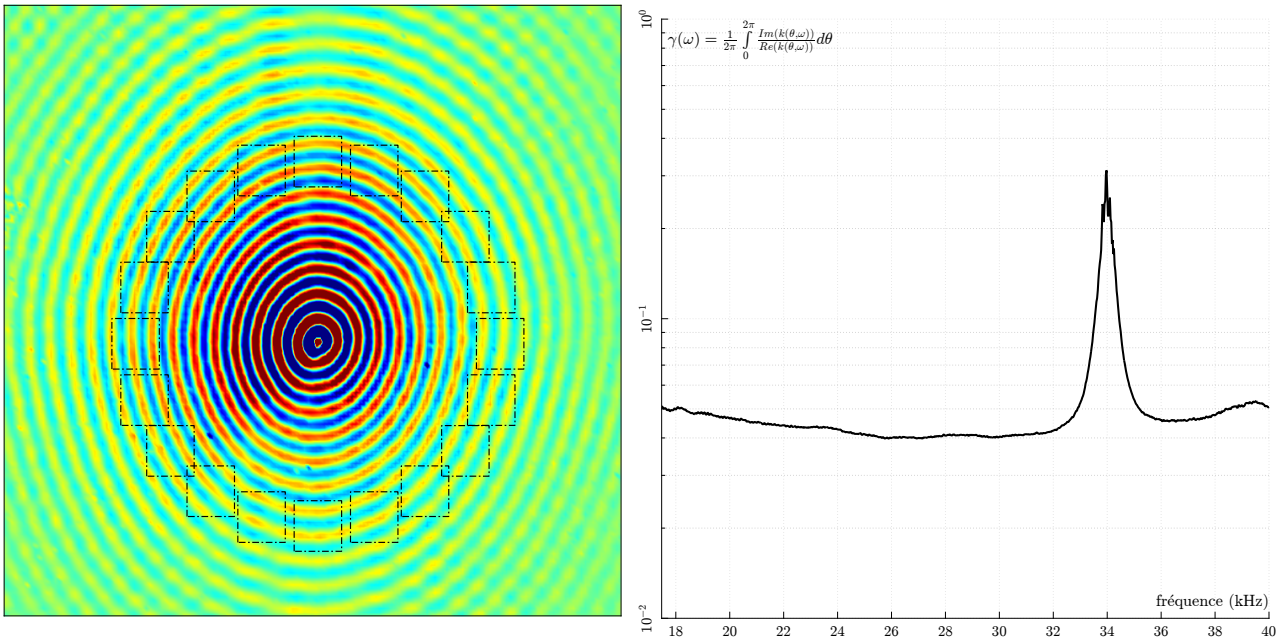
(a) (b)

Fig. 1.: Extraction expérimentale de vecteurs d'onde sur une plaque sandwich mousse/carbone, à différentes fréquences et pour différents types d'onde. Points : Résultats de la méthode HRWA. Traits pleins : lois de dispersion théoriques ([14]). (a) Ondes de flexion. (b) Ondes de cisaillement dans le plan (forme extérieure) et de compression (ellipse intérieure).

Pour cette première étude expérimentale, on s'intéresse à la caractérisation d'une plaque composée d'une âme en mousse PVC haute densité, mise en sandwich entre deux peaux simple pli en fibre de carbone préimprégnée, orientée à 90° par rapport à l'axe Ox. L'échantillon retenu fait 150 mm de côté, et est donc, par son élancement relativement faible, vite soumis aux effets de cisaillement transverse. On excite l'échantillon simultanément grâce à un pot vibrant et une pastille piézoélectrique, situés dans deux coins opposés. Cela permet d'obtenir une bonne cohérence de mesure sur tout le spectre, de 100 Hz à 40 kHz. La mesure est effectuée sur un maillage régulier de 145×145 points, ce qui correspond à un temps de mesure d'environ deux heures. Le nombre de points mesuré est bien supérieur au nombre de points nécessaires pour l'étude et une réduction du nombre de points par 10 serait possible.

