Processus de preuve et situations de validation

Nicolas Balacheff

PROCESSUS DE PREUVE ET SITUATIONS DE VALIDATION

Proving processes and situations for validation.

Nicolas Balacheff

Institut IMAG
Université Grenoble 1, CNRS, INPG
Laboratoire LSD2, Équipe de recherche en didactique des mathématiques et de l'informatique.

Tapuscrit auteur de : Balacheff N. (1987) Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18(2) 147-176.

Résumé : Nous étudions les relations entre preuves et contradictions dans la résolution d'un problème de mathématiques. Cette étude montre la nécessité d'une approche à la fois situationnelle et cognitive, notamment en référence au fonctionnement des connaissances dans l'apprentissage des mathématiques. Ceci nous conduit à distinguer différents stades dans l'évolution des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Enfin nous montrons que le dépassement d'une contradiction ne constitue pas nécessairement un progrès cognitif, en particulier nous examinons le traitement d'un contre-exemple par des élèves de quatrième.

Abstract: A study is made of the relationship between Proofs and Contradictions in mathematics problem-solving. With respect to mathematics learning, we show the necessity for an approach being both situational and cognitive. This study leads to the demarcation of several stages from Pragmatic Proofs to Intellectual Proofs. We then go on to show that overcoming a contradiction does not necessarily constitute cognitive progress. In particular we examine how pupils (13-14 year old) cope with counterexamples.

INTRODUCTION

La notion de démonstration occupe une place importante dans l'enseignement des mathématiques en France où elle apparait lors de la troisième année de l'enseignement secondaire, en classe de quatrième. Son apprentissage présente des difficultés importantes. Il est classique de signaler que ces difficultés sont d'abord liées au passage d'une mathématique « pratique », caractérisée par l'action et l'observation dans le cours des deux premières années de l'enseignement secondaire, à une mathématique plus théorique justement caractérisée par l'introduction de la démonstration. Ce passage apparait comme une véritable rupture du contrat didactique qui, avant cette introduction, réglait les relations des élèves et du maitre à propos de l'activité mathématique.

Nous nous proposons d'aborder ce problème en le formulant comme celui de la détermination des conditions didactiques d'une genèse cognitive de la démonstration.

Mais avant d'aller plus loin il est nécessaire que nous clarifions quelques points de vocabulaire; les expressions raisonner, prouver, démontrer, sont souvent considérées comme synonymes par les mathématiciens, particulièrement lorsqu'il s'agit d'enseignement. Cela constitue à notre sens un obstacle aux recherches sur ces questions.

Nous appelons **explication** un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées.

Nous appelons **preuve** une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.

Au sein de la communauté mathématique ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons **démonstrations** ces preuves.

Nous réservons le mot **raisonnement** pour désigner l'activité intellectuelle, la plupart du temps non explicite, de manipulation d'informations pour, partir de données, produire de nouvelles informations.

Ces distinctions de vocabulaire mettent en relief les dimensions sociales de la démonstration en tant que résultat d'un processus particulier de preuve.

Nous nous proposons de montrer que l'étude des processus de preuve doit être conduite en référence *à la fois* à celui qui les met en œuvre en tant que *sujet connaissant* et à la *situation* dans laquelle il les met en œuvre. Nous mettrons alors en évidence la variété de leur nature et quelques é1éments de la complexité de leur fonctionnement. Cette étude nous conduira à différencier des niveaux de preuve pouvant prendre place dans la genèse de la démonstration dans une perspective d'apprentissage.

Aborder la démonstration sous l'angle de l'interaction sociale nous conduit naturellement à envisager la dialectique des preuves et des réfutations, ou plus généralement le problème du traitement des contradictions. C'est par là que nous commencerons.

LE PROBLEME DE LA CONTRADICTION

L'une des finalités d'un processus de preuve peut être exprimée comme étant d'assurer l'absence de contradictions formelles ou sémantiques dans la solution d'un problème. Mais le « fait » de la contradiction, alors porté au centre du débat de validation, présente une complexité qui ne se laisse pas réduire à la complexité logique.

UNE CONTRADICTION EST RELATIVE À UN TÉMOIN

Nous retenons l'hypothèse qu'une contradiction n'existe « que si un témoin-locuteur la construit » (Grize et al. 1983). Ceci signifie qu'une contradiction n'existe pas en soi mais relativement à un système cognitif. En conséquence une contradiction avérée pour un témoin peut être niée ou inexistante pour un autre individu. Par exemple, telle contradiction sera reconnue par l'enseignant, ou par l'observateur dans la situation expérimentale, mais ne le sera pas par l'élève :

> Ayant montré que la suite (u_n) admet une limite L vérifiant L < 1, des étudiants traiteront dans l'expression:
>
> $$U_n^{n+1}+u_n^n+u_n^2+u_n+1$$
>
> d'une façon indépendante n en exposant et n en indice :
>
> $$\lim(u_n^{n+1}+u_n^n+u_n^2+u_n+1) = \lim(u_n^2+u_n+1)$$
> $$=L^2+L+1$$
>
> (Robert 1982)

Inversement une contradiction peut être attestée par les élèves alors que pour l'enseignant elle est inexistante:

> Pour des élèves de cinquième la somme des angles d'un triangle ne peut être égale à 180° pour tout triangle, parce qu'un petit triangle ne peut avoir même somme d'angles qu'un triangle plus grand.
>
> (Balacheff 1987)

> En cinquième, pour l'évaluation du volume d'un parallélépipède à l'aide de petits cubes, certains élèves, ayant décompté le nombre de cubes dans l'une des dimensions, considèrent qu'il faut en compter un de moins dans chacune des deux autres, parce qu'on ne peut pas compter deux fois le cube du coin.[1]
>
> (Bodin 1980)

Dans ces exemples les raisons de l'identification ou de l'absence d'identification d'une contradiction, sont à chercher dans la nature même des connaissances

[1] Cet obstacle à l'acquisition de la notion de volume a été relevé par Bodin et confirmé par les travaux de Vergnaud, Rouchier et al. (1983).

mobilisées par les élèves. Les deux derniers cas correspondent d'ailleurs à des situations de conflit cognitif sur lesquels s'appuient souvent les situations didactiques que nous concevons ; l'hypothèse étant que la prise de conscience de telles contradictions rend nécessaire l'évolution des conceptions de l'élève. On reconnait là la problématique constructiviste selon laquelle la contradiction est la source d'un déséquilibre dont la compensation est le moteur du progrès de la connaissance (dans le double processus de l'accommodation et de l'assimilation, on peut à ce sujet se reporter aux ouvrages classiques de Piaget). C'est encore dans cette perspective que s'inscrit l'épistémologie scientifique héritière de Popper. Cependant la reprise de cette problématique par Lakatos, pour ce qui concerne les mathématiques, fait apparaitre que le dépassement des contradictions ne serait en fait que potentiellement source de progrès.

Conditions de la prise de conscience d'une contradiction

Dans le fonctionnement didactique, l'existence d'un savoir mathématique de référence (savoir scientifique ou savoir scolaire) donne à l'enseignant une responsabilité particulière quant à une décision sur le caractère effectivement contradictoire d'une situation. Il s'agit, pour lui, de rallier l'élève à cette reconnaissance, de lui ouvrir l'accès à une prise de conscience de la contradiction éventuelle entre ses conceptions et le savoir à enseigner.

Pour Piaget cette prise de conscience « *ne se produit qu'au niveau où le sujet devient capable de dépassement* » (1974 p.161). Mais ce dépassement pouvant en fait consister en une véritable réorganisation des connaissances, la condition peut paraitre un peu forte. Nous n'exigerons pas ce dépassement potentiel, mais nous retiendrons que son problème est posé :

> *prendre conscience d'une contradiction c'est poser le problème du choix entre deux propositions* : une affirmation et sa négation. Quelle que soit l'issue de ce choix, elle suppose que l'affirmation soit disponible et qu'elle soit susceptible d'être niée.

La contradiction est ainsi dépendante d'une double construction. Nous soutenons l'idée que la prise de conscience ne se produira qu'au niveau où le sujet devient capable de cette double construction.

Une fois la contradiction identifiée par l'élève, son dépassement peut, quant à lui, n'être obtenu qu'après un long travail. Ainsi, dans le cas de la mesure des angles d'un triangle, le dépassement de la contradiction évoquée plus haut passera par une reprise des conceptions qu'a l'élève de la mesure d'un angle et par son appropriation du postulat d'Euclide et de ses conséquences. La mise en relation des propositions « plus un triangle est grand plus la somme de ses angles est grande » et « la somme des angles d'un triangle est 180° », si elle ouvre l'accès à la contradiction, ne suffit pas pour autant à son dépassement.

Par ailleurs, dans le contexte qui nous intéresse ici, la contradiction n'existe que par rapport à une attente déçue, à une conjecture infirmée. L'existence potentielle de l'affirmation ne suffit pas. II faut qu'elle se trouve, comme le dirait Hadamard, au-devant de la scène. Piaget mentionne lui-même que « *la prise de conscience de la contradiction est bien plus aisée lorsqu'elle apparait entre une prévision et une donnée extérieure qui lui inflige un démenti* » *(ibid.).* On peut constater ici que Piaget ne s'en tient pas aux seules conditions cognitives mais qu'il ouvre son analyse à des conditions liées à la situation. II ne va cependant pas plus loin dans cette direction, du moins pour ce que nous avons pu lire.

