Polynomialité d'anneaux de représentations modulaires projectives

Hélène Pérennou

▶ To cite this version:

Hélène Pérennou. Polynomialité d'anneaux de représentations modulaires projectives. 2017. hal-01615039

HAL Id: hal-01615039
https://hal.science/hal-01615039

Preprint submitted on 12 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

POLYNOMIALITÉ D'ANNEAUX DE REPRÉSENTATIONS MODULAIRES PROJECTIVES

HÉLÈNE PÉRENNOU

ABSTRACT. Consider the Grothendieck group of finite type projective modular representations of the symmetric groups on n letters, or more generally, of its wreath product with a finite group. They form a graded group, with a product defined using induction. We show that the resulting graded ring is a polynomial ring.

INTRODUCTION

On s'intéresse aux représentations modulaires des groupes symétriques S_n. Pour p premier, et pour un entier naturel n, notons $K_0^{\mathbb{F}_p}(S_n)$ le groupe de Grothendieck des $\mathbb{F}_pS_n$-modules projectifs de type fini. Pour tous (k,l) dans $\mathbb{N}^2$ tels que $k+l=n$, l'identification du groupe $S_k \times S_l$ au sous-groupe de S_n qui stabilise le sous-ensemble $\{1,\dots,k\}$ de $\{1,\dots,n\}$ permet de définir le foncteur d'induction

$$\_ \uparrow_{S_k\times S_l}^{S_n} : K_0^{\mathbb{F}_p}(S_k) \otimes K_0^{\mathbb{F}_p}(S_l) \to K_0^{\mathbb{F}_p}(S_n)$$

On note $K_0^{\mathbb{F}_p}(S_\infty)$ l'anneau gradué dont le sous-anneau des éléments homogènes de degré n est $K_0^{\mathbb{F}_p}(S_n)$ et où la multiplication est donnée par ces foncteurs d'inductions. On peut préciser la structure de cet anneau :

Théorème A. *L'anneau $K_0^{\mathbb{F}_p}(S_\infty)$ est un anneau de polynômes avec un générateur en chaque degré premier à p.*

Ce résultat est sans doute connu des spécialistes, cependant nous n'avons pu trouver une référence. Il a été démontré par Robert Oliver et Pierre Vogel [Vog88] en 1988, mais il semble que le tapuscrit ait été perdu.

On peut en fait être un peu plus général en considérant les produits en couronne d'un groupe fini G quelconque avec les groupes symétriques. Soit k un corps de caractéristique p. On note $K_0^k(G \wr S_n)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $kG \wr S_n$-modules projectifs de type fini. Pour tous (k,l) dans $\mathbb{N}^2$ tels que $k+l=n$, une identification naturelle du groupe $(G \wr S_k) \times (G \wr S_l)$ à un sous-groupe de $G \wr S_n$ permet de définir le foncteur d'induction

$$\_ \uparrow_{(G\wr S_k)\times(G\wr S_l)}^{G\wr S_n} : K_0^k(G\wr S_k) \otimes K_0^k(G \wr S_l) \to K_0^k(G\wr S_n).$$

Date: 11 octobre 2017.

L'auteur remercie le Centre Henri Lebesgue ANR-11-LABX-0020-01 ainsi que le projet ANR-16-CE40-0003 ChroK pour leur soutien.

On note alors $K_0^k(G \wr S_\infty)$ l'anneau gradué dont le sous-anneau des éléments homogènes de degré n est $K_0^k(G \wr S_n)$ et où la multiplication est donnée par ces foncteurs d'induction. A nouveau, on peut en préciser la structure :

Théorème B. *Soit k un corps de caractéristique p. Si k est un corps de rupture pour le groupe fini G, l'anneau $K_0^k(G \wr S_\infty)$ est un anneau de polynômes.*

Ce papier s'organise de la manière suivante. On commence par rappeler un résultat bien connu en caractéristique nulle (attribué à [Gei77] par [Car83]) : si on note $R^{\mathbb{Q}}(S_n)$ le groupe de Grothendieck des représentations de S_n sur $\mathbb{Q}$ et $R^{\mathbb{Q}}(S_\infty)$ l'anneau gradué qui s'en déduit, il affirme que $R^{\mathbb{Q}}(S_\infty)$ est un anneau de polynômes sur $\mathbb{Z}$, avec pour générateurs les représentations triviales. Ensuite, la section 1.2 expose la généralisation du résultat précédent aux représentations des produits en couronne, toujours en caractéristique nulle [Zel81, 7] : si K est un corps de caractéristique nulle, assez grand, $R^K(G \wr S_\infty)$ est isomorphe à un produit tensoriel fini de copie de $R^K(S_\infty)$. C'est donc également un anneau de polynôme sur $\mathbb{Z}$. On se réfère essentiellement à [Zel81] pour ces résultats en caractéristique nulle, on se place donc dans le cadre des PSH-algèbres.

La seconde partie démontre le théorème A. Celle-ci n'utilise d'outil supplémentaire que la théorie de Brauer qui établit un lien entre les représentations modulaires et les représentations en caractéristique nulle. Ce sont des arguments similaires qui démontrent le théorème plus général B dans la troisième partie.

1. Anneau de représentations en caractéristique nulle

Dans cette section on rappelle les résultats de [Zel81] que nous utiliserons par la suite. Pour les détails, on pourra aussi consulter [GR16, 3].