La Figure 1 présente des résultats d'extraction de nombres d'onde sur cet échantillon. Sur la Figure 1a, on a représenté la partie réelle des nombres d'onde extraits par la méthode HRWA (points), pour différentes fréquences couvrant une large bande. Ces quantités sont liées aux ondes de flexion se propageant dans l'échantillon sans effet d'amortissement, en première approximation. Pour améliorer la lisibilité sur toute la bande de fréquence, on a représenté les nombres d'onde identifiés normalisés par la racine carrée de leur norme. Ainsi, on peut remarquer que le profil polaire formé par les parties réelles des nombres d'onde est beaucoup plus anisotrope en basse fréquence . Cela est dû à l'augmentation des effets de cisaillement transverse avec la fréquence. Ceux-ci, principalement produits par l'âme en mousse, elle-même isotrope, tendent à réduire la dépendance angulaire du nombre d'onde. Sur la figure, les lignes représentent les diagrammes de dispersions théoriques, calculés à partir d'une solution de référence éléments finis [14] dans laquelle on a injecté les propriétés matériau données dans le tableau 1. Ces résultats concordent de façon très satisfaisante avec les mesures.
Sur la Figure 1b, on observe une identification de nombres d'onde liés à des mouvements *dans le plan* : ondes de compression (longitudinales) et de cisaillement plan. Cette identification est faite à fréquence relativement élevée (32.4 kHz) : en basse fréquence, ces mouvements ont des longueurs d'onde trop élevées pour être identifiées sur la plaque. Pour pouvoir extraire ces faibles nombres d'onde, on applique au champ un filtre passe-bas, afin d'écarter la contribution des ondes de flexion. Une nouvelle fois, la comparaison avec les diagrammes de dispersion théoriques est très bonne. Cette dernière identification montre une capacité très intéressante de la méthode HRWA : elle permet de séparer, en discriminant les branches de dispersion, les différents types de mécanismes de déformation. Ainsi, à partir de la seule mesure du déplacement transverse, en réponse à une excitation qui sollicite tous les odes de déformation, on arrive à identifier des ondes dont le mouvement est principalement dans le plan. Cela est principalement dû aux effets de couplage de l'excitation par pastille piézoélectrique.

3.2. Plaque sandwich, âme nid d'abeille



(a) (b)

Fig. 2.: (a) Déformée opérationnelle de la plaque sandwich nid d'abeille à 25 kHz. Les zones utilisées pour l'identification locale de nombres d'onde sont indiquées en pointillés. (b) Moyenne angulaire de l'amortissement spatial identifié dans les différentes zones, en fonction de la fréquence.

Une deuxième étude expérimentale a été menée sur une plaque sandwich carrée, de 60 cm de côté avec âme en nid d'abeille et deux peaux simple pli en fibre de carbone préimprégnée, orientée à 0°.

L'excitation est opérée par une pastille piézoélectrique positionnée au centre de l'échantillon, la plaque étant suspendue par deux élastomères fins. La mesure est effectuée sur une grille carrée de 157×157 points. Un pas plus grand conduirait à la violation du critère d'échantillonnage de Nyquist pour les fréquences analysées.
Situer l'excitation au centre de la plaque permet d'extraire des nombres d'onde en périphérie de la plaque. La figure 2a montre la géométrie de l'expérience et un exemple de résultat. Les cadres en pointillés dénotent les zones utilisées. On note la forme particulière du champ mesuré, qui est dominé par la présence de la source, à cause du fort amortissement des ondes au cours de leur propagation. Dans chaque zone, le champ correspond à une onde plane *propagée* . La méthode HRWA permet alors d'identifier l'amortissement de cette onde locale. Les résultats obtenus sur la partie imaginaire de $\mathbf{k}$ sont alors exploitables, comme le montre la Figure 3. Cette extraction locale est rendue possible par l'aspect *haute résolution* de la méthode.

