# La suite de Syracuse, un monde de conjectures *

Luc-Olivier Pochon †, Alain Favre ‡

version de janvier 2021

***Résumé*** *: Quel est l'état des travaux concernant la suite de Syracuse ? C'est la question que nous nous sommes posée à propos de ce problème qui constituait une curiosité à l'époque de nos études de mathématiques. A notre grand étonnement, durant quelques dizaines d'années, des travaux de tous niveaux avaient été régulièrement publiés et des conjectures, plus ou moins apparentées, avaient proliféré.*

*Cet article résume une partie de ces conjectures. Il relève aussi les démonstrations et les approches plus ou moins naïves que le problème a suscitées.*

***Mots-clés*** *: suite de Syracuse, généralisation du problème 3x+1, analyse d'erreurs*

# La suite de Collatz et la conjecture principale

## Position du problème

On considère la suite de nombres construite à partir d'une origine $m \in \mathbb{N}$ par application répétée de la fonction :

$$C(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ 3m+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La conjecture principale (conjecture de Collatz) dit que pour toute valeur initiale $m$ il existe $n$ tel que $C^{(n)}(m) = 1$ (l'application répétée $n$ fois de $C$ aboutit à 1).

Les fonctions $T$ et $N$ sont aussi souvent utilisées pour construire des sous-suites de la suite originale. $T$ est donnée par :

$$T(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (3m+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quant à $N$, elle n'est définie que pour les nombres impairs. Elle est donnée par la formule :

$$N(m) = \frac{3m+1}{2^p}$$

*Cette article reprend la version de 2017 (hal-01593181) revue et corrigée avec un complément rassemblant de nouvelles références.

†luc.pochon@gmail.com

‡alainfa@bluewin.ch

où $p$ est tel que $N(m)$ soit impair. Avec $\nu(n)$ valant la puissance de 2 dans la décomposition de $n$ en facteur premier, on a $\nu(3m+1) = p$. On note $[n]$ le nombre impair déduit à partir de $n$ par division par une puissance de 2 judicieuse.

Avec ces notations : $N(m) = [3m+1]$ et $3m+1 = [3m+1] \times 2^{\nu(3m+1)}$.

Par la suite on désignera par « suite de Collatz » chacune des trois suites obtenues par ces formules de récurrence en précisant $C$, $T$ ou $N$ lorsque cela s'avère nécessaire (par exemple : $N$-suite de Collatz).

### Exemples

Suite $C$ d'origine 7 : (7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1)

Suite $T$ d'origine 7 : (7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1)

Suite $N$ d'origine 7 : (7, 11, 17, 13, 5, 1)

La trajectoire (infinie) liée à une application $A$ d'origine $m$ est notée $\tau_A(m)$. Avec cette notation : $\tau_N(7) = (7, 11, 17, 13, 5, 1, 1, 1, \ldots)$.

On note de façon triviale que les trajectoires ne comportent, à l'exception éventuelle des premiers termes (du premier terme pour $N$), aucun multiple de 3.

### Généralisations

La fonction $T_d$ avec $d \geq 1$ premier avec 6 a été proposée par Lagarias (1990, [1], [2]) :

$$T_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (3m+d)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Crandall (1978, [3]) généralise la fonction[1] $N$ par $N_{q,r}$ définie et à valeurs dans $2\mathbb{N}+1$ par :

$$N_{q,r}(m) = \frac{qm+r}{2^{\nu(qm+r)}}$$

Au lieu de se restreindre aux ensembles $\mathbb{N}$ ou $2\mathbb{N}+1$, certaines de ces fonctions sont étendues aux ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$ (entiers 2-adiques), voire $\mathbb{R}$ , $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}_p$ (nombres p-adiques).

## But et plan de l'article

Nous avions croisé la suite de Syracuse lors de nos études de mathématiques. Arrivés à la retraite, nous avons eu la curiosité d'examiner l'état des lieux. Pour nous rafraîchir la mémoire, nous avons tout d'abord effectué quelques calculs sans aucune prétention. En effet, nous savons que la question est difficile dans la mesure où elle a été examinée

1. Petite anecdote : Sans encore connaître le travail de Crandall, au début de notre « quête », nous avons tout de suite repéré l'intérêt de cette fonction que nous avons appelée $N$ du fait que nous avions l'habitude de travailler à La Neuveville, domicile de l'un des auteurs, ou à Neuchâtel !

sous toutes les coutures par de bons mathématiciens. Puis nous avons rassemblé de la bibliographie sur le sujet (avec Internet, les recherches bibliographiques, pour le moins superficielles, sont vite menées).

A notre grand étonnement, nous avons constaté que le problème était le sujet de nombreux travaux de tous niveaux et que des conjectures plus ou moins apparentées avaient fleuri durant plusieurs dizaines d'années.

Si le but premier de cet article était donc de résumer une partie de ces conjectures, d'où son titre, nous avons été entraînés à élargir notre examen aux travaux menés par des amateurs, plus ou moins éclairés, parfois mathématiciens, parfois non, qui se sont intéressés au problème. On peut faire un parallèle entre certains de ces travaux et ceux concernant la quadrature du cercle et de la trisection de l'angle. Ils donnent une idée des représentations de la recherche en mathématiques dans un public élargi. Celles-ci peuvent renvoyer à des conceptions naïves « honnêtes » ou à des positions plus déconnectées de l'habitus mathématique, voire relever de « pseudo-mathématiques » [2].

Pour sélectionner les articles nous avons tout d'abord repris quelques classiques parus jusqu'au milieu des années quatre-vingt-dix, notamment les bibliographies de J. Lagarias. Puis nous nous sommes fiés aux moteurs de recherche pour recueillir la littérature grise parue dès le tournant du siècle, logée généralement dans les archives ouvertes arXiv et Hal, mais parfois directement sur les sites d'universités ou personnels des auteurs.

Nous avons également pris en compte les informations diffusées sur des forums « grand public » attirés que nous étions par l'étrangeté du discours mathématique traité à la mode « réseau social » (cet aspect mériterait une étude spécifique).

Finalement, avec les mot-clés "Syracuse" et "Collatz" nous nous sommes inscrits à Google Scholar. De façon inattendue, nous recevons régulièrement de nouvelles références.

Après quelques généralités, dont un brin d'histoire qui se contente principalement de donner des références de documents facilement disponibles, quelques approches simples, celles qui nous sont venues à l'esprit, sont présentées.

Puis une brève section, « Le suivi de Lagarias », propose une classification des approches du problème. La section suivante, « Quelques résultats marquants », expose quelques-unes des approches les plus souvent rencontrées ; un résumé des conjectures en fournit ensuite une vision synthétique.

Avant la conclusion, la section « Le monde de Syracuse » passe en revue et classifie l'ensemble des productions recueillies concernant le problème de Syracuse. Ce recueil fait l'objet d'un complément.

# Généralités

## Un brin d'histoire

L'histoire du problème de Syracuse (sous diverses appellations : conjecture de Collatz, problème $3x + 1$, etc.) fait l'objet de nombreuses présentations (Lagarias, 1985 [4],

2. `http://en.wikipedia.org/wiki/Pseudomathematics`

2010b [5] ; Delahaye, 1998 [6] ; Wirsching, 1998, [7], wikipédia [3]). Nous en résumons l'essentiel.

L'origine du problème généralement associé à Collatz est assez confuse. Comme sa transmission doit beaucoup à la tradition orale, il est difficile de bien suivre sa trace. Dans les années 1930, Lothar Collatz, alors étudiant, s'intéressait aux itérations dans les nombres entiers qu'il représentait au moyen de graphes et d'hypergraphes. C'est alors qu'il serait « tombé » sur la suite qu'il présenta ensuite à des collègues. En 1952, lors d'une visite à Hambourg, Collatz expliqua son problème à Helmut Hasse qui le diffusa en Amérique à l'université de Syracuse (d'où le nom de « suite de Syracuse »). Entre temps, le mathématicien polonais Stanislas Ulam le répandait dans le Laboratoire national de Los Alamos. Dans les années 1960, le problème est repris par le mathématicien Shizuo Kakutani qui le diffuse dans l'université Yale et dans celle de Chicago.

Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.

La conjecture est aussi associée à un prix Erdös qui prime sa solution à 500 dollars [4].

## L'avis des experts et l'acharnement des amateurs

La conjecture de Syracuse constitue un des énoncés mathématiques les plus simples à formuler. On la trouve mentionnée dans des ouvrages de l'école obligatoire (Jaquet & Calame, 1991, [9] ; Pochon, 1993, [10]). C'est aussi un excellent sujet de travail de diplôme de niveau intermédiaire (par exemple celui de Nils Svensson, [11]) tant le nombre de pistes qu'il permet d'explorer est vaste.

Et pourtant, des mathématiciens chevronnés doutent de la simplicité du problème. Erdös estimait que « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes » (cité par Lagarias, 1985, [4]) [5]. Dans son blog ([12]) Terence Tao (médaille Fields 2006) qualifie l'opiniâtreté actuelle de certains à la démontrer de *mathematical desease* (expression reprise de Richard Lipton, prix Knuth 2014). Il rappelle quelques questions ouvertes qui sont équivalentes à la conjecture de Collatz. Par ailleurs Guy (2010, [13]) cite cette conjecture dans la liste des problèmes à ne pas tenter de résoudre (bien que certains aient été résolus !).

Malgré tout, ces dernières années, de nombreux mathématiciens chevronnés ont ataqué le problème dans leur domaine de spécialité.

Par ailleurs, de nombreux amateurs, plus ou moins talentueux, s'acharnent sur ce problème à l'image du titre d'un article de Delahaye (2012, [14]) : *J'aimerais tant prouver Syracuse*, publié sous d'autres titres à plusieurs reprises (Delahaye, 1998, [6] ; 2007, [15]).

3. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse

4. Mais un problème plus fondamental (qui vaut actuellement 5000 dollars) est sans doute la conjecture d'Erdös sur les progressions arithmétiques : « Si la série des inverses d'une séquence de nombres entiers diverge, alors la séquence contient des progressions arithmétiques de longueur arbitraire ». Si cette assertion est vraie, elle résout plusieurs problèmes ouverts en théorie des nombres. Mais une de ses conséquences : la suite des nombres premiers contient des suites arithmétiques arbitrairement longues, a été démontrée de façon indépendante en 2004 par Green & Tao (2008, [8]).

5. Voir l'annexe 1 pour le contexte dans lequel Erdös émet cette opinion.

Il est amusant de relever que l'on trouvait au même moment sur Internet une démonstration sophistiquée de la conjecture et une « démonstration » du fait qu'elle était non démontrable.

Le premier de ces deux articles (Opfer, 2011, [16]) se base sur une équivalence de la conjecture avec la propriété du noyau d'une fonctionnelle en analyse complexe (équivalence elle-même ardue à établir, et certainement valide, due à Berg & Meinardus). L'auteur, vraisemblablement un spécialiste en analyse complexe, publiait peu après un errata qui invalidait la démonstration.

Le deuxième article (Feinstein, 2011, [17]) est moins « professionnel » et s'appuie sur une argumentation douteuse (voir la section consacrée au monde de Syracuse) elle-même reprise d'un bref article lui-même obscure. Il faut toutefois mentionner qu'en 1972, John Conway (1972, [18]) a établi l'indécidabilité algorithmique pour une famille de problèmes qui généralisent de manière naturelle le problème de Syracuse.

On trouve également des articles de jeunes amateurs, par exemple Dianopoulos (2012, [19]) qui précise avoir 15 ans, qui se lancent dans la démonstration, trompés par la simplicité de l'énoncé, . Ils commencent par redécouvrir des propriétés relativement simples des nombres (par exemple $2^{k+1} + 2^k$ et $2^{2k} - 1$ sont divisibles par 3). Ces projets sont souvent abandonnés.

## Variantes de la conjecture

La conjecture peut être formulée de diverses façons ou décomposée en plusieurs conjectures plus faibles. Ultérieurement, on mentionnera des conjectures généralisant celle de Collatz ou des conjectures équivalentes dans différents domaines.

***Forme faible de la conjecture (nontrivial cycles conjecture)*** : s'il existe $m$ tel que $C^{(k)}(m) = m$ pour $k > 1$ alors $m = 1$, 2 ou 4.

***Conjecture de non divergence ((no) divergent trajectories conjecture)*** : Toutes les suites de Collatz sont bornées.

Cette dernière conjecture est équivalente au fait que toute trajectoire se termine par un cycle.

***Conjecture du temps d'arrêt fini*** : Toute trajectoire finit par repasser au-dessous de son point de départ.

Cette conjecture est équivalente à la conjecture primitive en utilisant un raisonnement par récurrence.

Une expression de la conjecture fait intervenir le semi-groupes de fonctions affines : Soit $(f_i)_{i=1,\ldots,k}$ une famille de fonctions affines. Avec la composition, cette famille engendre un semi-groupe $S$. Etant donné un ensemble de nombres $A$, on désigne par $\langle S : A\rangle$, orbite de $S$, l'ensemble des images de $A$ par les fonctions de $S$.

$\langle S : A\rangle$ peut aussi simplement être défini comme l'ensemble généré par les formules de récurrences $(f_i)_{i=1,\ldots,k}$.

***Conjecture des prédécesseurs*** : Soit $S$ le semi-groupe engendré par les fonctions affines $\{x \mapsto 2x; x \mapsto (2x-1)/3\}$ . Alors l'orbite $\langle S : \{4\}\rangle$ contient tous les nombres entiers positifs supérieurs à 2.

# Quelques bricolages

En tant qu'amateurs, il est possible de s'approprier le problème en procédant à divers essais qui, mis à part certains développements techniques, mènent rapidement et de façon étonnante à quelques limites explorées par les professionnels.

## Quelques propriétés

***Une propriété intéressante de*** $T$ : $T^{(k)}(a2^k - 1) = a3^k - 1$

Démonstration par récurrence : l'égalité est vérifiée pour $k = 0$ et $k = 1$. Elle reste à vérifier pour $k + 1$ admettant qu'elle est vérifiée pour $k$ :

$$T^{(k+1)}(a2^{k+1} - 1) = T^{(k)}((3a2^{k+1} - 3 + 1)/2) = T^{(k)}((3a)2^k - 1) = (3a)3^k - 1 = a3^{k+1} - 1$$

QED

*Remarque* : En cours de démonstration on constate que $T^{(i)}(a2^k - 1)$ pour $i < k$ est impair et donc $T^{(i)}(a2^k - 1) = N^{(i)}(a2^k - 1)$ pour $i < k$ et :

***Une propriété intéressante de*** $N$ : $N^{(k)}(a2^k - 1) = [a3^k - 1]$

Ces propriétés incitent à effectuer une partition de l'ensemble des nombres impairs de la façon suivante (Andaloro, 1998, [20]) :

- $S_1 = \{2^{2n-1}(4k + 1) - 1 \ : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$,
- $S_2 = \{2^{2n}(4k + 3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$
- $S_3 = \{2^{2n-1}(4k + 3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$
- $S_4 = \{2^{2n}(4k + 1) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$

On voit facilement que c'est une partition de $2\mathbb{N} + 1$. En effet tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $p \times i - 1$ où $p$ est une puissance de 2 et $i$ un nombre impair. Puis on prend comme critère de partition la parité de l'exposant et la classe de reste de i (mod 4).

***Propriété d'invariance de*** $N$ ***par la transformation*** $4m + 1$ : Pour tout nombre $m$ impair, $N(4m + 1) = N(m)$

Démonstration : $N(4m + 1) = [12m + 4] = [3m + 1] = N(m)$
QED

## Calcul de $N(m)$ selon une partition $\pmod{16}$, $m$ impair

En calculant quelques valeurs de $N(m)$, on constate une certaine régularité dans la suite des valeurs. 16 semble jouer un rôle dans cet aspect périodique.