1.1. Cas des groupes symétriques.

Notation 1.
- K désigne un corps de caractéristique 0.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des partitions de n et $\mathcal{P} = \bigsqcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions. On munit $\mathcal{P}$ de l'ordre lexicographique. Le plus grand élément de $\mathcal{P}_n$ est la partition avec une unique part de taille n.
- Pour $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots)$ une suite d'indéterminées, on note $\Lambda(\mathbf{t}) = \Lambda$ l'anneau gradué des fonctions symétriques en $\mathbf{t}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On note, pour un entier positif n :

$$h_n = \sum_{i_1 \leq \ldots \leq i_n} t_{i_1} \ldots t_{i_n}$$

avec la convention $h_0 = 1$.

Rappelons un résultat classique sur les séries symétriques.

Théorème 1. *L'anneau des séries formelles est un anneau de polynômes. Précisément :*

$$\Lambda = \mathbb{Z}[h_i | i \geq 1]$$

En fait, c'est une PSH-algèbre pour la multiplication et la co-multiplication usuelles [Zel81, 5].

– On note $R^K(S_n)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations du groupe symétrique S_n sur K. On note également $R^K(S_\infty)$ le groupe abélien gradué dont les éléments homogènes de degré n forment $R^K(S_n)$. C'est une algèbre de Hopf, la multiplication étant induite par les foncteurs d'induction $(\_) \uparrow_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}}$ et la co-multiplication par les foncteurs de restriction $(\_) \downarrow_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}}$ (voir [Zel81] pour les détails, notamment du fait que la co-multiplication est un morphisme d'anneaux). On définit un produit scalaire sur $R^K(S_\infty)$ en posant

$$\langle \chi_\lambda, \chi_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda,\lambda'}$$

sur la base $\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ des simples $\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$.
– On note $\mathrm{CF}^K(S_\infty)$ l'anneau gradué des fonctions de classes des S_n. Prenant les caractères, on plonge $R^K(S_\infty)$ dans $\mathrm{CF}^K(S_\infty)$, et la structure s'étend pour faire de $\mathrm{CF}^K(S_\infty)$ une algèbre de Hopf, qu'on identifie à $K \otimes R^K(S_\infty)$.
– On note $c_n = n\mathbb{1}_n$, où $\mathbb{1}_n$ est la classe caractéristique du cycle d'ordre n dans S_n. Si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathcal{P}_n$, on note $c_\lambda = c_{\lambda_1} \ldots c_{\lambda_k}$.
  On a [Zel81, 6.3] :

$$\mathrm{CF}^K(S_\infty) = K[c_n | n \geq 1]$$

Le résultat de structure des représentations des groupes symétriques en caractéristique nulle est le suivant :

Théorème 2. *[Zel81, 6] On dispose d'un isomorphisme de PSH-algèbres*

$$R^K(S_\infty) \xrightarrow{\sim} \Lambda$$

qui envoie la base orthonormée des caractères irréductibles sur la base orthonormée des fonctions de Schur. De plus cet isomorphisme envoie x_n sur h_n pour tout entier positif n. En particulier

$$R^K(S_\infty) = \mathbb{Z}[x_n | n \geq 1]$$

1.2. **Cas des produits en couronne.** On donne ici l'analogue du résultat précédent pour les représentations des produits en couronne avec les groupes symétriques.

Notation 2.
– G désigne un groupe fini et pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $G \wr S_n$ le produit en couronne de G avec S_n.
– A présent, K est un corps de rupture pour G, toujours de caractéristique 0.
– On note $\mathrm{Cl}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de G et $N = \#\,\mathrm{Cl}(G)$.
– De même, on note $\mathrm{Cl}(G \wr S_n)$ l'ensemble des classes de conjugaison de $G \wr S_n$. Ces classes sont paramétrées par l'ensemble $\{\psi : \mathrm{Cl}(G) \to \mathcal{P} | \sum_{C\in\mathrm{Cl}(G)} |\psi(C)| = n\}$.
– On note $\Omega(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de G sur K et $\{\rho_1, \ldots, \rho_N\}$ ces représentations irréductibles.
– $R^K(G \wr S_\infty)$ est l'anneau gradué dont la multiplication est donnée par les foncteurs d'induction et la co-multiplication donnée par les foncteurs de restriction. C'est une algèbre de Hopf [Zel81, 7.1].
– $\mathrm{CF}^K(G \wr S_\infty)$ l'anneau gradué des fonctions de classe des $G \wr S_n$. A nouveau la multiplication se déduit de celle sur $R^K(G \wr S_\infty)$.

– Soit $C = [g]$ la classe de conjugaison associée à g dans G, on note

$$\xi_{n,c} = \frac{|G \wr S_n|}{|C|} \mathbb{1}_{n,C}$$

où $\mathbb{1}_{n,C}$ est la fonction caractéristique de la classe de $g.(1\dots n)$ dans $G \wr S_n$. L'anneau $\mathrm{CF}^K(G \wr S_\infty)$ est une algèbre de Hopf qui s'identifie à $K \otimes R^K(G \wr S_\infty)$ et on a [Zel81, 7.7] :

$$\mathrm{CF}^K(G \wr S_\infty) = K[\xi_{n,C} | C \in \mathrm{Cl}(G), n \geq 1]$$

Définition 1. Soit χ_λ une représentation irréductible de S_n et $\rho \in \Omega(G)$. On définit $\chi_{\lambda,\rho}$ une représentation de $G \wr S_n$ qui agit sur l'espace de la représentation $\chi_\lambda \otimes (\rho^{\otimes n})$ par :

$$\sigma(u \otimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) = \sigma(u)(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)})$$
$$\mathbf{g}(u \otimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) = u \otimes (g_1 v_1 \otimes \dots \otimes g_n v_n))$$

où $\sigma \in S_n$ et $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$.