Ainsi la prise de conscience d'une contradiction suppose une prédiction, c'est-à-dire l'engagement effectif de l'élève sur une affirmation. Cela signifie son dégagement de l'action, un pas de côté grâce auquel l'action est considérée comme susceptible d'une réflexion, voire d'un discours. L'action n'est alors plus seulement agie. Produit d'un choix, elle est rapportée à ses conditions de validité et à ses effets. Elle est soumise à une finalité. La contradiction surgit de la non réalisation de cette finalité. Elle pose donc la question du choix et des conditions de l'action.

Nous retiendrons les conditions suivantes comme nécessaires à la prise de conscience d'une contradiction :

(i) existence d'un attendu ;
(ii) possibilité de construire l'affirmation associée à cet attendu et sa négation.

Il en découle que la contradiction est associée à un processus d'évaluation, explicite ou non, délibéré ou non, et de décision.

Pour que l'élève soit capable de ces anticipations il est nécessaire que ses connaissances constituent un modèle de la réalité afin de lui permettre un contrôle a priori de la situation-problème dans laquelle il se trouve.

SITUATION ET PROCESSUS DE VALIDATION

ÉVIDENCE DU RÔLE DE LA SITUATION

Il existe plusieurs formes et plusieurs niveaux de validation dont la mobilisation et la mise en œuvre sont provoquées par **les exigences de la situation** dans laquelle on peut se trouver. Ce fait est bien illustré par une métaphore de Popper:

> Lorsque j'achète un livre et que le libraire me rend vingt pence de monnaie, je suis « tout à fait certain », que les deux pièces ne sont pas des contrefaçons [...] Si quelqu'un me demandait « êtes-vous certain que la pièce dans votre main est une pièce de dix pence ? », je lui jetterais peut-être à nouveau un coup d'œil et dirais « oui ». Mais si quelque chose d'important dépendait de la vérité de mon jugement, je pense que je prendrais la peine de me rendre dans la banque la plus proche et de demander au caissier d'examiner la pièce ; et si la vie d'un homme en dépendait, j'essaierais même de voir le *chief cashier* de la banque d'Angleterre, et lui demanderais de certifier l'authenticité de la pièce.
>
> (Popper 1972 pp. 89-90)

et Popper poursuit soutenant que « *la ''certitude'' d'une croyance n'est pas tant fonction de l'intensité de cette dernière que de la situation : de ce que nous anticipons comme ses conséquences possibles.* » (ibid.)

L'absence de tout processus de validation ou, au contraire, la mise en œuvre d'argumentations éventuellement solidement fondées théoriquement, apparaissent directement liés à l'analyse que l'individu fait de la situation dans laquelle il se trouve. Un rôle central, éventuellement moteur, est joué par son évaluation du **risque** lié à une décision qu'il doit prendre.

Le processus de validation, l'élaboration de preuves de tous ordres, est ainsi d'abord lié à des fins pratiques. Il s'agit de s'assurer les garanties nécessaires à un engagement dans l'action ; ici l'action de décider de la vérité d'une assertion. Quant à l'engagement à différents niveaux de validation il répond à une **économie de logique** « *qui veut que l'on ne mobilise pas plus de logique qu'il n'en faut pour les besoins de la pratique* » (Bourdieu 1980 p. 145).

Ainsi, la situation dans laquelle a lieu l'action de l'élève peut tolérer l'absence de travail sur la validation.

C'est le cas, dans certaines situations didactiques, des phases d'appropriation des règles d'un jeu, ou du fonctionnement d'un matériel. Par exemple dans la situation dite de « la course à 20 » étudiée par Brousseau (1975), après l'exposition des règles[2] les élèves sont invités à jouer, chaque partie terminée étant suivie d'une nouvelle partie sans autre exigence. Dans une telle situation, l'élève peut, pour jouer une partie, ignorer les précédentes, ne pas travailler ses décisions : la situation tolère l'absence de validation. Cependant pour des raisons qui leur appartiennent des élèves voulant gagner chercheront des raisons, des preuves de la validité de leur stratégie. Dans ces situations des succès réitérés peuvent instituer des règles d'action comme autant de sources possibles de théorèmes-en-acte (Vergnaud 1981).

C'est aussi le cas des situations dans lesquelles l'élève a à exécuter des algorithmes, des suites d'ordre, ou à mettre en œuvre des pratiques réglées par des habitudes pour lesquelles les questions de la validité et de la consistance ne se posent pas. Ces situations constituent des **sphères de pratique**[3]. Elles n'exigent pas de contrôle des productions, toute erreur contingente d'exécution mise à part, parce que la situation porte a priori sur de « bons objets », de « bonnes relations », selon un contrat qui permet l'économie de l'examen des conditions de validité de l'action.

Dans ces cas, l'absence observée de mise en œuvre de processus de preuve, le niveau des preuves éventuellement développées, ne sont décisifs ni pour le chercheur, ni pour l'enseignant, parce que susceptibles d'être la conséquence d'un principe d'économie.

Nous allons, dans la suite, nous intéresser aux situations qui appellent de tels processus.

SITUATION DE VALIDATION ET SITUATION DE DÉCISION

Voici d'abord deux exemples:

- reprenons le cas de « la course à 20 ». Dans la dernière phase du jeu, appelée « jeu de la découverte », la consigne demande à des équipes qui

[2] « Dans ce jeu l'un des joueurs commence et dit (ou écrit) 1 ou 2. Son adversaire peut alors ajouter 1 ou 2 ... celui qui arrive à dire 20 a gagné » (ibid. p. 3)

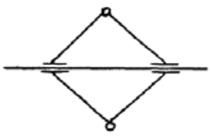
[3] Nous reprenons ici la notion d'univers de pratique forgée par Bourdieu (1980): « il y a très peu de chances que deux applications contradictoires des mêmes schèmes se trouvent confrontées dans ce qu'il faut appeler un univers de pratique [...] La même chose peut, dans des univers de pratique différents, avoir pour complémentaire des choses différentes et elle peut donc selon l'univers, recevoir des propriétés différentes, voire opposées (ibid. p. 145). Le substantif d'univers nous a cependant paru peu approprié au regard des pratiques scolaires auxquelles nous nous intéressons.

jouent, d'élaborer des propositions qui permettent de « gagner à coup sûr » (Brousseau 1975). Un système de marques sanctionne la production *d'énoncés vrais (« acceptés » (ibid.))* et *d'énoncés faux* (« *prouvés faux* » *(ibid.)).* Les élèves se trouvent alors dans une **situation de validation** au sens de Brousseau (1977). L'objectif est la production d'une preuve (de la vérité ou de la fausseté) d'un énoncé. Cette situation contient organiquement la contrainte de mise en œuvre de processus de preuve.

- dans le cas de séquences didactiques décrites par Gras (1983) à propos de l'apprentissage de la symétrie orthogonale, après des situations consacrées à la familiarisation avec le symétriseur[4], les élèves sont invités à anticiper, à prédire, ce que sera l'image d'une figure donnée. On se trouve alors dans ce que nous appellerons une **situation de décision**; elle demande la mobilisation de moyens de décision et donc de moyens de validation, sans que pour autant soit exigée la production explicite de preuves. C'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite.

Dans la situation de décision, les opérations intellectuelles du raisonnement hypothético-déductif (en tant que système légitime et fiable de production d'informations) peuvent être mises en œuvre sans que pour autant une preuve soit produite. Les contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution. Éventuellement, en tant que mathématiciens, nous reconnaitrons dans ce processus une organisation qui est de l'ordre de la démonstration ; mais ici elle est dans le fonctionnement du sujet un outil et non un objet (cf. pour cette distinction, Douady 1985).

---

4  Il s'agit d'un appareillage mécanique permettant de réaliser une symétrie orthogonale. L'appareil, suivant le schéma ci-dessus, est constitué d'un losange déformable glissant le long d'un axe placé suivant l'une de ses diagonales. Les deux sommets laissés libres peuvent porter une pointe sèche ou un crayon.

L'INTERACTION SOCIALE COMME MOTEUR DES PROCESSUS DE PREUVE

La mise en débat des décisions, l'injonction de garantir leur validité ou de la dénoncer, permet de transformer la situation de décision en une situation de validation.

Une des caractéristiques qui apparait ainsi déterminante pour la production d'une preuve, est la dimension sociale de la situation. C'est d'ailleurs cette dimension sociale que met en relief la métaphore de Popper que nous citions ci-dessus.

Mais on ne peut cependant pas affirmer que le contexte d'une situation sociale soit une condition nécessaire, ni même suffisante à la production de preuves:

> - la condition n'est pas nécessaire parce que le risque dû à une incertitude peut conduire à un effort de synthèse des raisons, des conditions nécessaires à la validité, qui réalise l'explicitation d'une preuve.
>
> - cette condition n'est pas non plus suffisante ; elle n'écarte pas la possibilité d'élèves qui refuseraient d'entrer dans ce jeu du débat. L'augmentation des enjeux, la force des injonctions peuvent ne pas suffirent... nous savons bien qu'il peut exister des martyrs. Par ailleurs la notion de risque n'a pas de sens en soi mais relativement à un individu qui le reconnait ou non et l'évalue plus ou moins important. Le risque reconnu, l'élève peut encore se montrer téméraire, c'est-à-dire ne pas aller jusqu'au bout de ce qu'il reconnaîtrait nécessaire pour garantir sa décision.