En partitionnant les nombres impairs en 4 classes : $\{m \ : m \equiv 3 \pmod 4\}$ ; $\{m \ : m \equiv 1 \pmod 8\}$ ; $\{m \ : m \equiv 13 \pmod{16}\}$ ; $\{m \ : m \equiv 5 \pmod{16}\}$ on a :

- $N(3 + 4n) = [3(3 + 4n) + 1] = [10 + 12n] = 5 + 6n$
- $N(1 + 8n) = [3(1 + 8n) + 1] = [4 + 24n] = 1 + 6n$
- $N(13 + 16n) = [3(13 + 16n) + 1] = [40 + 48n] = 5 + 6n$

Sur ces 3 classes $N$ est une application « affine ». Par contre, le comportement de $N$ sur la 4e classe semble plus « chaotique ».

– $N(5+16n) = [16+48n] = [1+3n]$

Pour estimer cette dernière valeur, il faut tenir compte de la parité de $n$. Lorsque $n$ est pair, $N(5+16n) = [16+48n] = 1+3n$. Lorsque qu'il est impair de la forme $n = 2n'+1$, il faut alors tenir compte de la parité de $n'$, etc. Cette dernière classe serait à partitionner pour obtenir des comportements réguliers de $N$. Cette ramification « fractale » rend compte de la difficulté à maîtriser la suite de Collatz : lorsque l'on croit avoir atteint le but, il reste toujours un nouvel ensemble à examiner.

L'annexe 2 propose le calcul pour les 16 classes et les graphiques qui mettent en évidence à la fois l'aspect linéaire et apparemment « chaotique »de $N$.

On note toutefois que pour $m \equiv 1, 9 \pmod{16}$ on a : $N(m) = (3m+1)/4$ et que des relations semblables apparaissent dans les autres cas. Cela donne l'idée de considérer les familles $F_s$ qui font l'objet de la section suivante.

## Partition des nombres impairs $(2\mathbb{N}+1)$ selon $N$ : les familles $F_s$

Pour $m$ impair, on a la relation $C(m) = 3m+1 = 2^{\nu(3m+1)}N(m)$. On peut classer les nombres impairs $m$ en fonction des valeurs de $s = \nu(3m+1)$. Les famille seront notées $F_s$.

### Construction des ensembles $F_s$

$m' = N(m)$ impair peut se mettre sous la forme $m' = 2n+1$ donc $3m+1 = 2^{s+1}n + 2^s$. Il en découle :

$$3m = 2^{s+1}n + 2^s - 1 \text{ et } (-1)^{s+1}n + (-1)^s - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

**$s$ pair**

$$-n + 0 \equiv 0 \pmod{3}; n = 3k; 3m = 2^{s+1}3k + 2^s - 1; m = \frac{2^s-1}{3} + 2^{s+1}k$$

et

$$N(m) = N(\frac{2^s-1}{3} + 2^{s+1}k) = \frac{2^s - 1 + 3\times 2^{s+1}k + 1}{2^s} = \frac{2^s + 3\times 2^{s+1}k}{2^s} = 1 + 6k$$

*Exemples* :

– $s = 2; m = 1+8k; F_2 = \{1, 9, 17, 25, ...\}$
– $s = 4; m = 5+32k; F_4 = \{5, 37, 69, ...\}$
– $s = 6; m = 21+128k; F_6 = \{21, 149, ...\}$

**$s$ impair**

$$n+1 \equiv 0 \pmod 3; n = 2+3k; 3m = 2^{s+1}(3k+2) + 2^s - 1; m = \frac{5\times 2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k$$

et

$$N(m) = \frac{5\times 2^s - 1 + 3\times 2^{s+1}k + 1}{2^s} = 5 + 6k$$

*Exemples* :

- $s = 1; m = 3 + 4k; F_1 = \{3, 7, 11, 15, ...\}$
- $s = 3; m = 13 + 16k; F_3 = \{13, 29, 45, ...\}$
- $s = 5; m = 53 + 64k; F_5 = \{53, 117, 181, ...\}$

*Remarque* : La suite des nombre de $F_1 \pmod 8$ est $(3, 7, 3, 7, \ldots)$, l'ensemble $F_2 \pmod 8$ se réduit à $\{1\}$ et $F_s \pmod 8 = \{5\}$ sinon.

**Conséquences**

1. Cette partition des nombres impairs complète le bricolage précédent. $N$ est « affine » sur chacun de des ensembles $F_s$ ($N(m) = (3m+1)/2^s$ pour $m \in F_s$).
2. Les éléments de $F_s$ constituent une suite arithmétique de raison $2^{s+1}$. La « densité » de $F_s$ dans $2\mathbb{N}+1$ vaut $1/2^s$.
3. $s$ pair : pour $m \in F_s$ on a $N(m) \equiv 1 \pmod 6$.
4. $s$ impair : pour $m \in F_s$ on a $N(m) \equiv 5 \pmod 6$.
5. $F_{s+2} = 4F_s + 1$
6. La propriété d'invariance de $4m+1$ est évidemment valable pour la fonction inverse $P : m \mapsto (m-1)/4$ pour $m \notin F_1 \cup F_2$ ($N(m) = N(P(m))$).
7. De façon formelle, par répétions du raisonnement précédent, on montre que $F_1 \cup F_2$ est suffisant ce qui se constate directement sur la figure 3 de l'annexe 3 [6]. Toutefois ces deux ensembles représentent les trois quarts des nombres impairs. Seuls les nombres congrus à $5 \pmod 8$ ne sont pas contenus dans ces ensembles. Toutefois, on peut montrer qu'il existe des ensembles suffisants de densité arbitrairement petite (voir page 28).

L'annexe 3 propose une présentation utile des ensembles $F_s$.

L'annexe 4 montre la relation entre les ensembles $F_s$ et $S_i$.

L'annexe 5 prolonge cette partition aux ensembles $F_{i,j}$ dont les éléments sont ceux de $F_i$ dont l'image par $N$ est dans $F_j$.

L'annexe 5a propose un examen des problèmes $x + d$ ($d$ impair) et $3x + 3$.

6. Pour un système dynamique obtenu par itération d'une fonction $f : X \to X$, $S \subset X$ est dit suffisant si la trajectoire de tout $m \in X$ rencontre la trajectoire d'un élément de $S$

## Les prédécesseurs selon $T$

*La situation* : partant de 1, on considère les nombres obtenus en utilisant la multiplication par 2 et l'application de la fonction $T_1(x) = (2x-1)/3$. Une branche est notamment constituée des puissances de 2 (figure 1). Les nombres $x \neq 2 \pmod 3$ n'ont qu'un seul prédécesseur. Ce sont notamment les multiples de 3 et les puissances de 2 paires ($2^{2n} \equiv (-1)^{2n} \equiv 1 \pmod 3$). Les nombres $x \equiv 2 \pmod 3$, ont 2 prédécesseurs : $2x$ et $(2x-1)/3$.

La figure 1 (reprise en partie de [4]) donne quelques prédécesseurs de 1 (selon la fonction $T$). Les colonnes de nombres correspondent (de bas en haut) à la multiplication par 2. Les traits obliques correspondent à $T_1$. Les nombres en rouge ne possèdent que leur double comme prédécesseur.

Cette construction peut aussi aboutir à des représentations graphiques spectaculaires (figure 7 de l'Annexe 6).

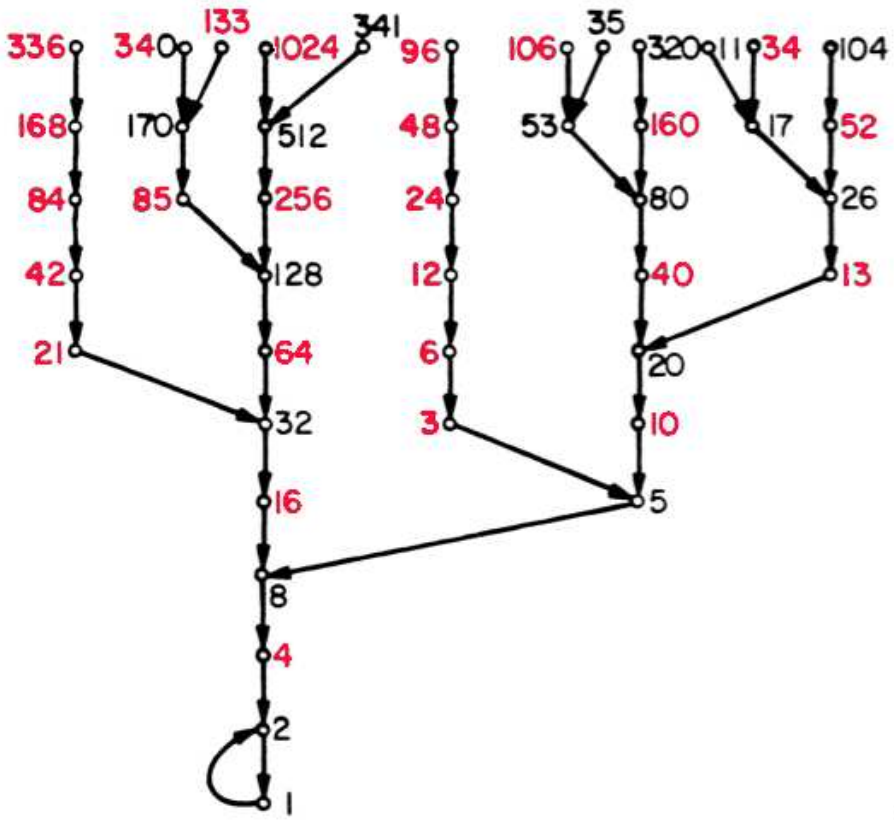



FIGURE 1 – Prédécesseurs de 1

L'annexe 3 représente les prédécesseurs directs, selon $N$, des nombres impairs répartis dans les ensembles $F_s$.

## La fonction itérée sur $\mathbb{Q}$

Une sous-suite impaire de Collatz généralisée ($N$-Collatz) est donnée par les valeurs itérées de $N_k(x) = (ax+b)/2^k$ avec $k$ judicieusement choisi en fonction de $x$. On

peut toutefois étudier systématiquement les fonctions affines $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ données par $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x) = N_{k_n}(N_{k_{n-1}}(\ldots N_{k_1}(x)\ldots))$, d'abord sur $\mathbb{R}$, puis restreintes à $\mathbb{Q}$, sans restriction sur la suite d'entiers $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ autre que $k_i > 0$.

$H(x) = H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x) = px + h$ est une fonction affine de pente $p = a^n/2^s$ où $n$ est le nombre d'itérations et $s$ la somme des $k_i$ (dérivée d'une fonction composée !) et de hauteur à l'origine (valeur en 0)

$$h = b\frac{a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_1} + a^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}}}{2^s}.$$

En regroupant :

***Proposition (formule pour $H$)*** :

$$H_{k_1,\ldots,k_n}(x) = \frac{a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_1} + a^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}})}{2^s} \tag{1}$$

avec $s = \sum k_i$ et $n > 1$.

***Propriété*** : $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n,l_1,l_2,\ldots,l_m} = H_{l_1,l_2,\ldots,l_m} \circ H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$

***Définition*** : Une suite d'entiers $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ est admissible pour $x \in 2\mathbb{N}+1$ si toutes les valeurs $H_{k_1,k_2,\ldots,k_i}(x)$ pour $0 < i \leq n$ sont entières impaires.

***Annonce de résultat*** : On verra ultérieurement qu'il suffit que, pour $x$ impair, $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x)$ soit entier (impair) pour que la suite $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ soit admissible.

***Proposition (terme général de la $N$-suite de Collatz)*** :

Elle découle immédiatement de 1.

$$N^{(n)}(x) = \frac{3^n x + 3^{n-1} + 3^{n-2}2^{k_1} + 3^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}})}{2^s} \tag{2}$$

avec $s = \sum k_i$, $n > 1$, $k_i > 0$ admissibles.

La formule pour la suite de Collatz originale ($C$-suite) est du même type avec la condition $k_i \geq 0$ et un ajustement de la numérotation.

## Recherche de cycles (cas général)

Tout cycle « rationnel » de Collatz est lié à un point de bouclage $x_0 \in \mathbb{Q}$ de $H$, c'est-à-dire tel que $x_0 = H(x_0)$. Donc :

***Proposition*** : Le point de bouclage de la suite[7] $ax + b$ est donné par :

$$x_0 = \frac{b}{2^s - a^n}(a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_1} + a^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}})$$

7. Pour simplifier l'écriture, on écrira « suite $ax + b$ » au lieu de « suite générée par la relation de récurrence $ax + b$ »

***Cas particulier*** $3x+1$ :

$$x_0 = \frac{1}{2^s - 3^n}(3^{n-1} + 3^{n-2}2^{k_1} + 3^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}}) \tag{3}$$

*Note* : Certains auteurs nomment les nombres de la forme du dénominateur : nombres de Collatz. Pour un tel nombre, l'ensemble des nombres possibles au numérateur forment la couronne de Collatz.

***Corollaire 1*** : La conjecture de Syracuse faible est équivalente, puisqu'il s'agit d'un point de bouclage, à : « il n'existe pas de suites $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ telles que $2^s - 3^n$ divise $3^{n-1} + 3^{n-2}2^{k_1} + 3^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}}$ autres que (2) ou (1,2) ».

*Note* : Si une telle suite existe, elle est forcément admissible par le résultat annoncé ci-dessus.

Cette relation semble résoudre le problème de la conjecture. Il « suffirait » de montrer que ce point de bouclage ne peut être que 1, 2 ou 4. Or il se trouve que les nombres entiers de la forme ci-dessus constituent l'objet d'un problème non résolu de divisibilité faisant intervenir les puissance de 2 et de 3.

***Corollaire 2*** : Pour chaque suite $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ il n'y a qu'un seul cycle (rationnel) ; le cycle de longueur $n$ est le même pour toutes les permutations circulaires des $k_i$.

Démonstration : La première proposition découle de la formule. Par ailleurs, par construction $N$ décale les valeurs de $k$, ce que confirme un simple calcul :

$N(x_0) = \frac{1}{2^s - a^n}(a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_2} + a^{n-3}2^{k_2+k_3} + \ldots + 2^{s-k_1})$, valeur construite sur la suite $(k_2, k_3, \ldots, k_n, k_1)$ .
QED

***Corollaire 3*** : Pour chaque valeur de $s$, il y a autant de cycles que de décompositions additives de $s$ aux permutations circulaires près [8].

***Corollaire 4*** : Les cycles liés à $ax+b$ sont des cycles de $ax+1$ amplifiés par $b$. Les cycles de $ax+b$ fournissent des cycles de $ax+be$ (en les amplifiant par $e$).

*Note* : Par construction les trajectoires des $H$ sont constituées de nombres rationnels. Parmi ceux-ci on distingue les cycles entiers (i.e. formés d'entiers).

*Note* : Les cycles entiers de $ax+b$ sont dits primitifs [9] si les valeurs du cycle n'ont pas de diviseur commun. En particulier les cycles rationnels $ax+1$ avec un dénominateur commun minimum $b$ deviennent des cycles primitifs de $ax+b$ par amplification par $b$.

Exemple : (19, 31, 49) est un $N$-cycle primitif pour $3x+5$ ; il correspond au cycle rationnel (19/5, 31/5, 49/5) de $3x+1$.

***Proposition*** : Le cycle $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ de $qx+r$ est primitif si et seulement si $x_0$ est premier avec $r$.