Ces constructions induisent pour chaque $\rho \in \Omega(G)$ un morphisme Φ_ρ définit sur la base des classes d'irréductibles par :

$$\begin{array}{rcl} \Phi_\rho : R^K(S_\infty) & \to & R^K(G \wr S_\infty) \\ \chi_\lambda & \mapsto & \chi_{\lambda,\rho} \end{array}$$

On notera plus simplement Φ_k pour Φ_{ρ_k}.

Définition 2. Soit $\varphi : \Omega(G) \to \mathcal{P}$ est tel que $\sum_{\rho \in \Omega(G)} |\varphi(\rho)| = n$. On a

$$(\chi_{\varphi(\rho_1),\rho_1} \otimes \dots \otimes \chi_{\varphi(\rho_N),\rho_N})$$

une représentation de $(G \wr S_{|\varphi(\rho_1)|}) \times \dots \times (G \wr S_{|\varphi(\rho_N)|})$. Ce groupe s'identifie à un sous-groupe de $G \wr S_n$ et on note χ_φ la représentation induite sur $G \wr S_n$.

Théorème 3. *Les représentations irréductibles de $G \wr S_n$ sur K sont les représentations χ_φ où φ parcours l'ensemble des applications $\Omega(G) \to \mathcal{P}$ est tel que $\sum_{\rho \in \Omega(G)} |\varphi(\rho)| = n$. De plus, on a un isomorphisme de PSH-algèbres :*

$$\begin{array}{rcl} R^K(G \wr S_\infty) & \to & \bigotimes_{i=1}^N R^K(S_\infty) \\ \chi_\varphi & \mapsto & \chi_{\varphi(\rho_1),\rho_1} \otimes \dots \otimes \chi_{\varphi(\rho_N),\rho_N} \end{array}$$

et l'isomorphisme réciproque est $\Phi = \Phi_1 \otimes \dots \otimes \Phi_N$. En particulier,

$$R^K(G \wr S_\infty) = \mathbb{Z}[\Phi_k(x_n) | k \in [\![1; N]\!], n \geq 1]$$

On dispose donc pour chaque n de deux bases de l'espace des éléments primitifs de $\mathrm{CF}^K(S_n)$, à savoir $\{\Phi_\rho(c_n) | \rho \in \Omega(G)\}$ et $\{\xi_{n,C} | C \in \mathrm{Cl}(G)\}$. La proposition suivante donne les formules changement de bases.

Proposition 4. *[Zel81, p. 103] Pour tout $\rho \in \Omega(G)$ et $C \in \mathrm{Cl}(G)$, on note $\rho(C)$ la valeur du caractère de ρ sur la classe de conjugaison C. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\xi_{n,C} = \sum_{\rho \in \Omega(G)} \overline{\rho(C)}.\Phi_\rho(c_n)$$

et

$$\Phi_\rho(c_n) = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \rho(C).\frac{|C|}{|G|}.\xi_{n,C}$$

2. Anneau des représentations modulaires projectives des groupes symétriques

On peut à présent s'intéresser aux représentations modulaires projectives des groupes symétriques. On prouve le théorème A à la fin de cette section.

Notation 3.
- Dans toute la suite, p désigne un nombre premier fixé ;
- On se donne (K, A, k) un système p-modulaire, i.e. A est un anneau de valuation d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, $k = A/\mathfrak{m}$ et K est le corps des fractions de A ;
- On note $\mathcal{P}_{n,reg}$ l'ensemble des partitions où toutes les parts sont de longueur première à p et $\mathcal{P}_{reg} = \bigsqcup_{n\geq 0} \mathcal{P}_{n,reg}$.

Remarque 1. *Les classes de conjugaison p-régulières de S_n (i.e. d'élément d'ordre premier à p) sont paramétrées par $\mathcal{P}_{n,reg}$.*

- On note $K_0^k(S_n)$ (resp. $K_0^A(S_n)$) le groupe de Grothendieck de la catégorie des kS_n-modules (resp. AS_n-modules) projectifs de type fini et $K_0^k(S_\infty)$ (resp. $K_0^A(S_\infty)$) le groupe gradué dont les éléments homogènes de degré n s'identifient aux éléments de $K_0^k(S_n)$ (resp. $K_0^A(S_n)$).

Remarque 2. *Comme tout corps est un corps de rupture pour les $(S_n)_{n\geq 0}$ [KJ84, 2.1.12], on a toujours $R^K(S_\infty) \cong R^{\mathbb{Q}}(S_\infty)$ et $K_0^k(S_\infty) \cong K_0^{\mathbb{F}_p}(S_\infty)$.*

- On note $\mathrm{CF}_{reg}^K(S_\infty)$ l'ensemble des fonctions de classes à valeurs dans K qui s'annulent sur les éléments d'ordre divisible par p. L'anneau $K \otimes K_0^k(S_\infty)$ s'identifie à $\mathrm{CF}_{reg}^K(S_\infty)$ [Ser71, 18.3] et $\mathrm{CF}_{reg}^K(S_\infty) = K[c_n | p \nmid n]$.