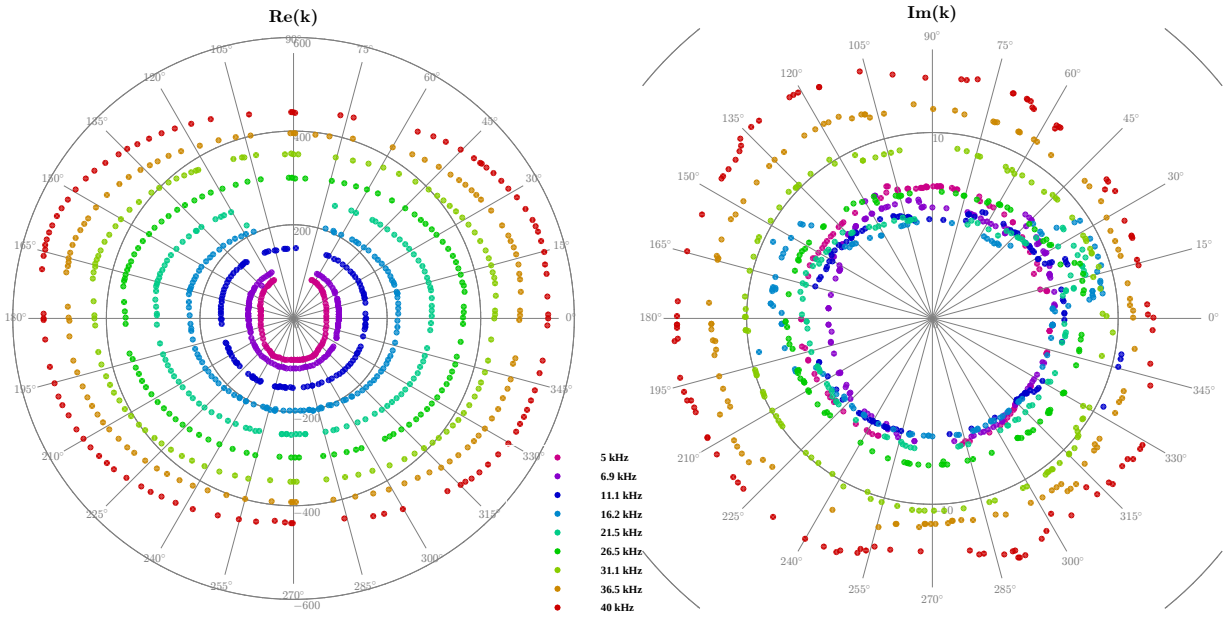
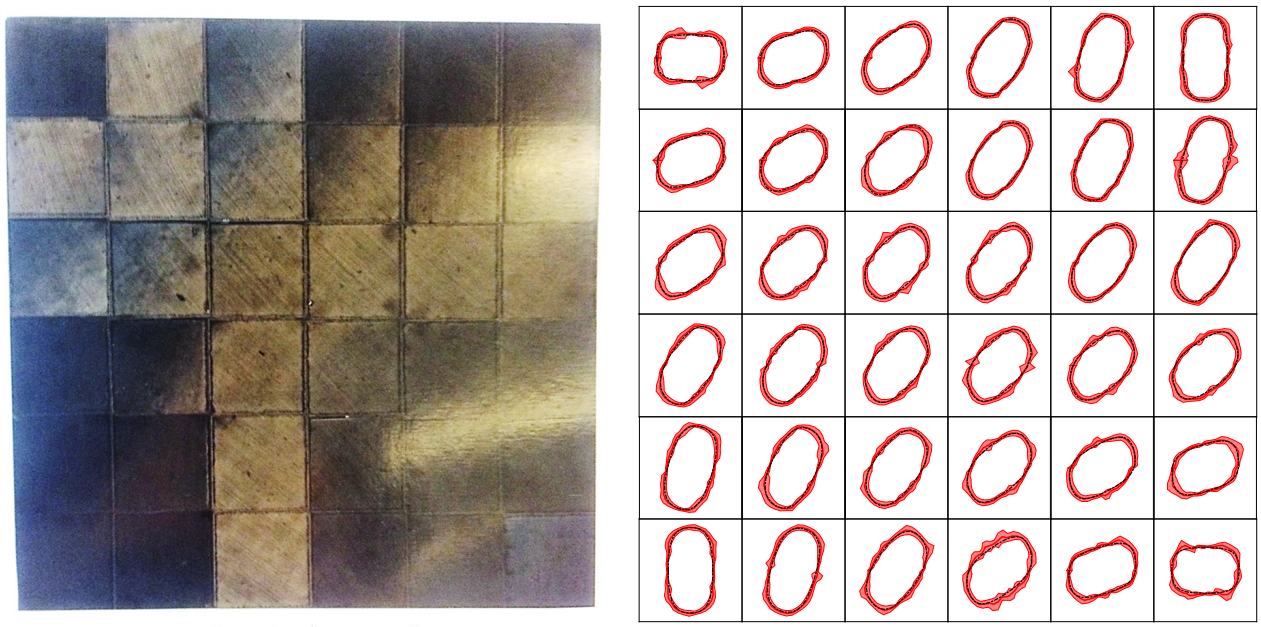


Fig. 3.: Représentation polaire des nombres d'onde (gauche : partie réelle, droite : partie imaginaire) de l'onde plane locale dans une plaque sandwich nid d'abeille, pour différentes fréquences.