8. A propos de la partition d'un entier voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Partition_d'un_entier`.

9. Lagarias (1990, [1]) définit cette notion dans le cas de l'application $T_b$ ($a = 3$)

Démonstration :

1. $x_0$ et $r$ on un diviseur commun $d$. A voir $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ non primitif. En effet :

$x_0/d$ génère un cycle entier pour $qx + r/d$ et donc en remontant sur la suite $qx + r$, le cycle $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ est multiple de $d$ donc non primitif. Ou bien $x_1 = (qx_0 + r)/2^s$ et donc $d$ divise $x_1$ et ainsi de suite.

2. $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ non primitif de facteur commun $d$. A voir $x_0$ et $r$ ont un facteur commun supérieur à 1. En effet, par définition $x_1 = (qx_0+r)/2^s$ ; comme $d$ divise $x_1$ et $x_0$, il divise $r$.
QED

*Exemples* :

- $3x - 1$ possède le cycle entier (17, 25, ...) ; le cycle correspondant de $3x + 1$ est : (-17, -25, -37, -55, -41, -61, -91). Dans ce cas $(k_i) = (1, 1, 1, 2, 1, 1, 4)$
- $5x + 1$ possède le cycle primitif (17, 43, 27) ; le cycle correspondant de $5x + 3$ est : (51, 129, 81) ; $(k_i) = (1, 3, 3)$ (non primitif)
- $3x + 1$ a un cycle initié par $31/101$ ; le cycle correspondant de $3x + 3$ est initié par $93/101$ ; le cycle correspondant de $3x + 101$ est (31, 97, 49) ; $(k_i) = (1, 3, 3)$

***Corollaire 5*** : Avec $n = n_1 \times n_2$ si la suite $(k_i)$ se répète tous les $n_1$. Le cycle de longueur $n$ se décompose en $n_2$ sous-cycles de longueur $n_1$.

Démonstration : Par le corollaire 2, un cycle lié à $(k_1, k_2, \ldots, k_{n_1})$ existe (de longueur $n_1$). Sa répétition en $n_2$ exemplaires est un cycle de longueur $n$ qui est unique.

*Exemple pour respirer* :

Dans le cas de la suite $3x+1$ pour $(k_i) = (1, 2, 1)$, on a : $n = 3$, $s = 4$ et $x_0 = \frac{3^2+3\cdot 2+2^3}{2^4-3^3} = \frac{-23}{11}$. Le cycle est (-23, -29, -19, -23)/11.

En prenant $(k_i) = (1, 2, 1, 1, 2, 1)$ on a $n = 6$, $s = 8$.

Puis $x_0 = \frac{3^5+3^4\cdot 2+3^3\cdot 3^3+3^2\cdot 2^4+3\cdot 2^5+2^3}{2^8-3^6} = \frac{-989}{473}$

Par simplification par 43, cette dernière valeur est bien identique à la précédente $\frac{-23}{11}$.

***Corollaire 6*** : Si $k_i = 1, i = 1, \ldots, n$ les cycles sont de longueur 1 de valeur $x_0 = -1/(a - 2)$ (point fixe). Lorsque tous les $k_i$ sont égaux, les cycles se réduisent aussi en des poins fixes.

*Exemple* : $3x + 1$, $n = 1$ : le cycle est constitué d'un point fixe que l'on trouve en résolvant $(3x + 1)/2^k = x$ et donc $x = 1/(2^k - 3)$ (table 1).

| k | Point fixe |
|---|---|
| 1 | -1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1/5 |

TABLE 1 – Points fixes pour quelques valeurs de $k$

## Heuristique dans la recherche de cycles

Pour trouver un point de bouclage positif, il faut que la pente de $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ soit négative. Donc $a^n/2^s < 1$ ou encore $n \log a < s \log 2$ , et donc :

$$s > n\frac{\log a}{\log 2} \text{ ou } \frac{s}{n} > \frac{\log a}{\log 2} \tag{4}$$

Cela permet de limiter les valeurs de $s$. Pour espérer trouver un point fixe, il faut que la suite reste bornée et donc que $2^s$ soit au moins du même ordre de grandeur que $a^n$. Par contre, si la pente est positive, on trouve un cycle négatif (de nombres négatifs).

Le tableau 2 donne quelques exemples pour la suite $5x + 1$ ; $a = 5$ ; $n = 3$ et donc $s > 3 \log 5/ \log 2 \approx 6.97$ et donc $s = 7$ est le minimum possible.

Avec ces valeur : $x_0 = (25 + 5 \times 2_1^k + 2^{k_1+k_2})/3$

| $n$ | $s$ | $(k_i)$ | Cycle |
|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 1,1,5 | 13, 33, 83, 13, ... |
| 3 | 7 | 1,2,4 | 43/3, 109/3, 137/3, 43/3, ... |
| 3 | 7 | 1,3,3 | 17, 43, 27, 17, ... |
| 3 | 7 | 2,1,4 | 53/3, 67/3, 169/3, 53/3, ... |
| 3 | 7 | 2,2,3 | 61/3, 77/3, 97/3, 61/3, ... |
| 3 | 7 | 2,3,2 | 77/3, ... |

TABLE 2 – Cycles pour quelques valeurs de $n$, $s$ et $(k_i)$

On vérifie bien que, conformément au corollaire 2, les cycles liés à (2,2,3) et (2,3,2) sont les mêmes alors que les cycles liés à (1,2,4) et (2,1,4) sont différents. D'autres exemples figurent en annexe 7 (tableau 4, page 73).

## $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ sur $2\mathbb{N} + 1$

***Proposition*** : Si pour $x$ entier impair $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x) \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$, alors toutes les valeurs intermédiaires $H_{k_1,k_2,\ldots,k_i}(x)$ sont entières et impaires pour $0 < i < n$.

Autrement dit : si $x$ est un entier impair et $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x)$ pour $j < n$ n'est pas un nombre entier impair alors les nombres suivants de la suite $H_{k_1,k_2,\ldots,k_i}(x)$ pour $n > i \geq j$ ne sont pas entiers impairs. Pour cela, il suffit de montrer que $H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x)$ n'est pas entier.

Démonstration : Selon 1 page 10 $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x) = a/2^k$ avec $a$ impair et $k > 1$ ou $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x) = b$ avec $b$ pair.

Cas 1 : $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x) = a/2^k$ ($a$ impair) à voir que $H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x)$ n'est pas entier.

$H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x) = N_{k_{j+1}}(H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x)) = (3a/2^k + 1)/2^{k_{j+1}} = (3a + 2^k)/2^{k+k_{j+1}}$. Si cette valeur est entière cela implique que $a$ est pair. En contradiction avec l'hypothèse d'imparité de $a$.

Cas 2 : $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x) = b$ ($b$ pair) à voir que $H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x)$ n'est pas entier.

$H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x) = N_{k_{j+1}}(H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x)) = (3b+1)/2^{k_{j+1}}$ n'est pas entier.
QED

***Corollaire*** : Si $x_0$ entier est dans un cycle, le cycle complet est entier.

***Corollaire*** : Un cycle est soit entier soit tous ses éléments sont non entiers (rationnels).

*Remarque* : $n$ et $s$ sont respectivement le nombre de valeurs impaires et le nombre de valeurs paires des $n+s$ premières valeurs de la suite originale de Collatz. De l'inégalité 4 (page 13) (obtenue différemment) Eliahou (2011c) en tire une valeur minimum pour la longueur d'un cycle non trivial (voir page 17). A noter que cette inégalité valable pour les suites initiées par un nombre impair, se prolonge à toutes les suites en utilisant le même raisonnement sur la fonction $H'_{k_0}(H_{k_1,\ldots,k_n}(x))$ où $H'_{k_0}(x) = x/2^{k_0}$.

*Remarque* : La propriété intéressante $T^{(k)}(a2^k - 1) = a3^k - 1$ entraîne directement que la suite $(T^{(i)}(a2^k - 1))_{i=0,k}$ est formée de nombres entiers (et impairs pour $i < k$) pour $a \geq 0$ entier.

### Formule pour les prédécesseurs

Par inversion, la formule 1 page 10 permet de caractériser les prédécesseurs $p$ de $m$ pour la $N$-suite $ax+b$. En notant $a_m = \sum_{i=1}^{m} k_i$ on a :

$$p = \frac{m2^{a_n} - b(a^{n-1} + a^{n-2}2^{a_1} + a^{n-3}2^{a_2} + \ldots + 2^{a_{n-1}})}{a^n} \tag{5}$$

avec $0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n$ et $n > 1$.

En particulier, les prédécesseurs de 1 pour la $N$-suite de Collatz sont des nombres entiers de la forme :

$$p = \frac{2^{a_n} - (3^{n-1} + 3^{n-2}2^{a_1} + 3^{n-3}2^{a_2} + \ldots + 2^{a_{n-1}})}{3^n} \tag{6}$$

avec $0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n$ et $n > 1$.

Plusieurs conséquences peuvent être tirées de cette relation (Goodwin, 2015, [21]).

## Le suivi de Lagarias

Lagarias (2009, 2011, 2012, [22], [23], [24]) entretient une bibliographie commentée, souvent mise à jour, des principales contributions attachées à la conjecture de Collatz. Il est lui-même l'auteur de plusieurs résultats. L'intérêt épistémologique de ce travail est de constater que chacun traduit le problème dans sa sphère d'intérêt ou de sa spécialité. La recherche d'une solution conduit souvent à proposer de nouvelles conjectures. En s'inspirant de Lagarias (2010a, [25]) voici une liste des approches rencontrées.

*Informatique (programmation)* : Les astuces mises au point pour établir des records dans la vérification de la conjecture pour des nombres de plus en plus grand nécessitent de développer certains outils théoriques. Par ailleurs, des développements théoriques peuvent s'appuyer sur ces records.

Arsac (1987, [26]) étudie la complexité des calculs nécessaires et montre qu'elle peut être réduite en utilisant des propriétés de la suite.

Dans cette catégorie, il faut aussi insérer les représentations graphiques de la suite. Une des plus spectaculaires est due Jason Davies [10] qui montre les orbites de tous les nombres dont la longueur de la trajectoire est inférieure ou égale à dix-huit [11] .

*Théorie des nombres* : Le problème de Syracuse est notamment lié à des équations diophantiennes mêlant des puissances de 2 et de 3. Par ailleurs, Eliahou (2011c, [27]) utilise les suites de Farey pour démontrer un résultat sur la longueur des cycles éventuels non triviaux.

*Systèmes dynamiques et théorie ergodique* : Par son expression, la suite de Syracuse s'apparente à un système dynamique discret. Elle entre dans ce champ théorique classique lorsque le domaine de définition de la relation de récurrence est étendu à un espace mesurable plus riche, par exemple $\mathbb{R}$ (Chamberland, 1996, [28], [29] ; Lygeros et Rozier, 2014, [30]) ou, de façon très naturelle, $\mathbb{Z}_2$, l'ensemble des entiers 2-adiques. Dans ce dernier cas, on montre que l'extension de $T$ satisfait l'hypothèse d'ergodicité.

*Logique mathématique et théorie du calcul (theory of computation)* : la question se pose de la décidabilité de la conjecture. Conway (1972, [18]) a démontré que des problèmes du type de celui de Collatz sont formellement indécidables. Kurtz and Simon (2007, [31]) ont également montré qu'une généralisation naturelle du problème de Collatz est indécidable. Malheureusement, cette preuve ne peut pas être appliquée au problème de Collatz. Par ailleurs, la conjecture peut se reformuler en un problème de réécriture de chaînes de caractères (Sinyor, 2010, [32]).

Une approche se situe entre ce thème et celui de la programmation. Elle met en oeuvre FRACTRAN (voir annexe 8). Ce « langage » figure dans la recension de Lagarias (2010, [33]) par le fait qu'il étend le formalisme utilisé par Conway dans son article de 1972 consacré au problème $3x + 1$. Monks (2002, [34]) propose un programme FRACTRAN qui génère la suite de Syracuse et reporte la conjecture de Collatz en une conjecture sur le programme FRACTRAN.

Ce programme est donné par : $(\frac{1}{11}, \frac{136}{15}, \frac{5}{17}, \frac{4}{5}, \frac{26}{21}, \frac{7}{13}, \frac{1}{7}, \frac{33}{4}, \frac{5}{2}, 7)$

Appliqué à $2^n$, il génère une suite qui contient dans l'ordre les termes $2^b$, où $b$ parcourt les termes de la suite $T$ de Syracuse de premier terme $n$ et seulement ceux-là.

*Probabilités et processus stochastiques* : Slakmon & Macot (après 2003, [35]) tentent d'appliquer la théorie et les méthodes des cheminements aléatoires et de la théorie des jeux pour placer les suites de Syracuse dans un modèle probabiliste [12].

Carletti & Fanelli (2016, [36], 2017, [37]) considèrent l'itération de $S = C^{(3)}$ et établissent un processus de Markov sur les classes des nombres $\pmod 8$. Cela leur permet de montrer que les suites définies par $S$ sont presque partout (selon une mesure qu'ils définissent) non divergentes.

10. http ://www.jasondavies.com/collatz-graph/

11. La génération du graphe est basée sur le code Python par @TerrorBite. Le schéma de l'arbre en présentation radiale est repris d'un exemple fournit avec la remarquable bibliothèque D3.js de Mike Bostock (http ://bost.ocks.org/mike/).

12. Voir à ce propos l'analyse dans la section « Le monde de Syracuse » page 36

*Analyse complexe* : L'article de Opfer (2011, [16]) déjà cité est un exemple recensé dans cette catégorie. Chamberland (2003, [38]) en se référant aux mêmes travaux que Opfer, étudie la fonction analytique dont les coefficients sont les itérations de $T_{q,r}(m)$

*Analyse p-adique* : Les nombres 2-adiques apparaissent de façon accessoire dans l'étude des systèmes dynamiques et une connexion à la théorie ergodique. Ils sont aussi le support d'une généralisation de la conjecture proposée par Fleckinger & Abdoulkarim (2015, [39]).

*Analyse d'erreurs* : Une partie des articles s'attachent à montrer les erreurs dans les démonstrations proposées. Ainsi Haynberg (2009, [40], [41]), par exemple, s'attaque, mais de façon naïve, à une démonstration élaborée par Schorer (2009) revue par la suite par l'auteur sans grand succès (Schorer, 2014a, [42], 2014b, [43]).

*Epistémologie et philosophie des sciences* : Bendegem (2005, [44]) mène une suite de travaux pour « capturer » le travail des mathématiciens qui ne se résume évidemment pas à l'écriture de démonstrations. Le problème $3x + 1$ est pris comme étude de cas en se basant sur les bibliographies annotées de Lagarias et d'autres sources.

Le roman de Antoine Billot (2008, [45]) qui présente l'affrontement entre deux mathématiciens à propos de la suite de Syracuse peut également intégrer cette rubrique.

D'autres auteurs ont aussi établi des répertoires de méthodes. Chamberland (2010, [46]) propose un survol du sujet entre théorie des nombres et systèmes dynamiques. Son article est assorti d'une importante bibliographie (pas toujours référencée dans le texte). Outre la référence classique de Lagarias, il cite également l'ouvrage de Wirsching (1998, [7]) comme catalogue de résultats et de pistes d'attaque.

Dans un autre article (Chamberland, 2015, [47]) il répertorie les travaux qui étendent $T$ à des ensembles plus grands ($\mathbb{Z}$, les nombres rationnels à dénominateur impair, $\mathbb{Z}_2$, les entiers de Gauss, $\mathbb{Z}_2[i]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

Belaga et Mignotte (2015, [48]) établissent également une classification des travaux en considérant les aspects algorithmiques. Ils distinguent ceux liés à la théorie des nombres ou aux processus stochastiques.

# Quelques résultats marquants

Les records, les recherches sur la longueur maximum des cycles, les recherches sur le temps d'arrêt, l'extension aux nombres 2-adiques sont des classiques du domaine.