Avant de donner les dernières notations, on rappelle quelques éléments de théorie des représentations modulaires. Soit G un groupe et (K, A, k) un système p-modulaire, avec $k = A/\mathfrak{m}$.

Proposition 5. *[Ser71, 14.4] La réduction modulo $\mathfrak{m}$ induit un isomorphisme entre $K_0^A(G)$ et $K_0^k(G)$.*

Définition 3. En composant l'isomorphisme réciproque de la réduction mod. $\mathfrak{m}$ avec le morphisme induit par l'extension des scalaires de A vers K, on définit un morphisme $e_G : K_0^k(G) \to R^K(G)$

Proposition 6. *[Ser71, 16.1,2] Le morphisme e_G est injectif.*

On peut caractériser l'image de e_G.

Proposition 7. *[Ser71, 16.2] L'image du morphisme $K_0^k(G) \to R^K(G)$ est l'ensemble des éléments de $R(G)$ dont le caractère est nul sur les éléments d'ordre divisible par p.*

- On note $\varepsilon_n = e_{S_n} : K_0^k(S_n) \to R^K(S_n)$ le morphisme de la définition 3 pour $G = S_n$. On note $\varepsilon : K_0^k(S_\infty) \to R^K(S_\infty)$ le morphisme induit par la famille $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemme 8. *L'application ε induit un isomorphisme de $K_0^k(S_\infty)$ vers le sous-anneau de $R^K(S_\infty)$ formés des éléments dont le caractère est dans $\mathrm{CF}_{reg}^K(S_\infty)$.*

Démonstration. D'après les propositions 6 et 8, les morphismes ε_n sont injectifs et ont pour images les classes de représentations dont le caractère est nul sur les éléments d'ordre divisible par p. Il reste donc à vérifier que ε est multiplicatif. D'après la définition de ε (voir la définition 3), il suffit de remarquer l'induction commute avec l'extension des scalaires. □

Avant d'énoncer le théorème principal pour les groupes symétriques, on donne un résultat sur les séries formelles :

Définition 4. Soit $X(t) = \sum_{n\geq 0} x_n t^n$ une série formelle et p un nombre premier.
- On appelle partie *p-régulière* de X la série formelle : $\sum_{p\nmid n} x_n t^n$;
- On appelle partie *p-singulière* de X la série formelle : $\sum_{n\geq 0} x_{np} t^{np}$.

Définition 5. Soit p un nombre premier. On note sh_p la partie p-régulière de exp et ch_p sa partie p-singulière.

Lemme 9. *Soit p un nombre premier et soit $X(t) = \sum_{n\geq 0} x_n t^n$ et $C(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{n} t^n$ deux séries formelles telles que*

$$X(t) = \exp(C(t))$$

On note $U(t)$ (resp. $V(t)$) la partie p-singulière (resp. p-régulière) de $X(t)$, $A(t)$ (resp. $B(t)$) la partie p-singulière (resp. p-régulière) de $C(t)$, et on note $Y(t) = \sum_{n\geq 0} y_n t^n$ la série formelle vérifiant :

$$Y(t) = \frac{V(t)}{U(t)}$$

Alors,

(1) $y_n = 0$ pour $p|n$;
(2) y_n est un polynôme en les c_i, $p \nmid i$;
(3) $(y_n - x_n)$ est combinaison linéaire de x_λ avec $\lambda \notin \mathcal{P}_{n,reg}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \exp(C(t)) &= \exp(A(t) + B(t)) \\ &= \exp(A(t)).\,\mathrm{ch}_p(B(t)) + \exp(A(t)).\,\mathrm{sh}_p(B(t)) \end{aligned}$$

En identifiant les parties singulières et régulières, on obtient :

$$U(t) = \exp(A(t)).\,\mathrm{ch}_p(B(t))$$

et

$$V(t) = \exp(A(t)).\,\mathrm{sh}_p(B(t))$$

Donc

$$Y(t) = \frac{\mathrm{sh}_p(B(t))}{\mathrm{ch}_p(B(t))}$$

et les y_n, $n \geq 0$, vérifient les deux premiers points.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{U(t)} &= \frac{1}{1+\sum_{n\geq 1} x_{pn}t^{pn}} \\ &= \sum_{k\geq 0}(-1)^k(\sum_{n\geq 1} x_{pn}t^{pn})^k \\ &= \sum_{\substack{k\geq 0,\\ p|\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_i>0}} (-1)^{\lambda_1+\ldots\lambda_k} x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} t^{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}\end{aligned}$$

Donc :

$$Y(t) = V(t)\big[\sum_{\substack{k\geq 0,\\ p|\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_i>0}} (-1)^{\lambda_1+\ldots\lambda_k} x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} t^{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}\big]$$

Ce qui prouve le dernier point. □

Remarque 3. *La preuve fournit une formule explicite pour les* y_n *:*

$$y_n = \sum_{\substack{(\lambda_0,\ldots,\lambda_k)\in(\mathbb{N}^*)^{k+1}\\ \sum_i \lambda_i=n\\ p\nmid\lambda_0 \text{ et } p|\lambda_i, i\geq 1}} (-1)^k x_{\lambda_0}\ldots x_{\lambda_k}$$

On a par exemple, pour $p=2$ *:*

- $y_1 = x_1$;
- $y_3 = x_3 - x_1x_2$;
- $y_5 = x_5 - x_3x_2 + x_1x_2^2 - x_1x_4$;
- $y_7 = x_7 - x_5x_2 - x_3x_4 + x_3x_2^2 - x_1x_6 + 2x_1x_4x_2 - x_1x_2^3$.