On ne peut donc attendre de la situation qu'elle détermine complétement et exclusivement le comportement de l'élève. Nous distinguerons seulement les situations qui tolèrent l'absence de travail sur la validation, des situations qui appellent un tel processus. Parmi ces dernières nous nous attacherons à deux types de situations: les **situations de décision** et les **situations de validation**.

Par ailleurs l'interaction sociale présente une complexité particulière, notamment parce qu'elle est le lieu de la confrontation d'univers langagiers a priori différents, de systèmes de connaissance non unifiés : par nature la communication implique l'interprétation mutuelle des systèmes cognitifs en présence. En particulier, la production d'une preuve oblige à la prise en compte des interlocuteurs pour finalement construire un système de validation commun, au moins localement, en référence aux propositions débattues.

Mais le désir de convaincre peut entrainer les partenaires à recourir à des arguments ad hoc, étrangers au cadre mathématique ou non pertinents. Là réside l'une des principales difficultés de l'utilisation des situations d'interaction, tant dans la classe qu'à des fins expérimentales (Balacheff et Laborde 1985). Quelles sont, par exemple, les conditions que doit satisfaire la situation pour que les interlocuteurs aient intérêt à accepter des énonces vrais et à ne pas soutenir des énoncés faux (ce qui peut arriver lorsque le désire de dominer est trop fort) ?

LE DÉSIRE DE CERTITUDE COMME MOTEUR DES DÉMARCHES DE PREUVE

Dans les exemples qui précèdent nous avons souligné le rôle joué par l'identification d'un risque dû à l'incertitude dans la motivation d'un individu pour produire des preuves ou mettre en œuvre des processus de preuve. Une autre motivation est le **désir de certitude,** pour elle-même, sans la pression d'un risque qui serait à prendre. Les enjeux peuvent être ceux d'une satisfaction intellectuelle, d'une curiosité pour la vérité qui peut animer les élèves. C'est par exemple la problématique des innovations qui cherchent à s'appuyer sur des *problèmes motivants* : problèmes qui susciteraient assez d'intérêt pour que les élèves acceptent ou veuillent d'eux-mêmes en chercher la solution.

C'est sur ce désir de certitude, que s'appuie Brousseau (1983) dans une situation en géométrie où il demande aux élèves de tracer les médiatrices des côtés d'un triangle sans se placer dans un cas particulier. Bien sûr, les élèves vont chercher à se placer dans le cas d'un triangle quelconque, mais « *l'obstination mystérieuse des faits* » *(ibid.* p. 189) fera craindre le cas particulier. Quoi qu'il en soit, l'incertitude entretenue par des tracés inévitablement défectueux conduit à une *conjecture* : les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Vouloir en faire un théorème, en avoir la certitude, repose sur un **désir de savoir** qui ne doit rien à une situation de risque, ni même dans ce cas à un quelconque intérêt pratique; les élèves ne savent pas si une telle propriété pourra être utile à quoi que ce soit.

DEUX PROBLÉMATIQUES: L'EFFICACITÉ ET LA RIGUEUR

Nous distinguerons trois types de situations qui appellent des processus de validation, voire la production de preuves. Ces situations peuvent être caractérisées par la fonction des preuves dans chacune d'elles :

- preuves pour décider
- preuves pour convaincre
- preuves pour savoir

Il est clair qu'il ne s'agit pas là d'une partition. « Savoir », peut être compris comme décider de la valeur de vérité d'une proposition et « décider » peut être la source d'un savoir nouveau. Ce qui, pour nous, sépare effectivement ces deux fonctions (« décider », « savoir ») c'est que la première s'insère dans l'action, dans le fonctionnement du praticien, alors que la seconde est un fonctionnement de théoricien. Du point de rue des situations didactiques, il correspondra à ces deux fonctions, deux types de contrat didactique.

Dans le premier cas la dévolution du problème passe par l'entrée des élèves dans une fiction ou dans un jeu dont ils acceptent d'être les protagonistes. Ce type de situation parait particulièrement bien adapté à l'École Élémentaire, car le jeu est à part entière une *pratique* des enfants à l'extérieur même de l'école.

Dans le second cas la dévolution du problème passe par l'adhésion des élèves à une position théorique. On peut chercher à nouer un tel contrat à l'Université, et appeler sur le désir de certitude la mise en œuvre de processus de validation (l'étudiant reconnaissant l'Université comme le lieu où est pris en charge la construction de ses connaissances). Toutefois ce type de contrat peut encore être difficile à nouer au nom des raisons de la pratique, particulièrement lorsque les études sont finalisées professionnellement et que les étudiants sont plus attachés à l'acquisition de savoir-faire qu'à celle de savoirs qui leur apparaissent bien « théoriques ».

En France, la classe de quatrième offre actuellement, en géométrie, un bon exemple de ce passage du pratique au théorique. La marque en est justement l'exigence de la production de preuves (démonstrations). La rupture entre géométrie pratique (celle de la règle et du compas, de la production de figure) et la géométrie (déductive) n'est en effet pas seulement celle d'un changement de statut épistémologique, mais surtout celle d'un changement de contrat comme le montre bien le travail de Chevallard et Tonnelle sur « *évidence et démonstration* » (Tonnelle 1982). L'enquête qu'ils ont conduite sur la géométrie en fin de cinquième et en fin de quatrième, montre que de lieu du *tracé précis des figures* la géométrie devient le lieu de *l'étude des figures.* Cette rupture est très clairement identifiable dans les programmes scolaires.

Ce changement de contrat se manifeste par le changement de statut de l'activité mathématique, son changement de fonction. D'**élève-praticien**, tout orienté vers la maitrise d'un *savoir-faire,* on passe à l'**élève-théoricien** dont la justification de l'activité est celle de *connaître.* C'est au nom de la connaissance que l'évidence est à rejeter pour fonder une vérité et non au nom de la pratique. Il faut passer d'un lieu où le critère est celui de l'**efficacité**, à un autre où le critère est celui de la **rigueur** : la rigueur comme fin en soi est étrangère à la pratique, c'est une préoccupation de savant.

PREUVE PRAGMATIQUE ET PREUVE INTELLECTUELLE

La prise d'une décision est légitimée par l'affirmation de son caractère *nécessaire,* elle se distingue d'autres décisions *possibles* par son adéquation et sa validité. Aussi le processus de validation, qu'il s'accomplisse ou non dans l'explicitation d'une preuve, est fondé sur une analyse du pour et du contre, sur la prise en charge de contradictions potentielles. Par là ce processus est essentiellement *dialectique.* Ce fait est encore plus évident dans un contexte de débat dans le jeu des preuves et des réfutations. Hors du contexte social l'élaboration d'une preuve passe par une analyse critique et donc relève de la même dialectique: une preuve rigoureuse et définitive est une preuve qui ne sera pas réfutée. Voire, pour certains, une preuve qui ne serait pas réfutable.

L'accès possible ou non à l'expérience constitue une caractéristique de la situation qui va jouer un rôle central dans le fonctionnement de cette **dialectique de la validation**. La mise à exécution d'une décision, ou la réalisation du contenu d'une affirmation, permet ce que nous appellerons des validations pragmatiques de la décision, ou des **preuves pragmatiques** lorsqu'elles sont effectuées par l'élève lui-même pour établir la validité d'une proposition. Lorsque cet accès à la réalisation n'est pas possible alors les validations sont nécessairement intellectuelles. La production de ces **preuves intellectuelles** requiert notamment l'expression langagière des objets sur lesquelles elles portent et de leurs relations.

La nature même de la dialectique associée à ces deux types de preuves est fondamentalement différente. En particulier la contradiction apportée par les *faits* n'a pas le même statut que celle apportée par le *discours,* même si celui-ci consiste à invoquer les faits. Quant aux preuves elles-mêmes, elles n'établissent pas de la même façon les propositions qu'elles soutiennent:

- la preuve pragmatique est hypothéquée par la singularité de l'événement qui la constitue, il faut en accepter le caractère générique. Elle est de plus, tributaire d'un contingent matériel : outils imprécis, défaut de fonctionnement ;
- la preuve intellectuelle mobilise une signification contre une autre, une pertinence contre une autre, une rationalité contre une autre.

LA PLACE DU « SUJET-CONNAISSANT »

INTRODUCTION

Une fois réunies les conditions les plus favorables à la mise en œuvre d'une démarche de validation, ou à la production de preuves, nous pouvons observer chez les élèves (mais aussi dans le développement historique), que ces processus, ou les preuves produites, sont de natures très diverses.

À l'évidence les élèves ne produisent pas d'emblée des *démonstrations.* En revanche d'autres types de preuves sont identifiables que l'on peut notamment distinguer par leurs caractéristiques langagières, en fait directement liées à la façon dont sont repérés les opérations et les concepts à l'œuvre dans la résolution du problème.

CARACTÉRISTIQUES LANGAGIÈRES DES PREUVES.