## Les records

Une course aux records est engagée de la plus grande valeur vérifiant la conjecture. Le record de 2009 tenu par T. Oliveira e Silva est de $5 \times 2^{60} \approx 5.8 \times 10^{18}$ (Oliveira, 2010, [49]).

Dans une suite de tests systématiques, outre les nombres pairs, il est inutile de traiter les nombres de la forme $m = 4n + 1$ puisque leur trajectoire passe toujours « sous » $m$ (voir l'annexe 2). Ce qui élimine 50% des nombres impairs.

Dans l'annexe 2, on constate aussi que la trajectoire des nombres de la forme $m = 16n+3$ passe également sous $m$. Les programmes de E. Roosendaal ([50]) (ancien recordman) et de T. Oliveira e Silva utilisent cette idée mêlée à d'autres astuces arithmétiques et de programmation.

## Une heuristique

En partant d'un nombre impair, on calcule la probabilité de retrouver un nombre impair (c'est la fonction originale $C$ qui est utilisée). Si la fonction est suffisamment « mélangeuse » (mixing), l'image du nombre a une chance sur deux d'être impaire, une chance sur quatre d'être le double d'un nombre impair, une chance sur huit d'être le quadruple d'un nombre impair, etc. Ces probabilités se retrouvent à chaque étape. Ainsi, calculer la croissance moyenne de la suite revient à la multiplication par $3/2$ une fois sur deux, la multiplication par $3/4$, une fois sur quatre, etc.

En utilisant les identités : $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2n = 1$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n = 2$ on trouve la croissance moyenne :

$$(3/2)^{1/2}(3/4)^{1/4}(3/8)^{1/8} = \frac{3^{1/2+1/4+\ldots}}{2^{1/2}4^{1/4}8^{1/8}\ldots} = \frac{3}{2^{1/2+2/4+3/8}\ldots} = \frac{3}{4}$$

Ainsi, il n'y aurait pas de suite divergente. Cet argument heuristique est parfois exploité pour suggérer que toute orbite finirait par passer au-dessous de son point de départ et donc, par un raisonnement par récurrence, mener à la conclusion que les trajectoires aboutissent finalement à 1. Ce prolongement ne prend pas en compte le fait que des trajectoires peuvent être finies, auquel cas l'argument de croissance moyenne n'est plus applicable. L'argument n'élimine pas les cycles autres que (1, 4, 2, 1).

A noter aussi que $3x - 1$ satisfait la même heuristique et possède le cycle (5, 14, 7, 20, 10, 5).

Cette même heuristique paraît plus intéressante pour conforter la conjecture liée au problème $ax + 1$ avec $a > 3$. Celle-ci affirme qu'il existe des valeurs initiales $m$ pour lesquelles les trajectoires sont non bornées. Le cas $7x + 1$ est en particulier cité par Crandall (1978, [3]).

## Longueur des cycles

Eliahou (2011c, [27]) [13] a obtenu une borne minimale pour la longueur d'un cycle. Etant donné un $C$-cycle il sépare les valeurs en $p$ nombres pairs $b_1, b_2, \ldots b_p$ et $q$ nombres impairs $c_1, \ldots, c_q$ avec $p + q = n$ longueur du cycle.

En appliquant l'opérateur $C$ à tous les nombres du cycle, on retombe sur les mêmes nombres. Il s'ensuit une relation :

$$b_1 \times \ldots \times b_p \times c_1 \times \ldots \times c_q = (\frac{b_1}{2}) \times \ldots \times (\frac{b_p}{2}) \times (3c_1 + 1) \times \ldots \times (3c_q + 1)$$

13. Eliahou (2011a, 2011b, [51], [52] analysent des cas particuliers et introduisent la méthode utilisée dans le cas général.

On en tire :

$$2^p = (3 + \frac{1}{c_1}) \times \ldots \times (3 + \frac{1}{c_q})$$

La relation permet de déduire directement l'inexistence de cycle de longueur 5 ou 8,

Pour le cas général, on pose $m$ la valeur minimum atteinte par le cycle ($m$ est forcément impair). De la relation précédente on tire : $3^q < 2^p < (3 + 1/m)^q$ et en prenant le logarithme : $q \log 3 < p \log 2 < q \log(3 + 1/m)$ puis (voir aussi 4, page 13) :

$$\frac{\log 3}{\log 2} < \frac{p}{q} < \frac{log(3 + 1/m)}{\log 2}$$

En utilisant le record établi par Tomás Oliveira e Silva (Oliveira e Silva, 2010), on peut écrire :

$$\frac{\log 3}{\log 2} < \frac{p}{q} < \frac{log(3 + 2 \times 10^{-19})}{\log 2}$$

En utilisant les résultats liés aux paires de Farey on peut montrer que $p$ et $q$ doivent être grands et estimer leur grandeur. On obtient pour leur somme : $n > 17'026'679'261$.

C'est remarquablement ingénieux ; chaque nouveaux record permet d'augmenter la longueur minimum des éventuels cycles non triviaux (voir aussi Ghosh, 2009, [53] ; Sinisalo, 2003, [54]).

## Vecteur de parité et fonction $Q_k$

Le rang d'un nombre impair $m$ est le nombre de fois successives où la prise $\pmod 2$ donne 1. C'est le nombre de digits 1 qui se succèdent à droite de l'écriture de $m$ en base deux. Par exemple :

- $5 = (101)_2$ est de rang 1 comme tous les nombres de l'ensemble $1 + 4\mathbb{N}$.
- $11 = (1011)_2$ est de rang 2 comme tous les nombres de l'ensemble $3 + 8\mathbb{N}$.
- $23 = (10111)_2$ est de rang 3 comme tous les nombres de l'ensemble $7 + 16\mathbb{N}$.

Il est facile de montrer que pour un nombre impair $m$ de rang $k$, $T^{(i)}(m)$ est impair pour $i < k$ et pair pour $i = k$. Malheureusement, cette propriété, ne vaut qu'au début de la trajectoire de $m$.

C'est en quelque sorte cette impasse que tente de forcer le vecteur de parité.

*Définitions* : Le vecteur de parité $v_k(m) = (x_i(m))_{0<=i<k}$ de $m$ est donné par : $x_i(m)$ valant 0 ou 1 selon la parité de $T^{(i)}(m)$ (noté aussi $\overline{T^{(i)}(m)}$) ;

$v(m) = lim_{k\to\infty} v_k(n)$ ;

$d(m, a, b) = \sum_{a<=i<b} x_i(m)$ ; $d(m, b) = d(m, 0, b)$

Exemple : $v_6(17) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$

Selon Lagarias, l'idée de Terras est d'exprimer $m$ comme fonction de $v$.

*Définition* : $Q_k(m) = \sum_{i=0,k-1} x_i(m) 2^i$

$Q_k$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$

A noter que le vecteur de parité de longueur $k$ de $m$ n'est rien d'autre que le développement binaire de $Q_k(m)$ écrit dans l'ordre inverse.

$Q_k(m)$ globalise le vecteur de parité et il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des $v_k$ et les valeurs de $Q_k$. C'est une technique classique de remplacer des suites binaires par les nombres dont elles sont le développement en base deux.

*Exemple* : $v_6(17) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$ ; $Q_6(17) = 37$ s'écrit en format binaire : 100101.

A noter que les auteurs découpent souvent leur travail en de nombreuses petites étapes (lemmes) et introduisent de nombreuses notations dont il est difficile d'apprécier l'apport conceptuel. Elles font souvent perdre le fil du raisonnement. Voici quelques propriétés de $T$ et $Q_k$ quasiment immédiates, exposées sans notation additionnelle.

***Propriétés utiles*** :

U1 : $T(m + 2a) = ta + T(m)$ avec $t = 1$ ou $t = 3$ selon la parité de $m$

U2 : $T(m + 4a) = t_1 2a + T(m)$ ; $T^{(2)}(m + 4a) = t_1 t_2 a + T^{(2)}(m)$ avec $t_1 = 1$ ou $t_1 = 3$ selon la parité de $m$ et avec $t_2 = 1$ ou $t_2 = 3$ selon la parité de $T(m)$

U3.1 : Pour $i <= k$, $m$ impair : $T^{(i)}(m + 2^k \times a) = 2^{k-i} 3^{d(m,i)} a + T^{(i)}(m)$

U3.2 : Pour $i < k$ : $T^{(i)}(m + 2^k \times a) \equiv T^{(i)}(m) \pmod 2$

U3.3 : $T^{(k)}(m + 2^k \times a) \equiv a + T^{(k)}(m) \pmod 2$

U4 : $Q_k(m + 2^k \times a) = Q_k(m)$ ; $Q_k$ est $2^k$ - périodique

U5 : $Q_k(m + 2^{k-1} \times a) = Q_k(m) + \bar{a} 2^{k-1}$

U6 : $Q_k^{(n)}(m + 2^{k-1} \times a) = Q_k^{(n)}(m) + \bar{a} 2^{k-1}$ avec $\bar{a}$ valant 0 ou 1 selon la parité de $a$

U7.1 : $Q_k(m) = Q_{k-1}(m) + \overline{T^{(k-1)}(m)} \times 2^{k-1}$

U7.2 : $Q_k^{(2)}(m) = Q_{k-1}^{(2)}(m) + (\overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(m)}) \times 2^{k-1}$

U7.3 : $Q_k^{(4)}(m) = Q_{k-1}^{(4)}(m) + (\overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}^{(3)}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}^{(2)}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(n)}) \times 2^{k-1}$

U7.4 : $Q_k^{(2^i)}(m) = Q_{k-1}^{(2^i)}(m) + 2^{k-1} \sum_{i=0,2^i-1} \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}^{(i)}(m))} = Q_{k-1}^{(2^i)}(m) + 2^{k-1} \times A$

U8 : $Q_k$ conserve la parité et on a : $T(Q_k(m)) = Q_{k-1}(T(m))$ pour $m$ pair ; $T(Q_k(m)) = 2 + 3Q_{k-1}(T(m))$ pour $m$ impair

Démonstrations :

U1, U2 : par calcul direct.

U3.1 : généralisation par récurrence.

U3.2, U3.3 : passage $\pmod 2$.

U4 : de la définition de $Q_k$ et de U3.2.

U5 : En utilisant la définition, U3.1 et la définition :
- $Q_k(m + 2^{k-1} \times a) = \sum_{i=0,k-2} (\overline{T^{(i)}(m + 2^{k-1} \times a)} 2^i) + \overline{T^{(k-1)}(m + 2^{k-1} \times a)} 2^{k-1}$
- $Q_k(m + 2^{k-1} \times a) = \sum_{i=0,k-2} (\overline{T^{(i)}(m)} 2^i) + (\overline{a + T^{(k-1)}(m)}) 2^{k-1}$
- $Q_k(m + 2^{k-1} \times a) = Q_k(m) + \bar{a} 2k - 1$

U6 : utilisation de U5 de façon répétée.

U7.1 : par définition.

U7.2 : par utilisation de U7.1.

U7.3 : par utilisation de U7.2 et $Q_k^{(4)}(m) = Q_k^{(2)}(Q_k^{(2)}(m))$.

U7.4 : généralisation.

U8 : de $Q_k(m) = \sum_{i=0,k-1}(\overline{T^{(i)}(m)}2^i) = \bar{m} + 2\sum_{i=0,k-2}(\overline{T^{(i+1)}(m)}2^i) = \bar{m} + 2Q_{k-1}(T(m))$.

On en tire les relations : $Q_k(m) \equiv m \pmod 2$ ; $T(Q_k(m)) = Q_{k-1}(T(m))$ pour $m$ pair ; $T(Q_k(m)) = 2 + 3Q_{k-1}(T(m))$ pour $m$ impair.
QED

*Développement de la relation U3.1* :

La relation U3.1 (avec $m = -1$) généralise la *propriété intéressante*. Elle confirme que tous les $T^{(i)}(a2^k - 1)$ pour $i < k$ sont impairs. Et donc :

$T^{(i)}(a2^k - 1) = N^{(i)}(a2^k - 1) = 2^{k-i}3^i a - 1$ pour $i < k$ et $N^{(k)}(a2^k - 1) = [3^k a - 1]$.

Cette relation permet de calculer facilement certaines itérations de $N$ des éléments des ensembles $S_i$.

Pour $m = 2^{2n-1}(4k+1) - 1 \in S_1$ : $N^{(i)}(m) = 2^{2n-1-i}3^i(4k+1) - 1$ pour $i < 2n-1$ et $N^{(2n-1)}(m) = [3^{2n-1}(4k+1) - 1]$. Comme $3^{2n-1}(4k+1) - 1 \equiv 2 \pmod 4$, $N^{(2n-1)}(m) = (3^{2n-1}(4k+1) - 1)/2$

Pour $m = 2^{2n}(4k+3) - 1 \in S_2$ : $N^{(i)}(m) = 2^{2n-i}3^i(4k+3) - 1$ pour $i < 2n$ et $N^{(2n)}(m) = [3^{2n}(4k+3) - 1]$. Comme $3^{2n}(4k+3) - 1 \equiv 2 \pmod 4$, $N^{(2n)}(m) = (3^{2n}(4k+3) - 1)/2$

Pour $m = 2^{2n-1}(4k+3) - 1 \in S_3$ : $N^{(i)}(m) = 2^{2n-1-i}3^i(4k+3) - 1$ pour $i < 2n-1$ et $N^{(2n-1)}(m) = [3^{2n-1}(4k+3) - 1]$. Comme $3^{2n-1}(4k+3) - 1 \equiv 0 \pmod 4$, $N^{(2n)}(m) = (3^{2n-1}(4k+3) - 1)/2^j$ avec $j \geq 2$.

Pour $m = 2^{2n}(4k+1) - 1 \in S_4$ : $N^{(i)}(m) = 2^{2n-i}3^i(4k+1) - 1$ pour $i < 2n$ et $N^{(2n)}(m) = [3^{2n}(4k+1) - 1]$. Comme $3^{2n}(4k+1) - 1 \equiv 0 \pmod 4$, $N^{(2n)}(m) = (3^{2n}(4k+1) - 1)/2^j$ avec $j \geq 2$.

***Lemme de réécriture*** : Soient $m$ et $n$ deux entiers positifs. On a les équivalences :

1. $Q_k(m) = Q_k(n)$
2. $v_k(m) = v_k(n)$

Démonstration : par définition (rappel : $v_k(n)$ est le développement binaire renversé de $Q_k(n)$)
QED

Les fonctions $Q_k$ permettent de « condenser » les suites $(T^{(i)})_{0 \leq i < k} \pmod 2$.

***Lemme de périodicité*** : Soient $m$ et $n$ deux entiers positifs. Si $n \equiv m \pmod{2^k}$ alors $Q_k(m) = Q_k(n)$ (et donc $v_k(m) = v_k(n)$).

Démonstration : il s'agit de la propriété U4.
QED

En d'autres termes :

Pour $m = a \times 2^k + b$ les $k$ premières composantes de $v(m)$ ne dépendent que de $b$ (i.e. $v_k(m) = v_k(b)$ pour tout $a$) ou encore $Q_k$ est $2^k$-périodique.

*Exemple* : Les vecteurs $v_5(a \times 2^5 + 17)$ et $v_5(17)$ sont égaux pour tout $a$.

***Lemme de surjectivité*** : $w = (w_i)_{0 \leq i < k}$ élément de $\{0,1\}^k$ est vecteur de parité de longueur $k$. C'est-à-dire il existe $n$ tel que $v_k(n) = w$. $Q_k$ est donc surjective.

Démonstration (par induction sur k) :

Vrai pour $k = 1$ ; on a $w_0$ valant 0 ou 1, il suffit de prendre $n$ pair ou impair.