On peut à présent énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème A. *L'anneau* $K_0^k(S_\infty)$ *est un anneau de polynômes avec un générateur en chaque degré premier à* p*. Précisément :*

$$\varepsilon(K_0^k(S_\infty)) = \mathbb{Z}[y_i | p\nmid i]$$

Démonstration. D'après le lemme 8, il suffit de montrer que $\varepsilon(K_0^k(S_\infty)) = \mathbb{Z}[y_i|p\nmid i]$. En reprenant les notations de 1.1, on a l'égalité dans $\mathrm{CF}^K(S_\infty)$:

$$x_n = \sum_{(1^{n_1},\ldots,k^{n_k})\in\mathcal{P}_n} \left(\prod_{i=1}^k \frac{c_i^{n_i}}{n_i! i^{n_i}}\right)$$

Ainsi en calculant dans $\mathrm{CF}^K(S_\infty)[[t]]$, on obtient :

$$\sum_{n\geq 0} x_n t^n = \exp\big(\sum_{i\geq 1}\frac{c_i}{i}t^i\big)$$

Donc d'après le lemme 9 et en reprenant les notations, on a pour tout n premier à p, y_n dans $\varepsilon(K_0^k(S_\infty))$ et donc $\mathbb{Z}[y_n|p\nmid n]$ est un sous-anneau de $\varepsilon(K_0^k(S_\infty))$. De plus, en identifiant les représentations avec leur caractère et en comparant les dimensions en chaque degré, on a également :

$$K[y_n | p \nmid n] = \mathrm{CF}^K_{reg}(S_\infty) \tag{1}$$

Soit maintenant $z \in \varepsilon(K_0^k(S_\infty))$ homogène de degré n. En plongeant z dans $K \otimes \varepsilon(K_0^k(S_\infty))$ par le morphisme canonique et d'après (1) on obtient :

$$z = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{n,reg}} \alpha_\lambda y_\lambda$$

avec $\alpha_\lambda \in K$. De plus, z est également un élément de $R^K(S_\infty)$, donc

$$z = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \beta_\lambda x_\lambda$$

avec $\beta_\lambda \in \mathbb{Z}$. On a donc :

$$0 = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \beta_\lambda x_\lambda - \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{n,reg}} \alpha_\lambda y_\lambda$$

D'après la définition des y_n,

$$y_\lambda = x_\lambda + R_\lambda$$

avec R_λ combinaison linéaire des $\{x_{\lambda'}\}_{\lambda' \notin \mathcal{P}_{n,reg}}$. Donc,

$$0 = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{n,reg}} (\beta_\lambda - \alpha_\lambda) x_\lambda + \sum_{\lambda \notin \mathcal{P}_{n,reg}} \beta_\lambda x_\lambda - \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{n,reg}} \alpha_\lambda R_\lambda$$

Enfin, la famille $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$ est une base de $R^K(S_\infty)_n = R^K(S_n)$. On en déduit que

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{n,reg}} (\beta_\lambda - \alpha_\lambda) x_\lambda = 0$$

puis que pour tout $\lambda \in \mathcal{P}_{n,reg}$,

$$\beta_\lambda - \alpha_\lambda = 0$$

Finalement $z \in \mathbb{Z}[y_n | p \nmid n]$ et le résultat est prouvé. □

Exemple 1. *Comparons les premiers générateurs du théorème et les $\mathbb{F}_2 S_n$-modules projectifs indécomposables :*

- *$y_1 = x_1$ est la représentation triviale du groupe trivial. Notons au passage que pour tout $n \geq 1$, x_1^n est la classe de la représentation régulière ;*
- *Il y a une unique représentation simple de S_2 sur $\mathbb{F}_2$: la représentation triviale. Donc un unique $\mathbb{F}_2 S_2$ module projectif indécomposable : la couverture projective de la triviale qui est $\mathbb{F}_2 S_2$ dont la série de composition est deux fois la triviale et $2x_2 = y_1^2$;*
- *Pour $n = 3$, on a la décomposition $\mathbb{F}_2 S_3 = P_{\mathbb{F}_2} \oplus \mathrm{St}_2^{\oplus 2}$ où $P_{\mathbb{F}_2}$ est la couverture projective de la représentation triviale de S_3 sur $\mathbb{F}_2$ et St_2 est la seconde représentation simple de S_3. D'après ce qui précède, on a $x_1^3 = 2x_1x_2$, donc $x_1^3 = 2x_3 + 2(x_1x_2 - x_3)$. En particulier, $(-y_3) = x_1x_2 - x_3$ est la classe de St_2 ;*

- *Il y a deux représentations simples de S_4 sur $\mathbb{F}_2$ [Web16a, p.267]. Notons P_1 la couverture projective de la triviale et P_2 la couverture projective du second simple. On vérifie que $\mathbb{F}_2 S_4 = P_1 \oplus P_2^{\oplus 2}$. Le calcul (en utilisant par exemple [Web16b]) permet d'identifier $(-y_1 y_3)$ à la classe de P_2. Il s'en suit que la couverture projective de la triviale appartient à la classe $y_1^4 + 2y_1 y_3$.*

Notons que la remarque 3 donne une formule explicite des 4 *premiers générateurs en fonction des classes des représentations triviales.*

3. Anneau des représentations modulaires projectives des produits en couronne

Le cas des produits en couronne avec les groupes symétriques demande un peu plus de travail mais la preuve du théorème B est très similaire à la précédente.