Les preuves du praticien sont d'abord pragmatiques. Elles s'ancrent dans les faits, dans l'action. Elles se fondent sur des théorèmes-en-acte qui n'ont pas été prouvés mais *éprouvés* par la pratique.

La communication de ces preuves se fait par **ostension**. Les opérations et les concepts qu'elles mobilisent sont agis: « la preuve?.., ça marche! ». Cela ne signifie pas pour autant l'absence de tout langage, mais il n'est pas ici l'outil fondamental d'expression de la connaissance. Celle-ci est attestée par l'action et non par le discours.

Cet état caractérise les premiers moments de la genèse d'une connaissance (notamment au sens de Piaget) dans lesquels les conceptions des élèves fonctionnent comme des modèles implicites, modèles pour l'action, dans la résolution de problèmes.

On peut chercher à empêcher ce recours à la pratique par des contraintes diverses : les figures trop grandes dans le cas du symétriseur de Gras (1983), ou en mettant les individus dans une situation de débat où les éléments constitutifs de la validation doivent être formulés (phase finale de « la course à 20 », Brousseau 1975). Mais ce détachement du pragmatique ne va pas de soi : la pratique interdite peut être évoquée et le discours peut rester très près de ce que l'élève (ou le praticien) a vécu. Il s'exprimera dans le **langage de la familiarité** :

langage qui ne connaît: « *que les cas particuliers et les détails de l'intérêt pratique ou de la curiosité anecdotique, parlant toujours par noms propres de personnes ou de lieux, et ignorant, sauf pour combler les temps morts, les généralités vagues et les explications ad hoc qui sont de mise avec les étrangers, ce langage, que l'on n'adresse pas au premier venu passe sous silence tout ce qui va sans dire parce cela va de soi* »

(Bourdieu 1980 p. 153)

L'action explicitée par ce langage porte la marque du temps et de la durée, la marque de celui qui agit et du contexte de son action. Mais ce langage exige un relatif pas de côté pour que l'action puisse être décrite et expliquée, et donc prennent place ici les premiers moments d'une construction cognitive.

On se trouve à la frontière des preuves pragmatiques et des preuves intellectuelles, le passage pouvant se faire par la prise de conscience du caractère **générique** de la situation envisagée. En voici un exemple (tiré de Balacheff 1978) où le caractère générique de l'exemple est attesté, plaçant la preuve à un niveau supérieur à celui qui correspondrait à l'usage d'un simple cas particulier (Fig. 1).

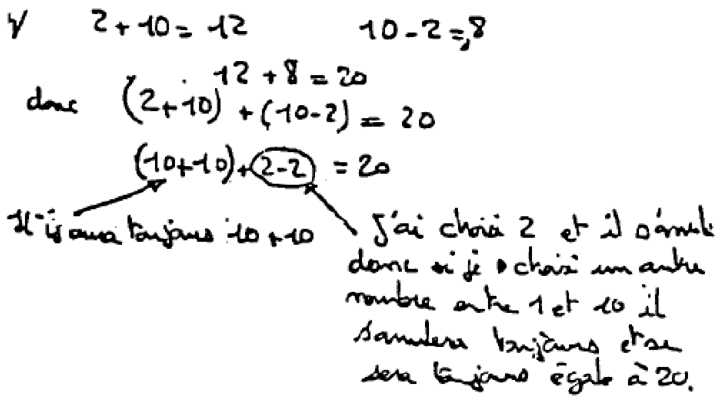


Fig. 1. Transcription du texte en annexe.

Le développement sur le terrain des preuves intellectuelles exige un changement de position; le locuteur doit prendre une position de théoricien dans laquelle la connaissance (jusque-là agie) devient l'objet de réflexions, de discours, voire de débats.

Pour parvenir à ce que nous reconnaîtrions pour une démonstration, le langage de la familiarité est insuffisant. Il faut que l'élève accède à un langage fonctionnel qui ne soit plus seulement un moyen de description des actions ou des opérations, mais un véritable outil de calcul intellectuel.

Le passage du langage de la familiarité au langage fonctionnel requiert en particulier:

- une **décontextualisation**, abandon de l'objet actuel, lieu effectif de la réalisation des actions, pour accéder à la classe des objets indépendamment des circonstances annexes ou anecdotiques de leur apparition ;
- une **dépersonnalisation**, en détachant l'action de celui qui en a été l'acteur et dont elle se doit d'être indépendante ;
- une **détemporalisation**, dégageant les opérations de leur date et de leur durée anecdotique ; ce processus est celui fondamental du passage de l'univers des actions à celui des relations et des opérations.

Les langages fonctionnels se caractérisent par l'introduction du symbolisme de façon plus ou moins importante. Au niveau le plus élevé on trouverait une langue strictement symbolique. En fait la pratique mathématique, pour des raisons d'économie, recourt à une association de la langue naturelle et de la langue symbolique, c'est le cas du *formalisme naïf* de Bourbaki. Cette association correspond en fait à une construction et à un fonctionnement linguistique spécifiques (Laborde 1982).

NATURE ET STATUT DE LA CONNAISSANCE

L'évolution des preuves pragmatiques vers les preuves intellectuelles et la démonstration, n'est pas seulement marquée par une évolution des caractéristiques langagières, mais aussi par celle du statut et de la nature de la connaissance. Les preuves pragmatiques s'appuient sur des savoirs pratiques essentiellement engagés dans l'action, les preuves intellectuelles demandent que ces connaissances puissent être prises comme objet de réflexion ou de débat. Cela correspond à une évolution classiquement décrite par la psychologie cognitive genevoise.

L'élaboration de démonstrations requiert de plus un statut particulier de ces connaissances. Elles doivent être constituées en une véritable théorie et être reconnues comme telle, c'est-à-dire acceptée par une communauté qui ne s'autorise plus à aller chercher où elle veut les arguments qu'elle utilise. La démonstration en mathématique s'appuie sur un corps de connaissances fortement institutionnalisé, ensemble de définitions, de théorèmes, de règles de déduction, dont la validité est socialement partagée. Ce principe est un des fondements de la rigueur mathématique, son appropriation par les élèves va requérir une construction cognitive particulière qui ne consiste pas seulement en un « marquage » des connaissances en question.

Le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, notamment la démonstration, repose ainsi sur trois pôles qui interagissent fortement:

- le pôle des connaissances : nature des connaissances des élèves (au sens de Vergnaud 1984),
- le pôles langagier, ou de la formulation,
- le pôles de la validation, ou des types de rationalité qui sous-tendent les preuves produites.

Le tableau suivant résume la correspondance entre ces différents pôles en référence aux hiérarchies qu'ils recouvrent[5] :

nature des conceptions	**formulation**	**validation**
Pratiques (savoir-faire)	Ostension langage de la familiarité	preuve pragmatique (théorème-en-acte)
Connaissance comme objet (savoir)	langage fonctionnel	preuves intellectuelles
Connaissance théorique et reconnue (savoir scientifique)	formalisme naïf	démonstration

Remarques sur le concept de théorème-en-acte

Le concept de *théorème-en-acte* a été introduit pour désigner « *les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de résolution de problèmes, étant entendu que cela ne signifie pas pour autant qu'il est capable de les expliciter ou de les justifier* » (Vergnaud 1981). L'utilisation du terme de théorème fait référence à un calcul sur des représentations, à des compositions déductives et à des inférences ; ou encore elle évoque le fonctionnement chez l'élève, de théories implicites. L'argument avancé par Vergnaud pour justifier la dénomination de *théorème-en-acte* est que « *la plupart des opérations de pensée impliquées dans les problèmes [...] peuvent être décrites par des théorèmes* » (Vergnaud 1983). On voit bien tout le parti que l'on peut tirer d'un tel concept pour une étude de la

5 Nos premières tentatives pour présenter ainsi ces dépendances, partent d'une présentation faite par Brousseau (1981 p. 114) pour organiser les comportements observés selon le type de situation et le type de connaissance.

genèse des connaissances mathématiques, cependant son utilisation risque d'être parfois un peu rapide et de céder à l'attraction de la métaphore.

Si ce qui est observé chez l'élève est de l'ordre du **théorème-en-acte** ; alors la réfutation de ce théorème que constitue une contradiction devrait provoquer une remise en question. Ce n'est pas toujours le cas,

- d'une part les actions du sujet ne sont pas nécessairement sous un contrôle de validation, comme par exemple dans le cas de la séquence suivante de calculs conduite de façon automatique par un élève de 15 ans manifestant de grandes difficultés en calcul algébrique (il s'agit d'une observation réalisée lors d'un entretien clinique) :

  $(Z+5)^2-7<0 \qquad (Z-5)(Z+5)-7<0 \qquad (Z-5)(Z-2)<0$

  (Mathieu 19-12-83)

  C'est encore le cas, par exemple, pour « le problème des deux cercles et du rectangle » (il s'agit de trouver une configuration de ces trois figures réalisant le maximum de points d'intersection) étudié par Audibert (1982), lorsque des élèves recherchent le placement d'un cercle par tâtonnement perceptif (il n'y a là que des corrections de perturbations relevées sur le résultat du tracé).