On suppose la propriété vraie pour les suites de parité de longueur $k$ et soit une suite de longueur $k+1$ : $w = (w_i)_{0<=i<k+1}$

Par hypothèse d'induction il existe $n$ tel que $v_k(n) = (w_i)_{0 \leq i < k}$.

On prend alors $m_1 = 2k + 1 + n$ et $m_1 = 2k + 1 + 2^k + n$.

On a : $v_k(m_1) = v_k(m_2) = (w_i)_{0 \leq i < k}$ par U4.

De plus : $T^{(k)}(m_1) = 2 \times 3^s + T^{(k)}(n)$ ; $T^{(k)}(m_2) = (2+1) \times 3^s + T^{(k)}(n)$

Ces deux nombres sont de parité opposée. On prend $m_1$ ou $m_2$ selon que $w_{k+1}$ est 0 ou 1.
QED

$Q_k$ est une application $2^k$-périodique surjective de $\mathbb{N}$ sur $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$

$\overline{Q_k}$ restriction de $Q_k$ est une permutation de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$.

***Lemme de l'ordre*** : L'ordre de $\overline{Q_k}$ est une puissance de 2 (divise $2^k$)

Démonstration : On démontre par récurrence que $Q_k^{(2^k)}(n) \equiv n \pmod{2^k}$

Pour $k = 1$ et $k = 2$ $\overline{Q_k}$ est l'identité.

- $\overline{v_2}(0) = (0, \overline{0})$ ; $Q_2(0) = 0$
- $\overline{v_2}(1) = (1, \overline{T(1)}) = (1, 0)$ ; $Q_2(1) = 1$
- $\overline{v_2}(2) = (1, \overline{T(2)}) = (0, 1)$ ; $Q_2(2) = 2$
- $\overline{v_2}(3) = (1, \overline{T(3)}) = (1, 1)$ ; $Q_2(3) = 3$

Hypothèse de récurrence (HR) : $Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) \equiv n \pmod{2^{k-1}}$

On prendra : $Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) = n + \alpha 2^{k-1}$

- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(Q_k^{(2^{k-1})}(n))$
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) + 2^{k-1} \times A)$ par U7.4
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(n + \alpha \times 2^{k-1} + 2^{k-1} \times A)$ par HR
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(n + (\alpha + A)2^{k-1}) = Q_k^{(2^{k-1})}(n) + (\alpha + A)2^{k-1})$ par U6
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) + 2 \times (\alpha + A)2^{k-1})$ par U.4 et HR
- $Q_k^{(2^k)}(n) \equiv Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) \equiv n \pmod{2^k}$

QED

*Quelques fonctions $Q_k$*

- $\overline{Q_1} = Id$

– $\overline{Q_2} = Id$
– $\overline{Q_3} = (1\ 5)$ d'ordre 2
– $\overline{Q_4} = (1\ 5)(2\ 10)(9\ 13)$ d'ordre 2
– $\overline{Q_5} = (1\ 21)(2\ 10)(4\ 20)(5\ 17)(7\ 23)(9\ 29\ 25\ 13)(18\ 26)$ d'ordre 4

## Recherche sur le « temps d'arrêt »

Plusieurs travaux se sont concentrés (et se concentrent encore) sur le moment où une suite de Collatz passe au-dessous de son point de départ.

### Préparation

Chaque 1 dans la suite $v_k(n) = (x_i(n))_{0 \leq i < k}$ représente l'opération $x \mapsto (3x+1)/2$ et chaque 0 la division par 2. On en tire :

$$T(n) = \frac{3^{x_0(n)} n + x_0(n)}{2}$$

puis :

$$T^{(2)}(n) = \frac{3^{x_0(n)+x_1(n)} n}{2^2} + \frac{3^{x_1(n)} x_0(n)}{2^2} + \frac{x_1(n)}{2}$$

et finalement :

$$T^{(k)}(n) = \lambda_k(n) n + \rho_k(n) \tag{7}$$

avec :

$$\lambda_k(n) = \frac{3^{d(n,k)}}{2^k}; \rho_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) \frac{3^{d(n,i+1,k)}}{2^{k-i}}$$

Il ne s'agit de rien d'autre qu'une réécriture de la formule 1 de la page 10.

***Propritétés*** : $\lambda_k$ et $\rho_k$ sont $2^k$-périodiques.

On définit aussi $c_k(n) = \ln \lambda_k(n) = d(n,k) \ln 3 - k \ln 2$

***Propriété*** : $T^{(k)}(n) \geq \lambda_k(n) n$

Donc $\lambda_k(n) < 1$ est une condition nécessaire pour que $T^{(k)}(n) < n$

*Définition* : Le *temps d'arrêt* de $m$ (*stopping time*) noté $\sigma(m)$ vaut $\min_k(T^{(k)}(m) < m)$

*Définition* : Le *temps de convergence* (*coefficient stopping time* – CST) de $m$ noté $\omega(n)$ est la valeur de $k$ minimum telle que $\lambda_k(n) < 1$ (ou $c_k(n) < 0$).

***Propriété*** : $\omega(n) \leq \sigma(n)$

Exemple : $T(17) = 26$, $T^{(2)}(17) = 13$ donc $\sigma(17) = 2$ ; $\lambda_1(17) = 3/2$, $\lambda_2(17) = 3/4$ donc $\omega(17) = 2$

Si l'on pouvait démontrer que le temps d'arrêt est fini pour tout nombre, une démonstration par induction complète permettrait de conclure.

### Le théorème de Terras

Le théorème de Terras affirme que presque tous les nombres ont un *temps d'arrêt* fini. Le résultat n'est pas vraiment étonnant. En effet, lors d'une approche naïve qui élimine par tranches des valeurs de $m$ qui satisfont la conjecture, on constate bien que l'ensemble restant est de plus en plus restreint (bien qu'infini).

***Théorème A (Terras)*** [14] : La densité de l'ensemble $S_k = \{m \in \mathbb{N} : \sigma(n) \leq k\}$ dans $\mathbb{N}$ tend vers une limite finie $F(k)$. Plus précisément :

$$F(k) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \#\{m : m \leq x \text{ et } \sigma(m) \leq k\}$$

De plus, $F(k) \to 1$ lorsque $k \to \infty$. Ainsi presque tous les entiers ont un *temps d'arrêt* fini.

Ce théorème ne permet pas de conclure sur l'induction évoquée à propos de l'heuristique. Il ne permet pas non plus d'exclure l'existence de cycles autres que le trivial.

Ce théorème dans une formulation différente a été démontré indépendamment par C. Everett (cité par Crandall, 1978, [3]) [15].

Le résultat obtenu par Carletti & Fanelli (2016, [36]) va dans le même sens. Ces auteurs considèrent l'itération de $S = C^{(3)}$ et établissent un processus de Markov sur les classes des nombres $\pmod 8$. Cela leur permet de montrer que les suites définies par $S$ sont presque partout (selon une mesure qu'ils définissent) non divergentes.

La démonstration du théorème de Terras proposée par Eric Roosendaal [16] est une version simplifiée de la démonstration originale. Toutefois un lemme pêche par une utilisation abusive de la notion de limite bien que les exemples soient assez convainquant. Une autre formulation devrait permettre certainement de palier ce défaut. D'autres « raccourcis » sur des passages à la limite rendent la démonstration approximative.

La démonstration rapportée par Lagarias (1985, [4]) [17] est plus complète. En voici les grandes lignes.

On considère :

- un vecteur $v_k = (v_i)_{i=0,k-1}$ de $\{0,1\}^k$
- l'ensemble $S(v_k)$ des nombres $m$ ayant $v_k$ comme vecteur de parité. Cet ensemble n'est pas vide par le lemme de surjectivité
- $n_0(v_k)$ élément minimum de $S(v_k)$

A noter que : $S(v_k) = \{n_0(v_k) + n2^k; n \in \mathbb{N}\}$ ; $n_0(v) = \overline{Q_k}^{-1}(m)(\sum_{i=0,k-1} v_i 2^i)$.

*Définition* : Un vecteur $v = (v_i)_{i=0,k-1}$ de $\{0,1\}^k$ est admissible si :

1. $(v_0 + \ldots + v_{k-1}) \ln 3 < k \ln 2$

14. la nomenclature des théorèmes est reprise de Lagarias
15. Un résultat de Slakmon & Macot (2003, [35], 2006, [55]) semble nettement plus fort. Toutefois, ce résultat dépend d'une hypothèse simplificatrice hasardeuse.
16. `http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html`
17. http ://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/ paper.html

2. $(v_0 + \ldots + v_i)\ln 3 > (i+1)\ln 2$ avec $0 \leq i < k-1$ (c'est la valeur de $k$ minimum qui rend $\lambda_k(m) < 1$

En particulier si $v$ est admissible : $(v_0+\ldots+v_{k-2})\ln 3 > (k-1)\ln 2$ et donc $v_0+\ldots+v_{k-1} = \lfloor k\theta \rfloor$ avec $\theta = \ln 2/\ln 3 \approx 0.63093$.

***Théorème C (Terras)*** [18] :

(a) L'ensemble des entiers $m$ tels que $\omega(m) = k$ est l'ensemble des entiers pour lesquels il existe un vecteur admissible $v$ avec $n_0(v) \equiv m \pmod{2^k}$.

(b) Soit $m = n_0(v)$ pour $v$ de longueur $k$. Si $v$ est admissible, alors tout nombre suffisamment grand congruent à $m \pmod{2^k}$ possède $k$ comme temps d'arrêt $\sigma(m)$. Si $v$ n'est pas admissible, alors il existe seulement un nombre fini d'entiers congruents à $m \pmod{2^k}$ qui ont $k$ comme temps d'arrêt.

Démonstration :

Le point (a) est directement lié à la définition de vecteur admissible. Le point (b) demande un peu plus de travail. Le lecteur est prié de se référer à l'article de Lagarias.

Ce théorème implique que l'ensemble $I_k = \{m : \omega(m) = k\}$ est la réunion de progressions arithmétiques de raison $2^k$. Donc $I_k$ possède une densité asymptotique :

$$d(I_k) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\#\{m : m \leq x \text{ et } \omega(m) = k\}$$

avec $d(I_k) = \frac{1}{2^k}\#\{v_k(admissible)\}$

Le théorème implique aussi que $S_k$ diffère de $I_k$ d'un nombre fini d'éléments. Sa densité asymptotique est donc la même. Cela démontre la première partie du théorème de Terras. La densité asymptotique de l'ensemble des entiers dont le *temps d'arrêt* vaut au plus $k$ est égale à :

$$F(k) = \sum \frac{1}{2^{length(v)}}$$

La somme étant prise sur tous les vecteurs $v$ admissibles avec $length(v) \leq k$.

Cette formule permet de démontrer la deuxième partie du théorème de Terras et même un peu plus :

***Théorème D*** : Pour tout $k \geq 1$,

$$1 - F(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\#\{m : m \leq x \text{ et } \sigma(m) > k\} <= 2^{-\eta k}$$

où $\eta = 1 - H(\theta) \approx 0.05004$ avec $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ est la fonction d'entropie et $\theta = 1/(\log_2 3)$

Ce théorème ne peut pas être amélioré de façon significative.

18. Dans la présentation de Lagarias le théorème B rassemble des résultats concernant la fonction $Q_k$ et le vecteur de parité.

## Graphe de Collatz et ensembles des prédécesseurs

Chamberland (2010, [46]) fait état, parmi d'autres choses, des recherches sur l'ensemble des prédécesseurs d'un nombre $a$ :

$$P(a) = \{m \in \mathbb{N} : T^{(k)}(m) = a \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N}\}$$

On filtre cet ensemble par les ensembles constitués des nombres de $P(a)$ inférieurs à une valeur $x$. Le cardinal de ces ensembles sera noté $Z_a(x)$. En particulier :

$$Z_1(x) = \#\{m \in \mathbb{N} : m < x \text{ et } T^{(k)}(m) = 1 \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N}\}$$

Le calcul de la grandeur de $Z_a$ a été initiée par Crandall (1978, [3]) qui montre qu'il existe une constante $c$ telle que $Z_1(x) > x^c$ pour $x$ suffisamment grand.

Les travaux menés depuis ont permis de trouver des valeurs de $c$ de plus en plus grandes (l'idéal étant 1). $c = 0.81$ a été obtenu par Applegate & Lagarias (1995, [56]) en utilisant une approche de programmation non-linéaire due à Krasikov. Cette méthode a encore permis d'affiner la valeur à $c = 0.84$ (Krasikov & Lagarias, 2002, [57]).

## Extension de la suite à $\mathbb{Z}_2$

L'étude du comportement de systèmes dynamiques (itérations de fonction) conservant une mesure est appelée théorique ergodique. Le problème $3x + 1$ peut entrer dans ce formalisme dans la mesure où la fonction $T$ se prolonge naturellement en une fonction sur les nombres 2-adiques[19] $\mathbb{Z}_2$ :

$$T(\alpha) = \begin{cases} \alpha/2 & \text{si } \alpha \equiv 0 \pmod 2 \\ (3\alpha+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle conserve la mesure de Haar $\mu_2$ définie sur cet ensemble avec $\mu_2(\mathbb{Z}_2) = 1$.

On peut de plus montrer que cette fonction satisfait la condition d'ergodicité en montrant qu' elle est suffisamment « mélangeuse » (« strongly mixing »). C'est-à-dire que si $T^{-1}(E) = E$ alors $\mu_2(E) = 0$ ou $\mu_2(E) = 1$ avec $E \subset \mathbb{Z}_2$ ou encore que $T(\mathbb{Z}_2)$ et $\mathbb{Z}_2$ ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle.

***Pointwise Ergodic Theorem*** : Avec $X$ espace mesurable, $T$ et $f$ fonction sur $X$, $T$ ergodique et $f$ mesurable, alors pour presque tout $x \in X$ :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^{(i)}(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \tag{8}$$

Ce théorème est un corollaire du théorème de Birkhoff qui égalise presque partout la moyenne sur le temps et celle sur l'espace.

Cette relation devient dans notre cas : pour presque tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$

19. Voir l'annexe 9 pour une brève introduction aux nombres 2-adiques.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^{(i)}(\alpha)) = \int_{\mathbb{Z}_2} f d\mu \tag{9}$$

***Corollaire*** : Pour presque tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ :
– $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{T^{(i)}(\alpha) \equiv 0 \pmod 2; i < n\} = 1/2$ .
– $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{T^{(i)}(\alpha) \equiv 0 \pmod{2^k}; T^{(i)}(\alpha) \neq 0 \pmod{2^{k+1}}; i < n\} = 1/2^{k+1}$ avec $k \geq 1$.
Démonstration :

Dans le premier cas, on prend $f$ la fonction caractéristique de la boule $B_{1/2}(0)$ dont la mesure vaut : $\mu_2(B_{1/2}(0)) = 1/2$.

Dans l'autres cas, on prend pour $f$ la fonction caractéristique de la couronne $B_{1/2^k}(0) - B_{1/2^{k+1}}(0)$. On a : $\mu_2(B_{1/2^k}(0) - B_{1/2^{k+1}}(0)) = \mu_2(B_{1/2^k}(0)) - \mu_2(B_{1/2^{k+1}}(0)) = 1/2^k - 1/2k + 1 = 1/2^{k+1}$.
QED

Autrement dit la densité des valeurs de $T^{(i)}(\alpha) \equiv 1 \pmod 2$ (impair) vaut $1/2$ et la densité des valeurs de $T^{(i)}(\alpha)$ telles que $T^{(i)}(\alpha) \equiv 0 \pmod{2^k}$ et $T^{(i)}(\alpha) \neq 0 \pmod{2^{k+1}}$ vaut $1/2^{k+1}$. Ou encore pour presque tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ la suite $(T^{(i)}(\alpha))$ est uniformément distribuée $\pmod{2k}$ pour tout $k \geq 1$

Cela formalise l'heuristique décrite précédemment prolongée à la fonction $T$.