Notation 4.
– p est un nombre premier fixé.
– G est un groupe fini.
– G_{reg} désigne l'ensemble des éléments de G d'ordre premier à p.
– $\mathrm{Cl}_{reg}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison p-régulières de G, i.e. des classes d'éléments de G_{reg}.

Remarque 4. *Les classes de conjugaison p-régulières de $G \wr S_n$ sont paramétrées par l'ensemble*

$$\{\varphi : \mathrm{Cl}_{reg}(G) \to \mathcal{P}_{reg} | \sum_{C \in \mathrm{Cl}_{reg}(G)} |\varphi(\rho)| = n\}$$

– (K, A, k) un système p-modulaire de rupture pour G. D'après [KJ84, 4.4.8] c'est également un système p-modulaire de rupture pour les $G \wr S_n$.
– On note $K_0^k(G \wr S_n)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $kG \wr S_n$-modules projectifs de type fini et $K_0^k(G \wr S_\infty)$ l'algèbre graduée qui se déduit des $K_0^k(G \wr S_n)$ pour n dans $\mathbb{N}$.
– On note $R^K(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations de G sur K et $K_0^k(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des kG-modules projectifs de type fini.
– On note plus simplement $e = e_G : K_0^k(G) \to R^K(G)$ le morphisme de la définition 3.
– On désigne par $\varepsilon : R^K(G \wr S_\infty) \to K_0^k(G \wr S_\infty)$ le morphisme d'anneaux gradués induit par les $(e_{G \wr S_n})_{n \in \mathbb{N}}$ (voir à nouveau la définition 3).
– On rappelle que $N = \dim_K \mathrm{CF}^K(G)$.
– On note $\mathrm{CF}^K_{reg}(G)$ le sous-espace de $\mathrm{CF}^K(G)$ formé des fonctions qui s'annulent en dehors de G_{reg}. D'après le lemme 8, ce sous-espace s'identifie à $K \otimes e(K_0^k(G))$. On note $M = \dim_K \mathrm{CF}^K_{reg}(G)$.
– On note $\chi_1, \ldots, \chi_N$ les caractères irréductibles de G sur K. Ils forment une base de $\mathrm{CF}^K(G)$.
– On note $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$ l'image par $K \otimes e$ des caractères de Brauer des kG-modules projectifs indécomposables. Ils forment une base de $\mathrm{CF}_{reg}(G)$.
– On note $E \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{Z})$ la matrice de l'application $e : K_0^k(G) \to R^K(G)$ dans les bases données ci-dessus.

Lemme 10. *Le morphisme e admet une rétraction, i.e il existe une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\sigma : R^K(G) \to K_0^k(G)$ telle $\theta \circ e = \mathrm{id}_{K_0^k(G)}$.*

Démonstration. D'après [Ser71], $E = D^t$, où D est la matrice de l'application $\mathbb{Z}$-linéaire d. De plus, d admet une section σ [Ser71, 18.4]. On en déduit que e admet une rétraction. □

– Puisque e admet une rétraction, on peut compléter $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_M\}$ en une base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ de $R^K(G)$. On note pour tout $i \in [\![1, N]\!]$:

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{1,i} \\ \vdots \\ \varphi_{N,i} \end{pmatrix}$$

Définition 6. Pour tout $k \in \{1, \ldots, M\}$,

$$X_k(t) = \sum_{i \geq 0} X_{k,i} t^i = \big(\sum_{i \geq 0} \Phi_1(x_i) t^i\big)^{\varphi_{1,k}} \ldots \big(\sum_{i \geq 0} \Phi_M(x_i) t^i\big)^{\varphi_{M,k}}$$

et pour tout $k \in \{M+1, \ldots, N\}$,

$$X_k(t) = \sum_{i \geq 0} X_{k,i} t^i = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^{N} \varphi_{j,k} \Phi_j(x_i) t^i$$

où les $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ sont les applications de la définition 1.

Lemme 11. *Pour tout $k \in \{1, \ldots, M\}$, on a l'égalité suivante dans $\mathrm{CF}^K(G \wr S_\infty)$:*

$$X_k(t) = \exp(C_k(t))$$

avec

$$C_k(t) = \sum_{i=1} \Big[\sum_{C \in \mathrm{Cl}_{reg}(G)} \big(\sum_{j=1}^{N} \frac{|C|}{|G|} \varphi_{j,k} \chi_j(C) \big) \frac{\xi_{i,C}}{i} t^i \Big]$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
X_k(t) &= \big(\sum_{i \geq 0} \Phi_1(x_i) t^i\big)^{\varphi_{1,k}} \ldots \big(\sum_{i \geq 0} \Phi_M(x_i) t^i\big)^{\varphi_{M,k}} \\
&= \exp\big(\sum_{i \geq 1} \Phi_1(\frac{c_i}{i}) t^i\big)^{\varphi_{1,k}} \ldots \exp\big(\sum_{i \geq 1} \Phi_M(\frac{c_i}{i}) t^i\big)^{\varphi_{M,k}} \\
&= \exp\big(\sum_{i \geq 1} (\sum_{j=1}^{N} \varphi_{j,k} \Phi_j(\frac{c_i}{i} t^i)\big) \\
&= \exp\big(\sum_{i \geq 1} \Big[\sum_{j=1}^{N} \big(\sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \varphi_{j,k} \chi_k(C) \frac{|C|}{|G|} \frac{\xi_{i,C}}{i} t^i\big)\Big]\big)\big)
\end{aligned}$$