L'observation de la Figure 3 permet dresser des conclusions sur le comportement de la plaque en fonction de la fréquence. En observant la partie réelle des nombres d'ondes obtenus (à gauche), on remarque que la direction forte d'anisotropie tourne de 90° dans le domaine de fréquence mesuré : en basse fréquence, le comportement en flexion est dominé par les peaux en carbone, orientées à 0° . Le nombre d'onde basse fréquence est donc plus faible dans cette direction. Avec l'augmentation de la fréquence et des effets de cisaillement transverse, le profil de nombre d'onde semble être influencé par le comportement anisotrope en cisaillement transverse de l'âme en nid d'abeille. Ces observations montrent le potentiel de la méthode à identifier des comportements laminaires individuels, alors que la mesure est effectuée à des fréquences très inférieures à celles des ultrasons habituellement utilisés pour ce type de caractérisation [15, 16]. De façon contrastée, l'amortissement spatial des ondes donné par la partie imaginaire des nombres d'onde semble quant à lui assez isotrope.
Un résultat intéressant sur cet échantillon concerne la dépendance de l'amortissement spatial des ondes en fonction de la fréquence. La Figure 2bdonne $\gamma(\omega)$, l'amortissement spatial des ondes de flexion moyenné sur toutes les orientations. Alors que γ semble compris entre 4 et 5 % sur la majorité du spectre, on observe une singularité autour de 34 kHz, avec un amortissement moyen qui augmente fortement (jusqu'à 30 %). À cette fréquence, les ondes ne se propagent pratiquement plus. Au vu du caractère périodique de la structure mesurée (nid d'abeille), est sans doute à relier au phénomène de *bande interdite*.

3.3. Plaque multicouche anisotrope et non homogène

L'expérience précédente a permis de montrer la possibilité d'extraire des nombres d'ondes sur des zones restreintes de la plaque, permettant ainsi d'obtenir des informations sur le comportement local. Pour cette troisième expérience, on a fabriqué une plaque en fibre de carbone préimprégrée à 4 plis symétriques avec la séquence d'empilement $[90°, \theta]_S$. Ici, θ est un paramètre dépendant des coordonnées de l'espace. De façon pratique, la couche centrale, homogène, sert de support aux deux couches supérieure et inférieure, dont l'orientation locale est contrôlée de façon discrète par la découpe de patchs orientés. La plaque, composée de 36 patchs, est de forme carrée de 30 cm de côté. La Figure 4a montre les orientations des fibres choisies dans chaque patch, celles-ci formant l'angle θ avec l'axe horizontal. La disposition des patchs est complètement arbitraire. Pour la mesure, on excite la plaque au moyen d'un pot vibrant, dans un coin, entre 500 Hz et 22 kHz. Un maillage de 100×100 points est mesuré.



(a) (b)

Fig. 4.: Application de la méthode sur la mesure d'une plaque anisotrope non homogène (a) face supérieure de la plaque fabriquée (empilement : $[90°, \theta]_S$). (b) Invariant local $\kappa(\phi)$ (Eq. 15) : extraction expérimentale en rouge, moyenne (trait épais) et écart-type (surfaces), et solution analytique à partir des angles théoriques en noir (ligne pointillée).

Afin de confronter les résultats d'extraction de nombres d'onde à des valeurs théoriques, on rappelle la forme de la branche de flexion d'une plaque mince de Kirchhof, régie par l'opérateur de flexion :

$$k_x^4 D_{11} + k_y^4 D_{22} + 2k_x^2 k_y^2 (D_{12} + 2D_{66}) + 4k_x^3 k_y D_{16} + 4k_x k_y^3 D_{16} - \omega^2 M = 0 \qquad \text{(Eq. 14)}$$

où les D_{ij}, composantes du tenseur de raideur en flexion, et M, la densité surfacique de masse, sont données par les propriétés du matériau. On peut dégager un invariant, qui dépendra alors uniquement de ces propriétés et de l'angle de propagation ϕ ; si on pose $\mathbf{k}(\phi, \omega) = k(\phi, \omega) \cdot [cos(\phi), sin(\phi)]^T$, alors on peut écrire simplement un invariant $\kappa(\phi)$ en fréquence :

$$\kappa(\phi) = \frac{k(\phi, \omega)}{\sqrt{\omega}} = \left(\frac{M}{c^4 D_{11} + s^4 D_{22} + 2c^2 s^2 (D_{12} + 2D_{66}) + 4c^3 s D_{16} + 4c s^3 D_{16}} \right)^{\frac{1}{4}} \qquad \text{(Eq. 15)}$$

où $c = cos(\phi)$ et $s = sin(\phi)$. Sur la Figure 4b, on a représenté la comparaison, sur la base de cet invariant, entre la théorie et les résultats de la méthode HRWA, appliquée patch par patch.