Malheureusement le bébé est parti avec l'eau du bain. Le théorème n'indique rien sur le comportement de $T$ sur $\mathbb{Z}$ puisque cet ensemble est de $\mu_2$-mesure nulle.

En fait, toutes les trajectoires $(T^{(i)}(m)), m \in \mathbb{Z}$ pourraient n'avoir jamais la propriété énoncée dans le théorème. En effet, si la trajectoire est $k$-périodique elle ne peut pas être distribuée uniformément. Et si elle est divergente elle ne peut même pas être distribuée uniformément $\pmod 2$.

Connecter le problème $3x + 1$ à la théorie ergodique est-elle une voie à suivre ? Pour cela il faudrait obtenir une version de la relation (8) dans le cadre d'une théorie ergodique « discrète ». Auquel la conjecture de Collatz serait démontrée pour presque tout $m \in \mathbb{Z}$.

## Prolongement des fonctions $Q_k$ à $\mathbb{Z}_2$

Une autre connexion aux entiers 2-adiques peut donner davantage d'informations sur le problème. Il s'agit de la prolongation de la famille des fonctions $Q_k$.

On définit $Q_\infty : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ par :

$Q_\infty(\alpha) = \sum_{i=0,\infty} x_i(\alpha) 2^i$ avec $x_i(\alpha) = T^{(i)}(\alpha) \pmod 2$

Cette fonction encode le comportement de toutes les itérations d'un nombre. C'est l'avantage de $Q_\infty$ sur les fonctions $Q_k$.

*Quelques valeurs* : $Q_\infty(1) = \sum_{i=0,\infty} 2^{2i} = -1/3\,; \quad Q_\infty(2) = -2/3\,; \; Q_\infty(3) = -20/3$

Lagarias explicite les propriétés $Q_\infty$ observées par plusieurs mathématiciens dont Terras et Pomerance qui découlent des propriétés des fonctions $Q_k$ :

***Théorème*** : L'application $Q_\infty$ est bijective, continue et préserve la mesure 2-adique.

Par ailleurs, une nouvelle formulation de la conjecture en terme de la fonction $Q_\infty$ est :

***Proposition (Lagarias, 1985, [4])*** : La conjecture de Collatz est équivalente à : $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z}$ (de fait $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$).

Démonstration :

Si la conjecture de Collatz est vérifiée alors la suite des $T^{(k)}(m)$ est finalement composée de l'alternance de 0 et 1. Le développement de Hensel $(1, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ représente la fraction $1/3$ et $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ représente la fraction -1/3

Par ailleurs, il faut montrer que si la suite des $T^{(k)}(m) \pmod 2$ est composée finalement de 1 et de 0 en alternance, alors $m = 1$ ou $m = 2$.

On peut se restreindre à $m \in 2\mathbb{N} + 1$.

On choisit la première valeur $T^{(k)}(m)$ telle que $T^{(k)}(m) \equiv 1 \pmod 2$ et par la suite 0 et 1 s'alternent. A montrer que ce n'est possible que si $m = 1$. Pour cela, on examine les cas possibles selon la partition de $2\mathbb{N} + 1$ par les ensembles $S_i$.

1. $m$ ne peut pas être dans $S_2 \cup S_4$ : En effet, par la remarque de la propriété intéressante, $T^{(k+1)}(m)$ est impair.

2. $m \in S_3$ : $m = 2^{2n-1}(4k + 3) - 1$ par la remarque de la propriété intéressante $n = 1$ et donc $m = 8k + 5 = 2^p i + 5$ où $i$ est un nombre impair et $p \geq 3$.

$T(2^p i + 5) = 3 \times 2^{p-1} i + 8$ ; $T^{(2)}(2^p i + 5) = 3 \times 2^{p-2} i + 4$. On trouve deux nombres pairs successifs. $m$ ne peut pas être dans $S_3$.

3. $m \in S_1$ : $m = 2^{2n-1}(4k + 1) - 1$ par la remarque de la propriété intéressante $n = 1$ et donc $m = 8k + 1 = 2^p i + 1$ où $i$ est un nombre impair et $p \geq 3$.

$T(2^p i + 1) = 3 \times 2^{p-1} i + 2$ (pair) ; $T^{(2)}(2^p i + 1) = 3 \times 2^{p-2} i + 1$ (impair) ; $T^{(3)}(2^p i + 1) = 9 \times 2^{p-3} i + 2$

3.1 Si $p$ est pair on aboutit à $3^q \times 2i + 2$ et $3^q \times i + 1$ , deux nombres pairs qui se suivent sauf si $i = 0$.

3.2 Si $p$ est impair on aboutit à $3^q \times 2i + 1$ et $3^{q+1} \times i + 2$ , deux nombres impairs qui se suivent sauf si $i = 0$.
QED

Le comportement de sous-itérations est lui-même intéressant.

Soit $\mathbb{Q}'$ l'ensemble des fractions dont le dénominateur est impair. Il est contenu dans $\mathbb{Z}_2$. Il consiste exactement en les entiers 2-adiques dont la suite des 2-digits est finie ou périodique.

***Proposition (Lagarias, 1985, [4])*** : La conjecture des cycles finis est équivalente à : il existe un entier impair $M$ tel que : $Q_\infty(\mathbb{Z}) \subset (1/M)\mathbb{Z}$

En fait on peut prendre $M = \prod(2^l - 1)$ où le produit est pris sur tous les entiers $l$ pour lesquels il existe un cycle minimal de longueur $l$.

***Conjecture de périodicité (Lagarias, 1985, [4])*** : $Q_\infty(\mathbb{Q}') = \mathbb{Q}'$

Exemple : $Q_\infty(10) = -26/3$ ; $Q_\infty(-26/3) = -54$ ; $Q_\infty(-54) = -82/7$ ; $Q_\infty(-82/7) = ?/15$

On peut voir que si $m$ possède une trajectoire divergente alors la suite $(x_0(m), x_1(m), \ldots)$ ne peut pas être périodique. Si cette conjecture s'avère être vraie, alors il en va de même pour la conjecture des trajectoires (non) divergentes.

## Ensembles suffisants

*Définition* : $S$ est suffisant si pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $s \in S$ tel que la trajectoire de $m$ selon $T$ coupe celle de $s$. C'est-à-dire qu'il existe $k$ et $l$ tel que $T^{(k)}(m) = T^{(l)}(s)$.

A noter qu'à partir de cette valeur commune, les trajectoires sont identiques.

***Proposition*** : $F_1 \cup F_2$ est un ensemble suffisant.

Démonstration :

Par itération de l'opération $P : x \to (x-1)/4$ $m \notin F_1 \cup F_2$ impair va sur un élément $m'$ de $F_1$ ou $F_2$. Puis on a $N(m) = N(m')$.
QED

Avec la même démonstration on a :

***Proposition*** : $F_s \cup F_{s+1}$ est un ensemble suffisant.

Il existe donc des ensembles suffisants de densité aussi faible que l'on veut. Toutefois, cela reporte le problème de $\mathbb{N}$ sur un autre ensemble infini.

***Proposition*** : $F_{2s}$ est un ensemble suffisant pour tout $s \in \mathbb{N}_0$.

Démonstration : Il suffit de voir que pour tout élément de $F_1$, il existe un élément de $F_2$ tel que les deux trajectoires se rencontrent.

On considère successivement les ensembles $F_1 \cap S_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

**1.** $x \in F_1 \cap S_1$

$x = 2^{2n-1}(4k+1) - 1$ avec $n \geq 2$

$N^{(2n-2)}(x) = N^{(2n-2)}(2^{2n-2}(8k+2) - 1) = 3^{2n-2}(8k+2) - 1 \equiv 1 \pmod 8$ et donc $N^{(2n-2)}(x) \in F_2$.

**2.** $x \in S_2 \subset F_1$

$x = 2^{2n}(4k+3) - 1$ avec $n \geq 1$

$N^{(2n-1)}(x) = N^{(2n-1)}(2^{2n-1}(8k+6) - 1) = 3^{2n-1}(8k+6) - 1 \equiv 1 \pmod 8$ et donc $N^{(2n-1)}(x) \in F_2$.

**3.** $x \in F_1 \cap S_3$

$x = 2^{2n-1}(4k+3) - 1, n \geq 2$

$N^{(2n-2)}(x) = N^{(2n-2)}(2^{2n-2}(8k+6) - 1) = 3^{2n-2}(8k+6) - 1$

Par ailleurs on prend $y = (x-1)/2 = 2^{2n-2}(4k+3) - 1 \in S_2$

$N^{(2n-2)}(y) = N^{(2n-2)}(2^{2n-2}(4k+3) - 1) = [3^{2n-2}(4k+3) - 1] = (3^{2n-2}(4k+3) - 1)/2$ puisque $3^{2n-2}(4k+3) - 1 \equiv 2 \pmod 4$

On a : $4N^{(2n-2)}(y) + 1 = N^{(2n-2)}(x)$ et donc $N^{(2n-1)}(y) = N^{(2n-1)}(x)$

**4.1.** $x \in S_4 \subset F_1$**,** $x = 2^{2n}(4k+1) - 1, n = 1$

$x = 3 + 16k$ , $y = (x-1)/2 = 1 + 8k \in F_2$

$N^{(2)}(x) = N^{(2)}(y) = [2 + 9k]$

**4.2.** $x \in S_4 \subset F_1$**,** $x = 2^{2n}(4k+1) - 1, n \geq 2$

$N^{(2n-1)}(x) = N^{(2n-1)}(2^{2n-1}(8k+2) - 1) = 3^{2n-1}(8k+2) - 1$

On considère $y = (x-1)/2 = 2^{2n-1}(4k+1) - 1 \in F_1 \cap S_1$

$N^{(2n-1)}(y) = N^{(2n-1)}(2^{2n-1}(4k+1) - 1) = [3^{2n-1}(4k+1) - 1] = (3^{2n-1}(4k+3) - 1)/2$

On a : $4N^{(2n-1)}(y) + 1 = N^{(2n-1)}(x)$ et donc $N^{(2n)}(y) = N^{(2n)}(x)$
QED

Andaloro (1998, [20]) indique que Korec & Znam ont démontré que les progressions arithmétiques $(a \pmod{p^n}$ constituent des ensembles suffisants si $(a, p) = 1$ et 2 est une racine primitive $\pmod{p^2}$ [20]. Il montre lui-même que que $1 + 16\mathbb{N}$ est suffisant et conjecture que $1 + 2^n\mathbb{N}$ est suffisant pour tout $n$.

***Théorème (Monks, 2006, [58])*** : $a + b\mathbb{N}$ est suffisant pour tout $a$ et $b$ de $\mathbb{N}$.

Autrement dit l'ensemble formé des éléments de n'importe quelle suite arithmétique est suffisant.

***Corollaire*** : Tout suite arithmétique est suffisante pour les sous-conjectures « nontrivial cyles » et « (no) divergent orbits ».

Remarque : La découverte d'ensembles suffisants de densité aussi faible que l'on veut, intéressante en soi, ne semble pas simplifier le problème. Celui-ci est reporté sur le nouvel ensemble.

## Extension aux nombres réels, complexes ou p-adiques

La fonction proposée par Chamberland (2006, [28], [29]) est la suivante :

$$f(x) = x + \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4} cos(\pi x)$$

Il montre en particulier que les intervalles $I_1 = [0, \mu_1]$ et $I_2 = [\mu_1, \mu_3]$ sont invariants par $f$ , où $\mu_1 \approx 0.277$ et $\mu_3 \approx 2.445$ sont des points fixes répulsifs.

Par contre $I_3 = [\mu_3, \infty[$ n'est pas invariant et l'auteur considère l'ensemble (escape set) $E_f = \{x \in I_3 : sup\omega(x) < \mu_3\}$ où $\omega(x)$ est l'ensemble limite de la trajectoire de $x$.

$R_f = \{x \in I_3 : inf\omega(x) \geq \mu_3\}$ est l'ensemble des résidus (residue set). Dans cet ensemble, on distingue $S_f$ (stable set) bassin d'attraction de toutes les trajectoires périodiques de $f$ dans $I_3$ et son complémentaire $U_f$ (unstable set) dont on distingue $U_f^\infty = \{x \in R_f : \limsup_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = \infty\}$

Une extension à $\mathbb{C}$ a été étudiée par Letherman et collègues (1998, [59]). La frontière qui sépare ces régions divergentes et celles qui ne divergent pas forme une courbe fractale [21].

20. C'est-à-dire tout inversible de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ est une puissance de 2 $\pmod{p^2}$
21. Voir aussi `https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture\_de\_Syracuse`

De nombreuses images figurent sur le site que O. Rozier ([60]) dédie à le conjecture de Syracuse.

Fleckinger et Abdoulkarim (2015, [39]) ont étudié une généralisation de la conjecture de Collatz dans $\mathbb{Q}_p$ extension p-adique de $\mathbb{Q}$. Pour $u \in \mathbb{Z}_p$ :

$$g_{p,q}(u) = \begin{cases} u/p & \text{si } p|m \\ (qu + \epsilon_0(-qu))/p & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec la fonction $\epsilon_0 : \mathbb{Z}_p \mapsto \{0, 1, \ldots, p-1\}$ donnée par $\epsilon_0(u) \equiv u \pmod{p}$. C'est-à-dire $\epsilon_0$ donne le premier coefficient du développement de Hensel. Donc le premier coefficient de $qu + \epsilon_0(-qu))$ est nul. Ce nombre est donc divisible par $p$ dans $\mathbb{Z}_p$.

Ils définissent également un « équivalent » de la fonction $Q_\infty$.

$$\Phi_{p,q}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_0(-qu_n)p^n$$

où $u_n = g_{p,q}^n(u)$. C'est une isométrie de $\mathbb{Z}_p$. Elle se prolonge à $\mathbb{Q}_p$ par :

$$\Phi_{p,q}(p^{-n}u) = p^{-n}\Phi_{p,q}(u)$$

avec $u \in \mathbb{Z}_p$ et $n \in \mathbb{N}$.

## Les applications de Conway (Conway map)

Un cadre général et naturel de la généralisation du problème de Syracuse a été proposé par Conway en 1972. Ces applications de Conway, connues sous diverses appellations, sont détaillées par Belaga (2006, [61]) ou Belaga & Mignotte (2015, [48]).

***Définition (Conway $M_p, R_p$-map)*** : Soient $p \geq 2 \in \mathbb{N}$ et deux ensembles de nombres entiers $M_p = \{m_0, m_1, \ldots, m_{p-1}\}$ et $R_p = \{r_0, m_1, \ldots, r_{p-1}\}$ tels que :

$m_i$ est premier avec $p$ et $r_i \equiv im_i \pmod{p}$ pour $i = 1, \ldots, p$.

(1) La Conway $(M_p, R_p)$-map $T = T_{M_p,R_p} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est donnée par :

$$T(m) = \frac{m_i m - r_i}{p} \text{ pour } m \equiv i \pmod{p}$$

(2) La Conway $M_p$-map multiplicative correspond à la Conway $(M_p, R_p)$-map où $r_i = 0$ pour tout $i$.

$\mu(T) = m_0 \times \ldots \times m_{p-1}$ est l'indice de contraction-expansion (conex-index) de $T$.

Exemple : $T_d = T_{M_2,R_2}$ avec $M_2 = \{1, 3\}$ et $R_2 = \{0, -d\}$.

# Résumé des conjectures

Les conjectures foisonnent. En faire un recensement est le but premier de cet article. En plus de la conjecture de base, originale, avec des versions plus ou moins fortes ou faibles, on trouve de nombreuses variantes ou des formulations équivalentes dans divers domaines mathématiques.