- d'autre part ces actions peuvent ne pas être associées à une anticipation, elles sont présentes parce que substantiellement attachées à la situation. Par exemple dans le cas de la détermination du périmètre d'un triangle tronqué (voir la figure ci-dessous) certains élèves tracent successivement des droites remarquables du triangle, d'autres font des mesures diverses puis des opérations sur les nombres obtenus... « pour voir ».

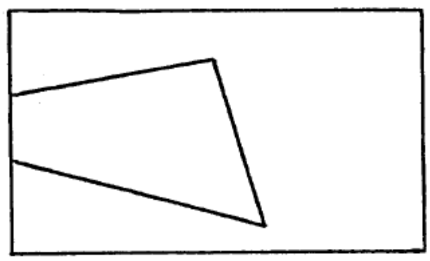
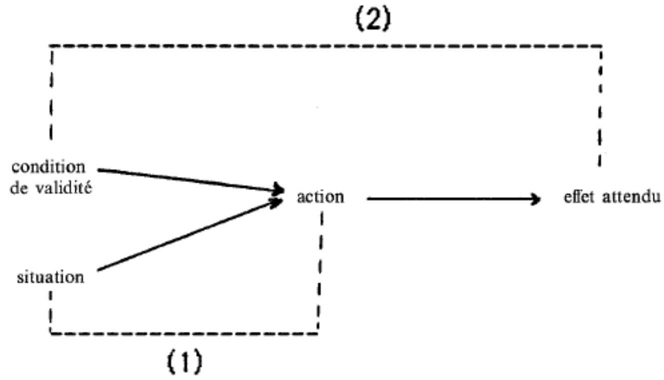


Fig.2

Il nous semble qu'il faut donc, pour attribuer à un observable de l'action des élèves le label de *théorème-en-acte,* ajouter une exigence: celle d'identifier les conditions de fonctionnement des opérations de pensée en question.

Considérons le schéma suivant:



Nous proposons de distinguer:

> (1) le fonctionnement qui, centré sur le couple situation-action, occulte la prise en charge de l'effet attendu et celle des conditions de l'action. Le sujet ne s'assure pas de ce que son action est légitime ni de ce que son résultat sera celui qu'il souhaite ;
>
> (2) le fonctionnement prenant en compte les conditions de validité de l'action et de son adéquation aux effets attendus. Dans ce cas seulement il nous parait pertinent de parler de *théorème-en-acte.*

Dans le premier cas nous parlerons de **règles d'action** dont le fonctionnement relève essentiellement du mode stimulus-réponse. L'échec de leur mise en œuvre n'est pas repéré par l'élève qui ne dispose pas, ou ne mobilise pas, d'instruments de validation. En particulier, la confrontation effet-obtenu / effet-recherché n'a pas lieu parce que l'anticipation elle-même n'a pas lieu.

Mais lorsque la prise de conscience de cet échec survient, par exemple sous la pression des faits, le premier progrès décisif sera de poser le problème des conditions de validité de l'action ou de son adéquation. C'est cet événement qui initiera la genèse du *théorème-en-acte* en engageant la construction du prédicat associé à l'action.

Par ailleurs la règle d'action qui se constitue ordinairement dans la pratique, peut en fait être la forme dégénérée d'un theorème(-en-acte). En effet la pratique routinière d'exercices conduit à instituer en habitude l'accomplissement de certaines opérations mathématiques et par économie entraine l'occultation des conditions de validité et celle de la prise en charge de la validation du résultat obtenu. Cette dégénérescence est le plus souvent associée à la constitution des sphères de pratique.

PREUVES ET REFUTATIONS

TYPES DE PREUVES

Des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles on peut reconnaître plusieurs types qui se différencient à la fois par le statut des connaissances engagées et par la nature de la rationalité sous-jacente.

L'**empirisme naïf** est dans cette hiérarchie le premier type de preuve que nous rencontrons. Il consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion, en voici un exemple tiré de l'étude que nous avons conduite sur le problème du dénombrement des diagonales d'un polygone[6]:

> Lionel et Laurent ont dénombré cinq diagonales dans un pentagone. Après une vérification de ce dénombrement sur une nouvelle représentation du pentagone, ils relisent l'énoncé du problème puis concluent:
>
> Laurent: « [...] calculer le nombre des ... ben, oui, c'est ... y'a 5 sommets et 5 diagonales. » Lionel: « ouais et on l'a prouvé. »
>
> Ils remettent à l'observateur un message décrivant leur dénombrement et son résultat. Celui-ci leur propose un hexagone. Lionel affirme alors, avec l'assentiment de Laurent: « Ben, y aura 6 diagonales. »

L'**expérience cruciale** est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible. Ainsi dans le cas du dénombrement des diagonales d'un polygone c'est le cas de cette élève qui propose à propos de leur conjecture: « on va faire une immense figure pour vérifier » (Laura ref. 198) ; ou le cas de cette élève qui à la

[6] Ce problème est actuellement étudié en collaboration avec une équipe de l'IREM de Lyon (Arsac et al.) dans le cadre d'une recherche sur les conditions didactiques d'un enseignement de la démonstration. Le triangle est tracé sur une feuille de papier, comme cela est indiqué sur la figure. Les élèves doivent décrire une procédure permettant le calcul du périmètre d'un triangle dans une telle situation sans recourir au prolongement de ses côtés.

suite d'un différend avec son partenaire propose: « essaie une fois avec 15 et puis si ça marche, ben ça veut dire qu'ça marche avec les autres » (Nadine ref. 91). Ainsi l'expérience cruciale consiste à provoquer un événement sur lequel « on ne se fait pas de cadeau » en affirmant que « si cela marche, alors cela marchera toujours ». Cette démarche qui reste fondamentalement empirique se distingue de l'empirisme naïf en ce que le problème de la généralisation est effectivement posé et que l'élève se donne un moyen de décider autrement que péremptoirement.

L'**exemple générique** consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une famille en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants. Dans l'exemple suivant (Fig. 3), Lionel et Laurent expriment d'abord leur conjecture en utilisant l'hexagone qui a dans leur projet une valeur d'exemple générique que souligne le « de même », puis ils évoluent vers une formulation qui se dégage des marques du particulier:

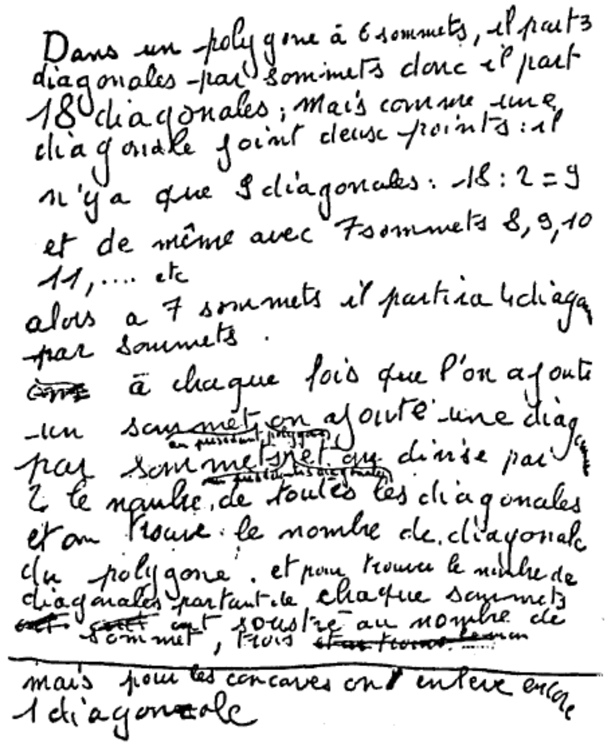
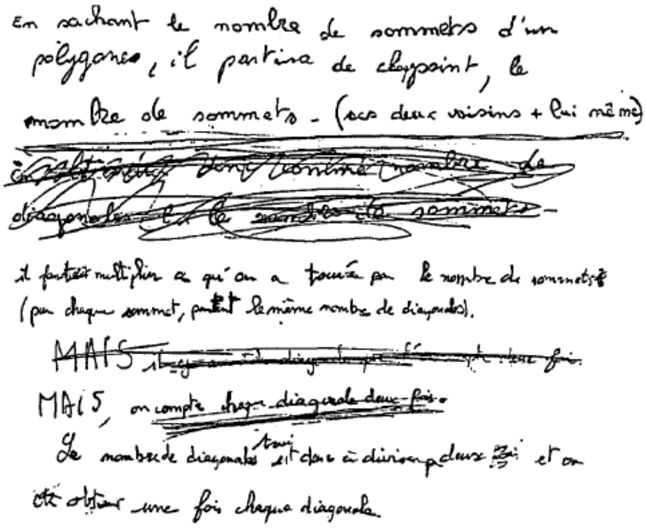

Dans un polygone à 6 sommets, il part 3 diagonales par sommets donc il part 18 diagonales; mais comme une diagonale joint deux points: il n'y a que 9 diagonales: 18 : 2 = 9
et de même avec 7 sommets 8, 9, 10 11, ... etc
alors a 7 sommets il partira 4 diag par sommets.
à chaque fois que l'on ajoute un sommet on ajoute une diag par sommet et on divise par 2 le nombre de toutes les diagonales et on trouve le nombre de diagonale du polygone. et pour trouver le nombre de diagonales partant de chaque sommets on soustrait au nombre de sommet, trois
mais pour les concaves on enlève encore 1 diagonale

Fig. 3. Transcription du texte en annexe.