car $\Phi_j(c_i) = \sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)} \chi_j(C)\frac{|C|}{|G|}\xi_{i,C}$

$$\begin{aligned} &= \exp\Big[\sum_{C\in\mathrm{Cl}(G)}\Big(\sum_{j=1}^{N}\varphi_{j,k}\xi_j(C)\Big)\frac{\xi_{i,C}}{i}t^i\Big] \\ &= \exp\Big[\sum_{C\in\mathrm{Cl}_{\mathrm{reg}}(G)}\Big(\sum_{j=1}^{N}\varphi_{j,k}\xi_j(C)\Big)\frac{\xi_{i,C}}{i}t^i\Big] \end{aligned}$$

D'après le lemme 7. $\square$

Corollaire 12. *Pour tout $k \in \{1,\ldots,M\}$, on note :*

$$Y_k(t) = \sum_{n\geq 0} y_{k,n}t^n$$

défini comme dans le lemme 9. On observe alors que pour tout $n \geq 1$, $y_{k,n}$ est combinaison linéaire de ξ_C avec $C \in \mathrm{Cl}_{reg}(G \wr S_n)$. En particulier, $y_{k,n} \in K \otimes \varepsilon(K_0^k(G \wr S_\infty))$, pour tout $n \geq 1$ et $k \in [\![1, M]\!]$.

Démonstration. En utilisant les lemmes 9 et 11, on vérifie que pour tout $n \geq 1$ et k dans $[\![1, M]\!]$, $y_{i,n}$ est combinaison linéaire à coefficients dans K de ξ_C avec $C \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{reg}}(G \wr S_n)$. Par ailleurs, l'image de $K\otimes\varepsilon$ dans $\mathrm{CF}^K(G\wr S_\infty)$ est exactement l'ensemble des fonctions de classe qui s'annulent sur les classes p-singulières. D'après la première partie de la preuve, c'est le cas des $y_{i,n}$, pour tout $n \geq 1$ et $k \in [\![1, M]\!]$. $\square$

Lemme 13. *L'ensemble $\{X_{k,i} | k \in [\![1; N]\!], i \geq 1\}$ est un ensemble de générateurs de l'anneau gradué $R^K(G \wr S_\infty)$:*

$$\mathbb{Z}[X_{k,i} | k \in [\![1; N]\!], i \geq 1] = \mathbb{Z}[\Phi_k(x_i) | k \in [\![1; N]\!], i \geq 1]$$

Démonstration. On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{Z}[X_{k,i} | k \in [\![1; N]\!], 1 \leq i \leq n] = \mathbb{Z}[\Phi_k(x_i) | k \in [\![1; N]\!], 1 \leq i \leq n]$. Pour $i = 1$, on a :

$$X_{1,1} = \varphi_{1,1}\Phi_1(x_1) + \ldots + \varphi_{N,1}\Phi_N(x_1)$$

$$\vdots$$

$$X_{N,1} = \varphi_{1,N}\Phi_1(x_1) + \ldots + \varphi_{N,N}\Phi_N(x_1)$$

Mais $(\varphi_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ est une matrice inversible dans $\mathbb{Z}$, donc

$$\mathbb{Z}[X_{k,1} | k \in [\![1; N]\!]] = \mathbb{Z}[\Phi_k(x_1) | k \in [\![1; N]\!]]$$

Supposons maintenant que

$$\mathbb{Z}[X_{k,i} | k \in [\![1; N]\!], 1 \leq i \leq n-1] = \mathbb{Z}[\Phi_k(x_i) | k \in [\![1; N]\!], 1 \leq i \leq n-1]$$

On a

$$X_{1,n} = \varphi_{1,1}\Phi_1(x_n) + \ldots + \varphi_{N,1}\Phi_N(x_n) + R_1$$

$$\vdots$$

$$X_{N,n} = \varphi_{1,N}\Phi_1(x_n) + \ldots + \varphi_{N,N}\Phi_N(x_n) + R_N$$

avec $R_k \in \mathbb{Z}[X_{k,i} | k \in [\![1;N]\!], 1 \le i \le n-1]$ (on a même $R_k = 0$ pour $M+1 \le k \le N$). Ainsi les

$$\begin{gathered}\varphi_{1,1}\Phi_1(x_n) + \ldots + \varphi_{N,1}\Phi_N(x_n) \\ \vdots \\ \varphi_{1,N}\Phi_1(x_n) + \ldots + \varphi_{N,N}\Phi_N(x_n)\end{gathered}$$

sont dans $\mathbb{Z}[X_{k,i} | k \in [\![1;N]\!], 1 \le i \le n]$. Comme $(\varphi_{i,j})_{1 \le i,j \le N} \in GL_N(\mathbb{Z})$, on en déduit que $\{\Phi_k(x_n)\}_{1 \le k \le N}$ sont dans $\mathbb{Z}[X_{k,i} | k \in [\![1;N]\!], 1 \le i \le n]$ et le résultat est prouvé. $\square$