Les variations peuvent concerner la relation de récurrence utilisée, le domaine de définition et la conclusion. Cette dernière peut affirmer l'existence d'un seul cycle trivial, ou alors de plusieurs cycles (en nombre fini ou non) ou encore l'existence ou non de suites divergentes. La formulation peut aussi varier en fonction de la version $C$, $T$ ou $N$ de la relation utilisée. Les conjectures concernant l'existence de plusieurs cycles ou de non convergence peuvent être qualifiées de « anti-syracuse ».

Par ailleurs, on peut montrer que la conjecture est équivalente à des conjectures exprimées ou reformulées dans des domaines divers.

## Les conjectures de base

***Conjecture de Collatz*** : La suite obtenue par itération de $C$ aboutit au cycle (1, 4, 2) quel que soit la valeur initiale.

***Nontrivial cycles conjecture (forme faible de la conjecture de Collatz)*** : S'il existe $m$ tel que $C^{(k)}(m) = m$ pour $k > 1$ alors $m = 1$, 2 ou 4.

Est équivalente à :

***Collatz Cycle Conjecture***[22] : La suite (1) est le seul cycle de $N$-Collatz avec des termes positifs.

***Conjecture de (non) divergence ((no) divergent trajectories conjecture)*** : Toute les trajectoires $(C^{(k)}(m))_{k=0,\infty}$ sont bornées.

Cette conjecture implique que toutes les trajectoires aboutissent à un cycle.

***Conjecture du temps d'arrêt fini*** : Toute trajectoire finit par repasser au-dessous de son origine.

Cette conjecture permet de démontrer la conjecture de Collatz par induction complète.

***Conjecture en forme de semi-groupe affine*** : Soit $S$ le semi-groupe affine engendré par $\{x \mapsto 2x; x \mapsto (2x-1)/3\}$. L'orbite $\langle S : \{4\}\rangle$ contient tous les nombres entiers positifs supérieurs à 2.

***Coefficient stopping time conjecture*** : Pour tout $m \geq 2$, le « stopping time » $\sigma(m)$ est égal au « coefficient stopping time » $\omega(m)$.

## Extensions à $\mathbb{Z}$

On trouve ici des conjectures qui étendent les valeurs à $\mathbb{Z}$.

22. En prenant la formulation de Kaneda (2014, [62]) et en utilisant notre convention pour noter la suite de Collatz considérée.

***Conjecture des cycles finis (Lagarias)*** : Il y a seulement un nombre fini de cycles distincts pour la fonction $T$ itérée sur $\mathbb{Z}$.

Cette conjecture a été précisée :

***Generalized Collatz Cycle Conjecture (Kaneda, 2014, [62])*** : Les suites (1), (-1), (-5, -7), et (-17, -25, -37, -55, -41, -61, -91) sont les seuls cycles de $N$-Collatz.

Nous notons que :

$$T(-m) = \begin{cases} -m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (-qm+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

et comme $(-qm+1)/2 = -(qm-1)/2$, chercher les cycles sur les nombres négatifs revient à chercher ceux sur $qx-1$ puis de prendre les nombres opposés [23].

Ainsi donc l'étude des cycles liés à $qx+1$ sur $\mathbb{Z}$ se ramène celle des cycles $qx \pm 1$ sur $\mathbb{N}$

Par ailleurs, on sait que les cycles de $qx+d$ sont les cycles de $qx+1$ amplifié par $d$. Le seul intérêt de l'étude de $qx+d$ est de mettre en évidence des cycles primitifs c'est-à-dire ne provenant pas de cycles de $qx+1$.

## Généralisations de la formule de récurrence

Des études ont proposé des relations de récurrence plus générales.

Oliveira (2010, [49]) expose la généralisation de la fonction $C$ suivante (vraisemblablement due à Kakutani) :

$$C_{K,D}(m) = \begin{cases} m/d_D(m) & \text{si } d_D(m) > 1 \\ Km+1 & \text{si } d_D(m) = 1 \end{cases}$$

Où $K \in \mathbb{N}, K > 1$, $D$ est un ensemble de nombres entiers supérieurs à 1 et $d_D(m)$ vaut 1 si $m$ n'est pas divisible par aucun des éléments de $D$ et vaut le premier tel élément sinon.

$C_{3,\{2\}}$ est la fonction de Collatz.

***Conjecture*** $5x+1$ ***de Kakutani*** : La suite générée par itération de $C_{5,\{2,3\}}$ à partir de toute valeur entière positive atteint 1.

***Conjecture*** $7x+1$ ***de Kakutani*** : La suite générée par itération de $C_{7,\{2,3,5\}}$ à partir de toute valeur entière positive atteint 1.

A comparer avec l'anti-conjecture de Crandall citée par Delahaye concernant $5x+1$.

Allouche (1979, [63]) [24] étudie la généralisation du problème de Syracuse proposée par Hasse.

$$g(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 \pmod{d} \\ (nm - nm\%d)/d & \text{sinon} \end{cases}$$

23. (-7, -10, -5) est un cycle de $3x+1$ et l'opposés de (7, 10, 5), cycle de $3x-1$.
24. Avec une nouvelle allusion dans Allouche (2017, [64]).

Avec $n \geq 1$, $d \geq 2$ premiers entre eux. $nm\%d$ indique le reste de la division de $nm$ par $d$.

***Conjecture*** : Si $n < d/(d-1)$ il existe un nombre fini de cycles $F$ sous $g$ tel que pour tout $m$ la trajectoire de $\tau_g(m)$ est finalement un élément de $F$. En particulier $\{m : \exists k, g^{(k)}(m) \geq m\}$ est fini.

***Conjecture de Matthews-Watts, 1985*** : Soit $T_{M_p,R_p}$ une application de Conway

(i) Si $T$ satisfait la condition de contraction $\mu(T) < p^p$, alors toutes les trajectoires $\tau_T$ sont finalement cycliques. En particulier, il existe au moins un cycle.

(ii) Si T satisfait la condition d'expansion $\mu(T) > p^p$, alors presque toutes les trajectoires $\tau_T$ sont divergentes. En particulier, il y a au moins une trajectoire divergente.

(iii) Le nombre de cycles est fini.

(iv) Si la trajectoire $\tau_T(m)$ est divergente, alors les valeurs itérées sont uniformément distribuées $\pmod{p^q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

C'est la conjecture qui chapeaute largement toutes les généralisations classiques de la conjecture de Collatz.

## Conjectures concernant $3x + d$

Il existe de multiples conjectures concernant les $T_d$-suites. Elles ne diffèrent parfois que par la formulation.

Pour la fonction $T_d$, il existe toujours le cycle « trivial » $(d, (3d+d)/2 = 2d)$ qui n'est pas primitif. La conjecture suivante affirme l'existence de cycles primitifs.

***Primitive Cycles Existence Conjecture (Lagarias (1990, [1])*** : Pour tout $d$ nombre entier positif premier avec 6 il existe au moins un cycle primitif pour $T_d$.

La conjecture suivante limite toutefois le nombre de cycles primitifs.

***Finite Primitive Cycles Conjecture (Lagarias (1990, [1])*** : Pour tout $d$ nombre entier positif premier avec 6 il existe un nombre fini de $T_d$-cycles primitifs.

***Conjecture P (Lagarias (1990, [1])*** : Tout nombre positif $n_0 \equiv \pm 1 \pmod 6$ est dans un cycle primitif d'une infinité de $T_d$-suite avec $d \equiv \pm 1 \pmod 6$.

D. Holden ([2]) démontre un théorème concernant une condition suffisante pour l'existence d'un cycle primitif (voir aussi l'annexe 7).

Belaga & Mignotte (2006, [65]) calculent tous les cycles primitifs pour 6667 valeurs de $d$ comprises entre 1 et 19999 et corroborent la conjecture de Lagarias. Ces calculs corroborent également des conjectures plus fines (Belaga & Mignotte (2000, [66]) énoncée en alourdissant l'appareillage symbolique. Notamment (avec $D$ l'ensemble des nombres naturels premiers avec 6) :

***Recurrence Threshold Conjecture*** : Pour tout $d \in D$, il existe un entier $R$ tel que toute trajectoire passe dans l'intervalle $1 \leq m \leq R$ une infinité de fois. La valeur minimale de $R$ est dénotée $R_d$ et est appelée « $T_d$-recurrence threshold) » (seuil de récurrence pour $T_d$).

***Collapse Threshold Conjecture*** : Pour tout $d \in D$, il existe un entier $L$ tel que toute trajectoire se trouve finalement dans l'intervalle $1 \leq m \leq L$. La valeur minimale de $L$ est dénotée $L_d$ et est appelée « $T_d$-collapse threshold » (seuil de collapse pour $T_d$).

***Termination Set, or Attractor Conjecture*** : Pour tout $d \in D$, il existe un ensemble fini $U$ de nombres naturels tel que toute trajectoire se trouve finalement dans $U$. L'intersection de tels ensembles $U$ est notée $U_d$ et est appelée « $T_d$-termination set » ou « $T_d$-attractor ».

Des conjectures concernent également des valeurs pour le périgée d'un cycle (valeur minimale, forcément impair d'un cycle). Certaines ont été démontrées (Belaga, 2003, [67], 2007, [68]).

$3n-1$ ***conjecture (Vasantha et ali, 2016, [69]*** : Les cycles sont ceux initiés par 1, 5 et 17.

$3n \pm p$ ***conjecture (Vasantha et ali, 2017, [70]*** : Toutes les suites basées sur $3n \pm p$ avec $p$ nombre premier finissent par un cycle et il n'y a qu'un nombre fini de cycles différents.

Ces conjectures sont émises dans un autre « club », sans références aux conjectures plus anciennes de Lagarias qu'elles particularisent.

La conjecture sur les cycles finis de Lagarias est étendue aux valeur de $d$ négatives dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ [25], sans inclure la clause de primitivité.

$(3x+d)$***-Cycle Conjecture (Kaneda, 2014, [62])*** : Pour tout $d \in \mathbb{Z}$ avec $d \equiv 1 \pmod 6$ ou $d \equiv -1 \pmod 6$, le nombre de $(3x+d)$-cycles est fini.

## Conjectures concernant $qx+r$

***Conjecture de Crandall (1978, [3]) à propos du*** $qx+r$ ***problème*** : Avec $(q,r) \neq (3,1)$, $q$ et $r$ impair, il existe $m$ impair tel que $N_{q,r}^{(k)}(m) = 1$ ne possède pas de solution.

Comme cette conjecture est trivialement prouvée pour $r > 1$ en prenant comme valeur d'origine $m \equiv 0 \pmod r$, il est difficile de comprendre l'intérêt de son énoncé. Et pourquoi s'intéresser spécifiquement à la valeur 1 ?

Pour $q = 5$ les origines $m = 13$ ou $m = 17$ conduisent à des cycles ne contenant pas 1 (par contre l'origine $m = 3$ conduit au $N$-cycle (3, 1)).

Si $q = 181$, $m = 27$ génère une suite sans la valeur 1. Et pour $q = 1093$ cela est vérifié pour $m \neq (2^{364p} - 1)/1093$.

La conjecture de Crandall est souvent citée en se limitant au cas $r = 1$.

***Conjecture de Crandall simplifiée*** : Pour le problème $qx+1$ avec $q > 3$ impair, il existe des valeurs initiales $m$ dont les trajectoires ne contiennent pas 1.

Franco & Pomerance (1995, [71]) ont montré que cette conjecture est « presque vraie ».

L'adaptation de l'argument heuristique suggère d'ailleurs :

25. A noter qu'un cycle ne peut contenir à la fois des nombres positifs et négatifs.

***Conjecture des « vols infinis » (évoquée par Delahaye)*** : Pour la suite générée par la relation $qx + 1$ avec $q$ supérieur à 3, il existe des vols infinis (c'est-à-dire qu'il existe une ou plusieurs valeurs initiales telles que la suite ne soit bas bornée).

Pour $5x + 1$ l'origine $m = 7$ semble conduire à un vol infini. Cette conjecture est à comparer à celle émise par Kakutani pour la suite $5x + 1$

Nous conjecturons qu'il en va de même avec $m = 11$.

## Généralisations de la formule de récurrence à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Q}_p$

Chamberland (1996, [28]) propose une interpolation $f$ de $T$ à $\mathbb{R}^+$. Avec les notations de la page 29 on a :

***Conjecture*** : $f$ n'admet aucun cycle attractif sur l'intervalle $[\mu_3, \infty[$. ($\mu_3 \approx 2.445$)

***Conjecture*** : $\mathbb{N} \cap R_f = \emptyset$

Elle est équivalente à la conjecture principale.

***Stable set conjecture*** : $S_f = \emptyset$

Elle étend la *nontrivial cycle conjecture*

***Divergent trajectories conjecture*** : $\mathbb{N} \cap U_f^\infty = \emptyset$

***Unstable set conjecture*** : $U_f$ est de mesure (Lebesgue) nulle.

Une conjecture de Lygeros et Rozier (2014, [30]) affine le lien entre les conjectures concernant le système dynamique proposé par Chamberland et les conjectures de Syracuse (cycles non-triviaux et trajectoires divergentes).

***Conjecture de Collatz généralisée (Fleckinger et Abdoulkarim, 2015, [39])*** : $\Phi_{p,q}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

## Autres conjectures

***Weak*** $3x + 1$ ***Conjecture*** : Le semi-groupe multiplicatif $S$ généré par l'ensemble des nombres rationnels $n/T(n)$ contient tous les nombres entiers positifs.

Cette conjecture n'a pas été mentionnée précédemment. Elle est formulée par Farkas (2005, [72]) qui démontre que la conjecture de Collatz l'implique. Le semi-groupe $S$ est aussi généré par 2 et les nombres $\frac{2n+1}{3n+1}$ avec $n \geq 0$.

J. Lagarias (2006, [73]) étudie le semi-groupe $S^{-1}$ et finalement la conjecture est démontrée par Applegate et Lagarias (2006, [74]) : Le semi-groupe S est constitué de l'ensemble de tous les nombres rationnels positifs $a/b$ avec $b$ non multiples de 3. En particulier, il contient tous les entiers positifs.

***Conjecture sur l'image de*** $Q_\infty$ : $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z}$ (de fait $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$)

Si la conjecture de Collatz est vraie, le développement $Q_\infty(m)$ pour tout $m$ se termine par la répétition de 1 et 0. Cela correspond à l'expression du nombre 1/3.

***Conjecture des Cycles finis*** : il existe un entier impair $M$ tel que : $Q_\infty(\mathbb{Z}) \subset (1/M)\mathbb{Z}$

***Random Syracuse conjecture*** : Une suite aléatoire de Syracuse devient presque sûrement plus petite qu'une borne B fixée .

Cette conjecture est citée pour mémoire. Elle est proposée et démontrée par Slakmon et Macot (2003, [38], 2006, [55]) mais doit correspondre de fait à l'heuristique développée précédemment page 17 (voir aussi la section Le monde de Syracuse ci-dessous).

***Conjecture du noyau d'une fonctionnelle*** : La conjecture de Collatz est vraie si et seulement si $K = \Delta_2$ avec $K$ le noyau de deux fonctionnelles sur les fonctions holomorphes et $\Delta_2$ l'ensemble généré par $\phi_0(z) = 1$ et $\phi_1(z) = z/(1-z)$

Cette conjecture semble déconnectée de la conjecture originale. Toutefois, dans la tentative d'expression de la fonctionnelle, les relations génératrices de la suite de Collatz réapparaissent.

***Divisibility problem involving powers of 2 and 3*** : Il n'existe pas de suite croissante $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ telle que $2^{a_{n+1}} - 3^n$ soit un diviseur propre de $3^{n-1}2^{a_1} + 3^{n-2}2^{a_2} + \ldots + 2^{a_n}$ .