L'**expérience mentale** invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre ; ce qui était le cas pour l'exemple générique. Le cas de Christophe et Bertrand en est une illustration (Fig. 4).


En sachant le nombre de sommets d'un polygone, il partira de chaque point, le nombre de sommets - (ses deux voisins + lui même)

~~donc le nombre de diagonales et le nombre de sommets~~ -

il faudrait multiplier ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets (par chaque sommet, partent le même nombre de diagonales).

~~MAIS~~ ~~on compte chaque diagonale deux fois.~~

MAIS, on compte chaque diagonale deux fois.

Le nombre de diagonales trouvé est donc à diviser par deux et on va obtenir une fois chaque diagonale.

Fig. 4. Transcription du texte en annexe.

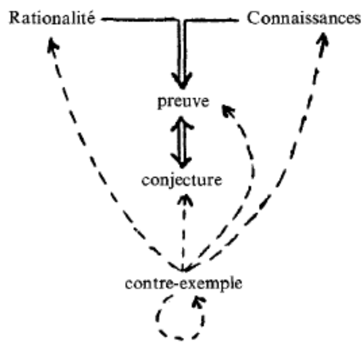
C'est là, quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Une marque de ce passage est une évolution des moyens langagiers mis en œuvre.

Pour ce qui concerne les mathématiques, de la preuve-expérience mentale à la démonstration on peut penser qu'il existe différents types de preuve (comme par exemple la preuve-analytique au sens de Lakatos), ils devraient se différencier par leurs niveaux de décontextualisation, de détemporalisation et de dépersonnalisation évoqués plus haut, ainsi que par leur niveau de formalisme (c'est-à-dire par la part respective de la langue naturelle et du langage symbolique). Cette typologie reste à faire.

STATUT ET CONSÉQUENCES DES RÉFUTATIONS

La dialectique de la validation est une dialectique des preuves et des réfutations. La perception la plus répandue du contre-exemple, dans la classe de mathématique, est celle d'une catastrophe dont la conséquence est l'abandon pur et simple des positions conquises lors de la résolution du problème. L'univers de la classe de mathématique se révèle de ce point de vue plus manichéen que dialectique. L'analyse de l'activité du mathématicien, ou de la communauté des mathématiciens, comme nous la présente par exemple Lakatos, fait apparaitre un fonctionnement bien différent et sûrement moins radical.

Prenant pour base l'analyse que propose Imre Lakatos, on peut différencier les conséquences d'un contre-exemple suivant qu'il rejaillit sur la conjecture, sur sa preuve, ou bien encore sur les connaissances ou leurs fondements rationnels. Il se peut même que le dépassement de la contradiction révélée par le contre-exemple passe par la critique et le rejet du contre-exemple lui-même. Le schéma ci-dessous explicitant la conjecture et sa preuve comme le produit conjoint des connaissances et de la rationalité d'un individu (traits pleins), résume les principales conséquences envisageables d'un contre-exemple (traits tirés); telles que l'amendement de la conjecture, la reprise d'une définition, le rejet du contre-exemple, etc.:



Ce schéma a l'avantage de la simplicité, il n'est cependant qu'une évocation de la multiplicité des retombées possibles d'un contre-exemple, entrer dans plus de détails dépasserait le cadre du présent texte. Nous y reviendrons ailleurs. Ce schéma nous suffira pour mettre en évidence un problème à notre sens fondamental et jusqu'ici occulté par les analyses didactiques (aussi bien que psychologiques).

Le caractère dialectique du développement des connaissances mathématiques, que Lakatos met en évidence pour ce qui concerne la phylogenèse et que nous connaissions déjà pour l'ontogenèse, a pour conséquence un problème qu'il ne souligne pas et qui ne pouvait échapper au didacticien: *qu'est ce qui détermine la légitimité du choix d'une réponse à un contre-exemple ?*

Les mathématiciens auxquels s'intéresse Lakatos semblent bien tous adhérer au même fond de rationalité. S'agissant d'élèves il n'en est plus de même: empirisme naïf ou expérience cruciale peuvent fonder des preuves et constituer les racines légitimes d'une conviction. Si donc nous voulons nous appuyer sur une contradiction révélée à l'élève pour obtenir que soient reconsidérés les fondements rationnels de sa conjecture et de sa preuve prétendue, comment éviter que le débat porte finalement sur la légitimité du contre-exemple ou sur un amendement à la conjecture ; ce qui peut apparaitre tout à fait légitime à l'élève, puisqu'après tout cette même rationalité lui suffit pour faire face à de nombreuses situations pratiques qu'il rencontre par ailleurs.

Comment éviter que face à un contre-exemple que lui produit l'enseignant, l'élève ne déclare qu'il s'agit là d'un cas particulier alors que sa conjecture est fondée sur un empirisme naïf ? Ce problème garde toute son importance à des niveaux plus avancés de la scolarité où l'étudiant discutera la légitimité d'un contre-exemple alors que, pour nous, ce qui est en question est la conception qu'il a de la connaissance en jeu.

Fonder l'apprentissage, c'est-à-dire la conception des situations didactiques, sur la prise de conscience de contradictions par les élèves, sur une dialectique de la validation, nécessite que soit prise en charge cette incertitude sur la nature du dépassement d'une contradiction. S'il est assez clair qu'il n'y a pas de déterminisme strictement cognitif, quel est alors le rôle des caractéristiques de la situation? Les interventions de l'enseignant et sa gestion du contrat didactique seront sûrement des éléments déterminants pour que soit jugé pertinente face à un contre-exemple la remise en question des connaissances plutôt que celle des fondements rationnels de la conjecture, ou encore la remise en question du contre-exemple lui-même plutôt que celle de la preuve.

La gamme des réactions possibles des élèves face à un contre-exemple est effectivement très étendue. Nous avons retrouvé à l'occasion d'une recherche expérimentale sur cette question[7] (à propos du dénombrement des diagonales d'un polygone) l'essentiel des comportements rapportés par Lakatos dans le cadre de son analyse historique. Nous en donnons ci-dessous quelques exemples.

---

[7] Les exemples produits ici sont issus des observations menées dans le cadre d'une recherche sur les processus de preuves et les contre-exemples. Le compte rendu de cette recherche est en cours de publication.

Naïma et Valérie avancent, sur la base de deux exemples, la conjecture que le nombre de diagonales est le nombre de sommets du polygone divisé par deux; confrontées à un premier contre-exemple, elles explicitent une définition qu'elles font évoluer au fur et à mesure de la rencontre de nouveaux cas :

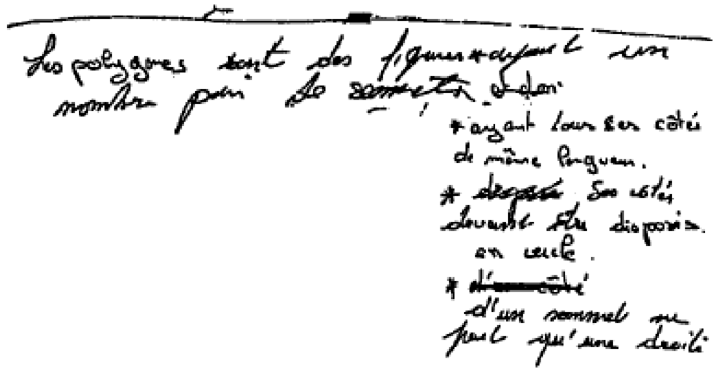

Les polygones sont des figures * ayant un nombre pair de sommets et dont
* ayant tous ses côtés de même longueur.
* ~~dont~~ ses côtés devant être disposés en cercle.
* ~~d'un côté~~ d'un sommet ne peut qu'une droite

Fig. 5. Transcription du texte en annexe.

À chaque contre-exemple une condition ad hoc est ajoutée à la définition, qui permet de l'écarter de la classe des objets concernés par la conjecture. Il est clair au terme de cette observation que les deux élèves jouent au jeu : chaque fois qu'il me contredit, j'ajoute une condition. Qu'elles sont les issues d'une telle situation?

Martine et Laura proposent la solution suivante :

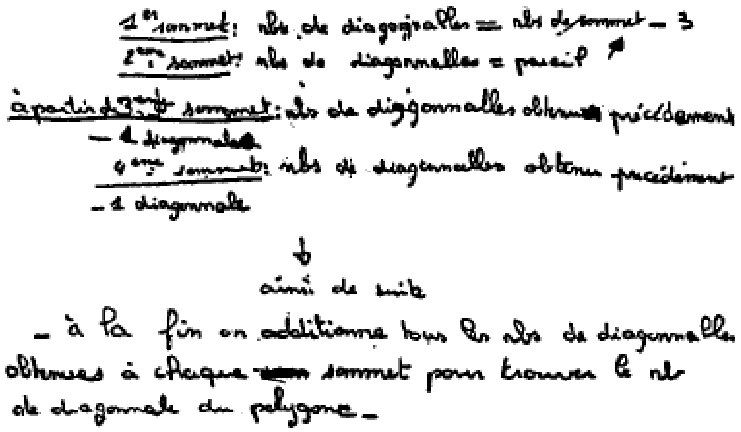

1er sommet : nbs de diagonalles = nbs de sommet − 3
2ème sommet : nbs de diagonnalles = pareil
à partir du 3ème sommet : nbs de diggonnalles obtenus précédement − 1 diagonnale
4ème sommet : nbs de diagonnalles obtenu précédement − 1 diagonnale
ainsi de suite
− à la fin on additionne tous les nbs de diagonnalles obtenues à chaque sommet pour trouver le nb de diagonnale du polygone −

Fig. 6. Transcription du texte en annexe.