On peut maintenant donner le théorème principal de cette section :

Théorème B. *L'anneau $K_0^k(G \wr S_\infty)$ est un anneau de polynômes. De plus on a :*

$$\varepsilon(K_0^k(G \wr S_\infty)) = \mathbb{Z}[y_{i,n} | i \in [\![1;M]\!], p \nmid n]$$

Démonstration. D'après le corollaire 12,

$$\mathbb{Z}[y_{i,n} | i \in [\![1;M]\!], 2 \nmid n] \subset \varepsilon(K_0^k(G \wr S_\infty))$$

De plus, en comparant les dimensions degré par degré, on a :

$$K \otimes \varepsilon(K_0^k(G \wr S_\infty)) = K[y_{i,n} | i \in [\![1;M]\!], p \nmid n] \tag{2}$$

Il reste à montrer que pour z homogène de degré n dans $\varepsilon(K_0^k(G \wr S_\infty))$, z est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en les $y_{i,k}$, $i \in [\![1,M]\!]$ et $k \le n$.

Considérons donc un tel z. D'après (2) :

$$z = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg}}, \sum |\lambda_i| = n} \alpha_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M} y_{1,\lambda_1} \ldots y_{M,\lambda_M}$$

avec $\alpha_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M} \in K$, et

$$z = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_N \in \mathcal{P}, \sum |\lambda_i| = n} \beta_{\lambda_1,\ldots,\lambda_N} X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_N}$$

avec $\beta_{\lambda_1,\ldots,\lambda_N} \in \mathbb{Z}$, d'après le lemme 13. Or $y_{i,\lambda} = X_{i,\lambda} + R_{i,\lambda}$ où $R_{i,\lambda}$ est combinaison linéaire de $X_{i,\lambda'}$ avec $\lambda' \notin \mathcal{P}_{\mathrm{reg}}$ et la famille $\{X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_N}\}_{\lambda_i \in \mathcal{P}, \sum |\lambda_i| = n}$ forme une base de $R^K(G \wr S_\infty)_n$. Donc

$$y_{1,\lambda_1} \ldots y_{M,\lambda_M} = X_{1,\lambda_1} \ldots X_{M,\lambda_M} + R_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M}$$

où $R_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M}$ est un polynôme en les $X_{i,\lambda'}$ avec $i \in [\![1,M]\!]$ et $\lambda' \notin \mathcal{P}_{\mathrm{reg}}$. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_M \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg}}, \\ \sum |\lambda_i| = n}} (\alpha_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M} - \beta_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M}) X_{1,\lambda_1} \ldots X_{M,\lambda_M} \\ & + \sum_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_M \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg}}, \\ \sum |\lambda_i| = n}} \alpha_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M} R_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M} \\ & - \sum_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_M \notin \mathcal{P}_{\mathrm{reg}}, \\ \sum |\lambda_i| = n}} \beta_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M} X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_M} - \sum_{\substack{(\lambda_{M+1},\ldots,\lambda_N) \neq 0, \\ \sum |\lambda_i| = n}} \beta_{\lambda_1,\ldots,\lambda_N} X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_N} \end{aligned}$$

Par indépendance linéaire des $\{X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_N}\}_{\lambda_i \in \mathcal{P}, \sum |\lambda_i| = n}$, on en déduit que pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg}}$, $\alpha_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M} = \beta_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M}$ donc $\alpha_{\lambda_1,\ldots,\lambda_M} \in \mathbb{Z}$ et le résultat est prouvé. $\square$

Références

[Car83] Pierre Cartier. La théorie classique et moderne des fonctions symétriques. *Séminaire Bourbaki*, 25 :1–23, 1983.

[CR90] Charles W Curtis and Irving Reiner. *Methods of Representation Theory : With Applications to Finite Groups and Orders. Vol. I.* Wiley-Interscience, 1990.

[Gei77] Ladnor Geissinger. Hopf algebras of symmetric functions and class functions. *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, pages 168–181, 1977.

[GK78] Ladnor Geissinger and D Kinch. Representations of the hyperoctahedral groups. *Journal of algebra*, 53(1) :1–20, 1978.

[GR16] Darij Grinberg and Victor Reiner. Hopf algebra in combinatorics. `http://www-users.math.umn.edu/~reiner/Classes/HopfComb.pdf`, 2016.

[Jam87] Gordon D. James. *The representation theory of the symmetric groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[KJ84] Adalbert Kerber and Gordon D. James. *The Representation Theory of the Symmetric Group (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications)*. Cambridge University Press, 1984.

[Ser71] Jean-Pierre Serre. *Représentation linéaire des groupes finis*. Hermann, Paris, 1971.

[Vog88] Pierre Vogel. Communication au séminaire de topologie. Université de Nantes, 1988.

[Web16a] Peter Webb. *A Course in Finite Group Representation Theory*. Cambridge University Press, 2016.

[Web16b] Peter Webb. Tutorial on the gap package 'reps' for handling group representations in positive characteristic. `http://www-users.math.umn.edu/~webb/GAPfiles/reptutorial.html`, 2016.

[Zel81] Andrey V. Zelevinsky. *Representations of finite classical groups, volume 869 of Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (UMR 6629 CNRS & UN)

E-mail address: `helene.perennou@univ-nantes.fr`