La comparaison des résultats expérimentaux et théoriques est très satisfaisante, même si quelques différences apparaissent. Ces différences sont à relier principalement au mode de fabrication de la plaque avec des incertitudes sur les angles des patchs et leur position.
Ce dernier exemple montre la possibilité de caractériser localement le comportement linéaire d'une plaque anisotrope non homogène, grâce à la méthode HRWA. Ceci peut avoir des applications dans le contrôle des pièces réalisées grâce aux techniques émergentes d'*Automatic Fibre Placement*, par exemple.

4. Perspectives

On montre ici, sur des résultats expérimentaux, la capacité de la méthode proposée à caractériser un comportement viscoélastique linéaire de plaque anisotrope, non homogène (dans une certaine mesure) puisque la caractérisation est effectuée de façon localisée et sur une large bande fréquentielle. À ce stade, la caractérisation de l'amortissement spatial des ondes reste à améliorer. Plusieurs perspectives sont envisageables dont l'identification des défauts dans les structures, par exemple. On pourrait aussi chercher à utiliser l'aspect large bande pour identifier des propriétés laminaires raffinées (comportement au cisaillement, raideurs d'interfaces, etc.).

Remerciements

Ce travail est financé par le projet ANR MAESSTRO (*Modélisation Acoustique et Synthèse Sonore pour Tables d'haRmonie de pianOs*).

Références

[1] J. Berthaut, M. N. Ichchou, L. Jezequel « K-space identification of apparent structural behaviour », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 280, pp. 1125–1131, 2005.
[2] F. Ablitzer, C. Pézerat, J.-M. Génevaux, J. Bégué « Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 333 n° 9, pp. 2454–2468, 2014.
[3] Q. Leclère, F. Ablitzer, C. Pézerat « Practical implementation of the corrected force analysis technique to identify the structural parameter and load distributions », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 351, pp. 106–118, 2015.
[4] R. Prony « Essai experimental et analytique », *Journal de l'École Polytechnique* Vol. 1 n° 22, pp. 24–76, 1795.
[5] R. Roy, T. Kailath « ESPRIT-Estimation of Signal Paramters via Rotational Invariance Techniques », *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* Vol. 37 n° 7, pp. 984–995, 1989.
[6] R. Badeau, B. David, G. Richard « A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques », *IEEE Transactions on Signal Processing* Vol. 54 n° 2, pp. 450–458, 2006.
[7] K. Ege, X. Boutillon, B. David « High-resolution modal analysis », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 325 n° 4-5, pp. 852–869, 2009.
[8] S. Sahnoun, K. Usevich, P. Comon « Multidimensional ESPRIT : Algorithm, Computations and Perturbation Analysis », .
[9] V. F. Pisarenko « The Retrieval of Harmonies from a Covariance Function », *Geophysical Journal of the Royal astrophysical Society* Vol. 33, pp. 347–366, 1973.
[10] R. Kumaresan, D. Tufts « Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise », *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on* Vol. 30 n° 6, pp. 833–840, 1982.
[11] F. B. HILDEBRAND, Introduction to numerical analysis, 1987.
[12] S. Rouquette, M. Najim « Estimation of frequencies and damping factors by two-dimensional ESPRIT type methods », *IEEE Transactions on Signal Processing* Vol. 49 n° 1, pp. 237–245, 2001.
[13] L. Kefei, J. P. C. da Costa, H. Cheung So, L. Huang « Subspace techniques for multidimensional model order selection in colored noise », *Signal Processing* Vol. 93, pp. 1976–1987, 2013.
[14] I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea, E. Viola « Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section », *Journal of Sound and Vibration* Vol. 295 n° 3-5, pp. 685–707, 2006.
[15] « Inversion of ultrasonic, plane-wave transmission data in composite plates to infer viscoelastic material properties »*NDT and E International* Vol. 33 n° 6, pp. 377–392, 2000.
[16] « The quasi-harmonic ultrasonic polar scan for material characterization : Experiment and numerical modeling »*Ultrasonics* Vol. 58, pp. 111–122, 2015.