Le premier contre-exemple, un polygone dont le dessin présente trois sommets alignés, est écarté par les élèves qui avertissent leurs interlocuteurs de ce qu'une telle configuration peut se présenter (voir leur texte ci-dessous). Le contre-exemple suivant est considéré comme le représentant d'un sous-ensemble particulier de polygones qui est retiré du domaine de validité de la conjecture initiale. Puis celle-ci est aménagée en proposant un calcul spécifique:

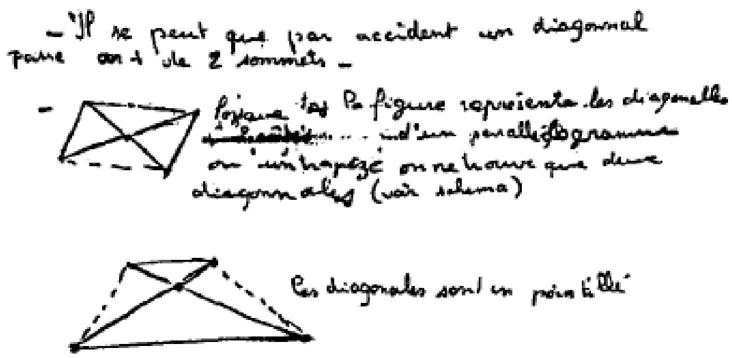


Fig. 7. Transcription du texte en annexe.

Blandine et Isabelle : leur conjecture initiale présente déjà la particularité de proposer un traitement différent pour deux classes de polygones. Cela provient des contradictions rencontrées dans le cours de la résolution du problème. Pour faire face au premier contre-exemple qui leur est opposé, elles aménagent leur conjecture en lui incorporant une condition qui écarte la classe des objets correspondants: « si le polygone est convexe... », le cas du triangle est en revanche traité comme un cas particulier à écarter:

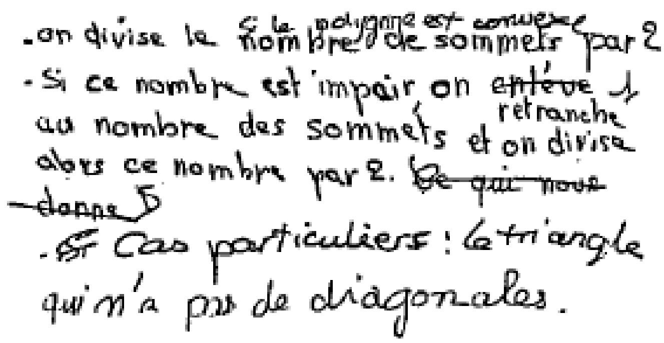


Fig. 8. Transcription du texte en annexe.

Assez souvent nous avons observé que le fait que le triangle n'ait pas de diagonales conduit à ne pas le considérer comme un polygone. Ce point de vue, tout à fait concevable, a par ailleurs pu être rencontré dans certains manuels scolaires.

CONCLUSION: DEUX PROBLEMES DIDACTIQUES

STATUT SCOLAIRE DE LA PREUVE

La pratique de la démonstration exige à la fois une rationalité et un état spécifique des connaissances. De plus cela signifie l'adhésion à une problématique qui n'est plus celle de l'efficacité (exigence de la pratique) mais celle de la rigueur (exigence théorique).

Cette analyse met en lumière une origine probable de l'échec de l'enseignement de la démonstration dans les classes françaises de quatrième. On dénonce souvent le rôle joué par une rupture du contrat didactique lors du passage de la classe de cinquième à celle de quatrième, on peut alors penser qu'une « bonne » négociation de ce contrat permettrait de résoudre ce problème. Mais les relations que nous avons montrées entre connaissance, formulation et validation (Tableau p.16) mettent en évidence que le problème ne peut être posé uniquement en terme de contrat ou d'analyse de la situation. La nature et le statut des connaissances engagées jouent un rôle essentiel.

En quatrième, où il apparait comme objectif explicite, l'enseignement de la démonstration a pour terrain privilégié la géométrie. Mais parce que la géométrie en sixième et en cinquième est d'abord une géométrie de l'observation, la nature des connaissances ainsi construites ne permettra pas de satisfaire d'emblée les exigences propres à la démonstration. Quelle que soit la qualité de la négociation d'un nouveau contrat didactique, il ne pourra y avoir un simple passage des preuves pragmatiques et fondamentalement empiriques, valides jusqu'alors, à la démonstration. Ce passage relève d'une construction sur le terrain à la fois des connaissances et de la rationalité. Comme toute construction cognitive il requiert une durée peu compatible avec les ambitions actuelles des programmes.

Très tôt, disons dès la sixième, doit être posé le problème de l'évolution des fondements rationnels de l'activité mathématique des élèves en même temps, et avec le même statut, que celui de la construction des savoirs. L'exigence de preuves doit donc pouvoir trouver sa place dès les pratiques mathématiques des premières classes, en acceptant que soit reconnue pour preuves autre chose que des démonstrations au sens strict. Il faudra pour cela prendre en considération la nature de la rationalité des élèves et les conditions de son évolution, mais aussi prendre en charge l'analyse didactique des critères acceptés de preuve qui doivent pouvoir évoluer dans le cours de la scolarité.

CONTRAINTES DIDACTIQUES

Toute suppression, tout dépassement d'une contradiction n'est pas nécessairement un progrès de la connaissance. L'accord sur ce qui pourra constituer un dépassement acceptable revient en fait à un consensus sur les critères de validation, et donc sur les règles du débat de validation. Avant de considérer ce problème sur le terrain de la didactique, rappelons l'exemple historique suivant du débat entre Darboux et Houël[8] sur la validité d'un énoncé de la théorie des fonctions:

« Votre lettre n'est qu'un aveu et cela me suffit. Vous n'avez rien à objecter, c'est évident. Du reste, je vous ferai remarquer que vous me parlez toujours de ces fonctions drôlatiques. Je ne les considère pas plus que vous. Mais il faut séparer le bon grain de l'ivraie par des caractères précis, et pour cela il ne faut admettre que ce qui est contenu clairement dans la définition d'une chose. Et bien il n'est pas évident qu'une fonction continue ait une valeur maxima qu'elle atteigne effectivement et voyez les conséquences qu'a votre manière de procéder » (30 Avril 187(2))

« Toutes les fonctions qui mettent en défaut vos théorèmes sont des fonctions dont vous ne voulez pas vous occuper. Cela ne me parait pas une raison car si votre raisonnement est exact, il doit reposer sur telles hypothèses qui écartent d'elles-mêmes une fois admises ces fonctions bizarres auxquelles vous ne voulez pas avoir à faire » (24 Septembre 1872)

« Remarquez que votre point de vue revient à dire: j'exclus toutes les fonctions pour lesquelles ma démonstration est inexacte. Alors à quoi bon faire une démonstration. » (23 Décembre 1873)

« [...] pour mettre vos raisonnement en défaut j'ai le droit de prendre toute fonction pourvu qu'elle satisfasse, non pas aux conditions que vous énoncez sans vous en servir, mais aux seules conditions employées dans vos raisonnements.
[...] j'ai le droit de prendre tous les exemples possibles pourvu qu'ils satisfassent aux conditions de vos raisonnements et je soupçonne fort que votre définition d'exemples bizarres, saugrenus, coïncide avec la suivante, gênants, contraires au théorème. » (19 Février 1874)

« [...] Je vous rattraperais sur ces fonctions saugrenues et vous prouverais que ce ne n'est pas d'elles qu'il est question mais de ce principe de logique.

[8] La correspondance 1872-1882 de Darboux et Houël est publiée en annexe de Gispert H. (1983) « Sur les fondements de l'analyse en France », Archive for History of Exact Sciences 28-1, 37-106.

Toutes les fois qu'un raisonnement A conduit à une conclusion B sans écarter expressément une hypothèse H (voilà le hic) et que B' fondée sur H est contraire à B le raisonnement est faux ou incomplet » (probablement 1875)

Et enfin :

« Vous me demandez si votre démonstration donnée p.245-246 de votre premier volume [...] est rigoureuse. [...] Votre démonstration s'applique certainement à toutes les fonctions que vous avez considérées dans votre ouvrage. » (11 Février 1882)

Cet exemple d'un débat entre deux mathématiciens, qui se déroule sur près de 10 ans, souligne la complexité du problème qui nous occupe. Si un contre-exemple ne signifie pas le rejet pur et simple d'une conjecture, la légitimité des voies empruntées pour dépasser la contradiction qu'il atteste ne va pas de soi. Elle se trouve en fait au centre du débat de validation et de la remise en question éventuelle des critères de validation eux-mêmes.

Mais au fond, ce qui sépare Darboux et Houël ne nous paraît pas être du seul ressort de la logique. Même pour ces savants, le problème posé est un problème de pratique qu'a-t-on intérêt à décider du point de vue de la pratique du théoricien ? Va-t-on bouleverser un corps de connaissances pour quelques difficultés rencontrées ? Il peut s'avérer plus intéressant (plus économique) de les absorber sous la forme de quelques hypothèses supplémentaires à ajouter au théorème. Pourtant Houël est sûrement autant que Darboux, soucieux d'être rigoureux.

Le contexte scolaire est bien différent. Les élèves n'y ont pas la liberté du choix d'une issue à une contradiction. Les connaissances mathématiques préexistent à tout événement qui pourrait avoir lieu dans la classe. II en est de même des critères de validité d'un énoncé.

L'épistémologie scolaire, fondamentalement platonicienne, marque ainsi des limites qui ne peuvent être franchies entre les conditions de l'activité du mathématicien et celles de l'activité de l'élève. Il revient à l'enseignant de garantir une évolution des connaissances de l'élève et notamment de sa rationalité en conformité avec ces références. Le fait qu'une explication constitue une preuve peut faire l'objet d'un consensus dans la classe mais cela est insuffisant, l'enseignant doit s'assurer que ce consensus se réalise sur des bases acceptables. Éventuellement il doit trouver les moyens d'agir pour faire évoluer les choses. II se heurte alors à la contradiction de gérer des situations assez isolées pour que les élèves aient la responsabilité des décisions qu'ils prennent, mais assez dépendantes pour qu'il puisse intervenir sur les critères de cette décision.

Notre problème est actuellement celui de la détermination des variables didactiques dont la manipulation permette un tel contrôle, et par ailleurs d'analyser la nature et les voies d'un contrat didactique qui permettrait les ingérences de l'enseignant dans un processus de décision initialement dévolu aux élèves.

Enfin se pose le problème de l'institutionnalisation qui est le moyen de fermer un débat de validation. En effet si on peut concevoir que dans la pratique professionnelle de la recherche en mathématiques une preuve soit une preuve jusqu'à preuve du contraire, il nous parait difficile de tenir une telle position dans la situation scolaire. À un moment ou à un autre les élèves, parce qu'« ils sont là pour apprendre », ont besoin d'une garantie sur la validité de leurs productions, et si des positions contradictoires existent dans la classe elles ne peuvent très longtemps subsister ensemble. L'enseignant est amené à trancher, à donner un statut à certains énoncés, certaines preuves, certaines interprétations, pour les confirmer ou les rejeter. Le processus par lequel ce label est donné n'est pas sans conséquences au plan cognitif.

De plus, une fois la preuve acceptée, la validité d'un énoncé ne peut plus être remise en question, il faudra pour s'intéresser à de nouvelles preuves trouver d'autres raisons. L'acceptation par l'enseignant d'une preuve qui ne pourrait être reconnue comme une démonstration pose alors le problème didactique des conditions d'une reprise ultérieure qui serait acceptable pour les élèves.

ANNEXE

Transcriptions des manuscrits d'élèves donnés en illustration.

Texte de la Figure 1, nous ne transcrivons ici que la partie du texte rédigée en langue naturelle :

> Il y aura toujours 10+10//
>
> J'ai choisi 2 et il s'annule/donc si je choisi un autre/nombre entre 1 et 10 il/s'annulera toujours et se/sera toujours égal à 20//

Texte de la Figure 3 :

> Dans un polygone à 6 sommets, il part 3/diagonales par sommets donc il part/18 diagonales; mais comme une/diagonale joint deux points: il/n'y a que 9 diagonales: 18 ÷ 2 = 9/et de même avec 7 sommets 8, 9, 10/11, ... etc//
> alors à 7 sommets il partira 4 diagonales/par sommets//
> à chaque fois que l'on ajoute/un sommet>au précédent polygone<on ajoute une diagonale/par sommets > au précédentes diagonales < on divise par/2 le nombre de toutes les diagonales/et on trouve le nombre de diagonale/du polygone et pour trouver le nombre de/diagonales partant de chaque sommets/on soustré au nombre de/sommet, trois// mais pour les concaves on enleve encore/1 diagonale/

Texte de la Figure 4 :

> En sachant le nombre de sommets d'un/polygone, il partira de chaque point, le/nombre de sommets- (ses deux voisins+lui-même)//
> il faudrait multiplier ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets/(par chaque sommet, partent le même nombre de diagonales)//
> MAIS, on compte chaque diagonale deux fois//
> Le nombre de diagonales trouvé est donc à diviser par deux et on/obtient une fois chaque diagonale//

Texte de la Figure 5 :

> Les polygones sont des figures ayant un/nombre pair de sommets//
> *ayant tous ses côtés/de même longueur//
> *ses côtés/devant être disposés/en cercle//
> *d'un sommet ne/part qu'une droite//

Texte de la Figure 6 :

> 1er sommet: nbs de diagonnalles=nbs de sommet-3//
> 2eme sommet: nbs de diagonnalles=pareil//

à partir du 3eme sommet: nbs de diagonnalles obtenu précédement/- 1 diagonnalle//
4eme sommet: nbs de diagonnalles obtenu précédement/- 1 diagonnale// ainsi de suite//
- à la fin on additionne tous les nbs de diagonnalle/obtenues à chaque sommet pour trouver le nbs/de diagonnale du polygone//

Texte de la Figure 7 :

- Il se peut que par accident un diagonnal/passe en +de 2 sommets-//
- lorsque la figure représente les diagonnalles/d'un parallélogramme/ou un trapèze on ne trouve que deux/diagonales (voir schéma)// les diagonales sont en pointillé//

Texte de la Figure 8:

>si le polygone est convexe</- on divise le nombre de sommets par 2//
- si ce nombre est impair on retranche 1 au nombre des sommets et on divise/alors ce nombre par 2//
cas particuliers: le triangle/qui n'a pas de diagonales//

REFERENCES

Audibert G. (1982) *Démarches de pensée et concepts utilisé par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane*. Thèse d'état. Montpellier : Université des sciences et techniques du Languedoc.

Balacheff N. (1978) Une utilisation et une étude de la classification proposée par A. W. Bell pour l'étude des preuves formulées par des élèves. *Séminaire de pédagogie des mathématiques*, pp.1-22. Grenoble : IMAG-Université 1.

Balacheff N. (1987) Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture: le cas de « la somme des angles d'un triangle ». *Cahier de didactique des mathématiques* 39. Paris : Université de Paris VII-IREM.

Balacheff N., Laborde C. (1985) Langage symbolique et preuves dans l'enseignement mathématique: une approche sociocognitive. In : Mugny G. (ed.) *Psychologie sociale du développement cognitif*. Berne : P. Lang.

Bodin A. (1980) *Mise au point d'un questionnaire. Observation. Entretiens de binômes et individuels*. DEA de Didactique des mathématiques, Université de Strasbourg.

Bourdieu P. (1980) *Le sens pratique*. Paris : éditions de Minuit.

Brousseau G. (1975) *Étude de l'influence des conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme*. IREM de Bordeaux.

Brousseau G. (1977) *L'étude des processus d'apprentissage en situations scolaires*. Cahier n°18. IREM de Bordeaux.

Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2(1) 37-128.

Brousseau G. (1983) Etudes de questions d'enseignement. Un exemple: la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 183-226. Grenoble : IMAG-Université 1

Douady R. (1985) The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability. In : *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, 33-52.

Gras R. (1983) Instrumentation de notions mathématiques. Un exemple: la symétrie. *Petit X*, n°1, 7-40. IREM de Grenoble.

Grize J. B., Pidraut-le Bonniec G. (1983) La contradiction. Paris : P.U.F.

Laborde C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique*. Thèse d'état. Université 1 de Grenoble.

Lakatos I. (1976) *Preuves et réfutations.* Hermann Ed., Paris 1984. (Edition originale en anglais sous le titre « Proofs and Refutations » C.U.P., 1976)

Piaget J. (1974) *Les relations entre affirmations et négations*. *Recherches sur la contradiction,* Vol. 2. Paris : PUF.

Popper K. R. (1972) *La connaissance objective.* Bruxelles : Ed. Complexe (1978).

Robert A. (1982) *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur.* Thèse d'état. Paris : Université de Paris VII.

Tonnelle J. (1982) Évidence et démonstration en géométrie. *Actes de la 11° École d'été de didactique des mathématique.* Ed. IREM d'Orléans.

Vergnaud G., Rouchier A. *et al.* (1983) Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième. *Recherches en didactique des mathématiques* 4(1) 71-120.

Vergnaud G. (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Actes du V° colloque du* *groupe Psychology of Mathematics Education,* Vol. II, 7-17. Grenoble : IMAG-Université 1.

Vergnaud G. (1983) Pourquoi une perspective épistémologique est-elle nécessaire pour la recherche sur renseignement des mathématiques. In : Bergeron J. (ed.) *Actes de la V° rencontre annuelle PME- NA.* Montréal : UQAM.

Vergnaud G. (1984) Interactions sujet-situations. In : *Actes de la III° École d'été de didactique des mathématiques,* 23-42. Grenoble : Institut IMAG.