C'est une nouvelle formulation de la conjecture faible. Cette conjecture semble la seule totalement déconnectée de la conjecture faible originale.

# « Le monde de Syracuse »

Après avoir passé en revue, du point de vue mathématique, divers travaux liés à la conjecture de Syracuse, cette section va porter un regard plus socio-cognitif sur la production de « résultats tout venant » concernant la suite de Syracuse.

On peut classifier les travaux consultés en quelques catégories crées à partir de trois critères : démonstration d'une propriété associée ou « démonstration » de la conjecture (auquel cas il s'agit d'une analyse d'erreur) ; production naïve ou savante ; avec erreur (ou maladresse) ou apparemment correcte.

Dans cette classification, on distingue différents répertoires : celui des productions savantes, de mathématiciens respectant les usages et formes des textes mathématiques et celui des travaux d'un public plus élargi mais assez disparate qui comprend des mathématiciens débutants, de scientifiques ou d'ingénieurs moins rompus à l'écriture de textes mathématiques et d'amateurs plus ou moins éclairés.

Cela mettra en évidence les représentations naïves que peut revêtir une question mathématique [26].

Le niveau des amateurs peut être caractérisé par cette remarque de l'un d'eux « *les mathématiciens qui se réfèrent au problème comme le '3x+1 problem' n'ont pas eu le*

26. Une étude des productions plus ou moins naïves concernant la trisection de l'angle, la quadrature du cercle ou alors récemment du dernier théorème de Fermat mériterait d'être faite s'il elle ne l'a pas déjà été. Mais les traces laissées par de tels travaux dans l'ère pré-Internet sont ténues. Un des auteurs, comme assistant du président de la Société suisse des mathématiciens, a eu l'occasion de relire plusieurs de ces travaux proposés à la Société. Ils étaient rapidement jugés de peu d'intérêt mathématique, ce qui n'est pas faux. Toutefois, leur apport du point de vue socio-cognitif, voire de l'éducation mathématique, mériterait d'être approfondi.

*lavage de cerveau par FORTRAN (comme je l'ai été) qui fait croire que seul n, et pas x, représente un entier* »[27]

## Productions naïves

Les travaux faisant partie de cette catégorie sont effectués par des personnes peu au courant des formes élémentaires du raisonnement mathématique et/ou de sa présentation. Le média Internet favorise certainement la communication dans un mode décomplexé, parfois avec un brin d'arrogance. L'annexe 10 présente quelques exemples recueillis sur des forums. La tentative de Dianopoulos (2012, [19])[28] déjà citée en constitue un autre exemple.

De nombreux sites personnels, tel que celui de O. Pirson ([77]) présentent des références (parmi d'autres) au problème de Syracuse, voire des éléments de calcul.

## « Démonstration » de la conjecture

Il n'existe évidemment pas de démonstration correcte de la conjecture et cette section est finalement consacrée à une analyse d'erreurs, dont la pratique, en dehors du monde scolaire et de la recherche en didactique, est peu fréquente.

On peut imaginer que les articles « savants » présentant des erreurs sont rares ou alors retirés rapidement de la circulation.

Le travail de Opfer [16] en particulier part d'une équivalence originale et non triviale de la conjecture (établie par Berg & Meinardus) avec une propriété de fonctionnelles de fonctions analytiques. Il recèle une erreur repérée par l'auteur. Le problème revient à démontrer que l'ensemble constitué à partir du noyau de deux fonctionnelles linéaires sur les fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\Delta_2$ généré par $\phi_0(z) = 1$ et $\phi_1(z) = z/(1-z)$.

Cette conjecture semble déconnectée de la conjecture originale. Toutefois, dans la tentative d'expression de la fonctionnelle, les relations génératrices de la suite de Collatz réapparaissent.

Les autres travaux de cette catégorie pourraient être qualifiés de savamment naïfs dans la mesure où les auteurs ne semblent pas se méfier de la difficulté du problème. Les travaux respectent les formes mathématiques courantes mais ignorent en général la littérature consacrée au sujet.

Il n'est pas facile de repérer l'erreur fatale dans un article. Ainsi, nous nous sommes permis d'abandonner la relecture dès que nous avons repéré 3 ou 4 « naïvetés » ou micro-erreurs.

Le travail de Slakmon & Macot (ultérieur à 2003, [35], révisé en 2006 [55]) est déroutant. Par son titre *On the Almost Sure Convergence of Syracuse Sequences*, il semble décrire

27. « Mathematicians who refer to the problem as the $3x + 1$ problem were never brainwashed by FORTRAN (as I was) into the belief that $n$, not $x$, stands for an integer » [75]

28. Dans un article ultérieur , (Dianopoulos & Kurkani, 2013, [76]) une autre "preuve" est établie en utilisant des règles de réécriture.

un résultat plus fort que celui obtenu par le théorème de Terras. Lagarias (2012, [24]) [29] précise que les auteurs montrent que la *random Syracuse conjecture* est vraie dans le sens qu'une suite de Syracuse aléatoire (c'est-à-dire où les deux applications sont appliquées aléatoirement de façon équiprobable) devient presque sûrement inférieure à une valeur $B \geq 1$ spécifiée à l'avance. C'est un peu confus. De plus, le *presque toutes* disparaît de façon mystérieuse et un article de Z. Mazur du Carrefour des opinions du 27 mai 2010 [30] félicite les auteurs d'avoir résolu ce problème. « Votre gloire rejaillit un peu sur nous tous » est-il dit. De même la publication AMEQ en ligne [31] annonce que cette publication figure parmi les dix découvertes de l'année [2006] au Québec.

Notre conclusion est que ce résultat est finalement équivalent à l'heuristique présentée à la page 17.

Conrow prétend démontrer la conjecture à travers de longs développements disponibles sur le web ([75]) et un article de résumé (Conrow, 2007, [78]).

Il travaille sur la $N$-suite de Collatz des nombres impairs et utilise de façon intensive l'arbre des prédécesseurs. Il repère notamment les arêtes $s$ (le prédécesseur est plus petit, par ex. 5 - 3), $b$ (le prédécesseur plus grand, par ex. 7 - 9) et $e$ où les nombres sont reliés par la relation $4n+1$ (par ex. 3 - 13 ou 9 - 37) entre les nombres ayant le même descendant.

Sous le titre *Has anyone read Ken Conrow's Collatz Conjecture website ?* le blogueur Mensanator [32] décortique le travail de Conrow. En résumé, Conrow décompose le graphe de Collatz en segment de "header" les nombres de la forme 5 (mod 8). En rassemblant ces "headers", il construit le graphe APT Abstract Predecessor Tree (APT) et montre que la densité de ce graphe est 1. Le fait que le graphe considéré n'est pas connexe est une faille dans la démonstration. Le contre-exemple $3x+7$ vient à l'appui de cette remarque.

Ghosh [33] (2009, [79], [53]) démontre qu'il n'y a pas d'autres cycles que le cycle trivial. Il procède par induction sur la longueur du cycle. Il démontre astucieusement en utilisant la formule 3 de la page 11 que la valeur minimum du cycle est majorée par une constante $\kappa(m)$ qui dépend de la longueur $m$ du cycle. Puis il procède par récurrence sur la longueur du cycle et utilise l'affirmation que cette valeur minimum est supérieur à $\kappa(m-1)$. C'est une sorte de réciproque certainement erronée qui invalide le reste de la démonstration.

Nous avons déjà cité le travail de C. A. Feinstein (2012, [17]) qui démontre la non-démontrabilité de la conjecture. Il montre que toute preuve de la conjecture doit avoir un nombre infini de lignes ; donc aucune preuve formelle n'est possible. Il se base de façon suspecte sur un raisonnement de Freeman Dyson [34] qui paraît lui-même suspect. L'argument suivant donné à propos d'un de ses exemples est notamment imparable « It cannot be proved because there is no deep mathematical reason why it has to be true ».

Conrow [35] analyse le travail de C. A. Feinstein et prétend que son propre travail sur la

29. L'article paraît aussi cité dans la bibliographie de Chamberland (2010), mais n'est pas référencé dans le corps du texte.

30. Un problème mathématique d'envergure mondiale enfin résolu ! `http://www.lecarrefourdesopinions.ca/?p=3035`

31. `https://ameqenligne.com/news.php?ID=61257`

32. https ://www.physicsforums.com/threads/has-anyone-read-ken-conrows-collatz-conjecture-website.335859/

33. Elève de C. A. Feinstein.

34. `https://www.edge.org/q2005/q05_9.html`

35. `http://www-personal.ksu.edu/~kconrow/cafeinst.html`

représentation des trajectoires montre « naïvement » que la preuve de ce dernier n'est pas correcte [36]. Par contre, rappelons qu'il estime lui-même avoir démontré le théorème [37].

Schorer (2014, [42], [43]) associe à chaque suite de nombres naturels $A = (a_2, \ldots, a_i)$ ce qu'il appelle les tuple-set $T_A$. Un tuple est constitué des fragments de $N$-suites de Syracuse suivants :

- les singletons $(x)$ tels que $\nu(3x+1) \neq a_2$
- les paires $(x, N(x))$ telles que $\nu(3x+1) = a_2$ et $\nu(3N(x)+1) \neq a_3$
- etc.
- les suites $(x, N(x), \ldots, N^{(i-1)}(x))$ telles que $\nu(3N^{(j-2)}(x)+1) = a_j$ pour $j < i$ et $\nu(3N^{(i-2)}(x)+1) \neq a_i$

Exemple : Avec $A = (1, 1, 2)$, les tuples (1), (3,5), (15,23,35) sont des éléments de $T_A$.

Ensuite l'auteur définit un indice lié à l'ensemble $A$ avec un vocabulaire et des énoncés (Lemme 1.0) qui font penser à une distance entre tuples. Schorer construit ensuite deux ensembles de tuples, l'un sous l'hypothèse de l'existence de contre-exemples à la conjecture et l'autre sous l'hypothèse de l'inexistence de contre-exemple. En se basant sur la fonction distance, il montre que les deux ensembles sont égaux. Il en déduit (nous simplifions son argumentation) que soit le sous-ensemble des non contre-exemples soit celui des contre-exemples est vide.

Haynberg (2009, [40]) apporte une critique à une première version (Schorer, 2009, [80]) qui n'est plus accessible. Cette critique reste valable pour les corrections apportées par Schorer dans les versions actuellement disponibles qui contiennent de plus des considérations de type logique, notamment une section intitulée « Common Misconceptions About the Nature of Comparison of Mutually-Exclusive Cases » pour justifier son raisonnement.

Toutefois, Schorer conscient des lacunes formelles de son travail est à la recherche d'aide pour formaliser son travail et partager ainsi l'honneur de la découverte.

Berkouk (2015, [81]) [38] commence par démontrer que l'élément minimum d'un cycle est impair et que le cycle trivial est le seul cycle de longueur 3. En utilisant l'inégalité 4 page 13 entre le nombre de termes pairs et le nombre de termes impairs, il déduit (en oubliant qu'il peut y avoir de nombreuses fractions rationnelles inférieures à $\log 2/\log 3$) qu'il n'existe aucun cycle de longueur supérieure à 3.

En décomposant les nombres impairs sous diverses formes (par exemple sous la forme $2^p x - 1$) il montre ensuite en plusieurs étapes que la suite décroit. Ce qui élimine les suites divergentes. Ce qui est vrai pour les nombres de la forme $4x+1$. Il montre que les suites d'origine un nombre de la forme $4x+3$ aboutissent à un nombre de la forme $4x+1$. Dans sa démonstration par récurrence, il utilise la formule sans tenir compte de la parité des résultats intermédiaires.

Farid Baleh (Baleh, 2017, [82]) démontre que le cycle trivial est unique. Partant de l'hypothèse de l'existence d'un cycle, l'auteur exprime de façon correcte les éléments de la suite en fonction de leur position dans le cycle. Puis il utilise de façon incomplète

36. Il évoque également et analyse des références qu'il juge douteuses !
37. http ://www-personal.ksu.edu/ kconrow/cafproof.html
38. http ://vixra.org/abs/1507.0200

l'unicité d'une valeur limite (en oubliant qu'il faut évidemment que cette valeur existe) pour conclure que le cycle est le cycle trivial [39].

N. Karl-Augustt Alahassa (2017, [83]) expose également une démonstration de la conjecture. Dans son article, d'un abord ardu, l'auteur introduit la notion de *cantus* (en référence à la mélodie servant de base ä une polyphonie précise-t-il) décomposition particulière des nombres en relation aux bases deux et trois. Plusieurs propriétés de la fonction $C$ de Collatz (notée $g$ dans l'article) liées à ces décompositions sont démontrées.

Dans la suite, l'auteur construit en utilisant « l'arithmétique des *cantus* » le graphe de Syracuse (arbre des prédécesseurs) à l'aide des fonctions $2x$ et $(x-1)/3$. Il entend démontrer que le graphe de racine 1 contient tous les nombres naturels. Dans son argumentation l'auteur utilise les propriétés introduites par construction, ce qui n'empêche pas à un nombre de ne pas figurer dans l'arbre.

Après plusieurs sympathiques échanges, l'auteur doute de son raisonnement et annonce vouloir compléter son argumentation.

## Démonstration de propriétés associées ; productions savantes ou naïves correctes

Les articles recensés par Lagarias et ceux publiés dans des revues à comité de lecture relèvent de cette catégorie dans le répertoire savant. Mais il peut aussi y avoir des pages sur Internet relevant de cette catégorie, par exemple une des rubriques du blog de Tao.

Les autres productions ont été trouvées dans des archive ouvertes (arXiv ou Hal), sur des blogs ou forums ou encore sur des sites personnels, par exemple celui de O. Rozier ([60]), mais parfois dans des revues.

C'est dans cette catégorie que l'on peut placer les démonstrations d'équivalence de la conjecture dont les références ont été données dans la section qui leur est consacrée.

Relevons encore les articles consacrés à des calculs de bornes (Belaga, 2003, [67] ; Belaga, 2007, [68]).

Le travail de Simonetto (2016, [84]) : « Conjecture de Syracuse : avancées inédites » représente une forme naïve plus élaborée que celles mentionnées dans la sous-section des « Productions naïves ». Il propose un document de plus de 300 pages disponible sur Amazon [40] qui mêle des éléments didactiques (qu'est-ce qu'une conjecture ?), épistémologiques (pourquoi chercher ?), allégoriques (Pommade magique , trou noir, bourse !) et calculatoires. Sur ce dernier aspect de multiples variantes sont présentées et diverses conjectures sont proposées pour les suites construites à partir des relations pour $u_{n+1}$ : $u_n/2 \pm 1$, $(3u_n \pm 1)/2$ et $(3u_n \pm 3)/2$ (36 combinaisons possibles) et des suite « complémentaire »construites à partir de $3w_n/2$ et $(w_m \pm 1)/2$ comme valeurs de $w_{n+1}$.

39. L'auteur contacté nous écrit : « J'ai en fait commis une erreur grossière car la suite $x_n/a_n$ est équivalente à $u_{r_n}$ lorsque $n$ tend vers l'infini, $r_n$ étant compris entre 0 et $T-1$. J'ai donc fait une confusion avec l'unicité d'une limite quand elle existe...

Par conséquent, ma démonstration n'est pas valable, et je continue à travailler sur cette conjecture de Collatz, comme vous je suppose (pour ma part, je le fait en amateur, étant ingénieur dans le domaine de la R&D en télécoms). »

40. Egalement diffusé sur Internet : `https://mathsyracuse.wordpress.com/`

Outre les conjectures des questions émergent, par exemple : le calcul de probabilités peut-il renseigner notre problème ?

Il est à noter qu'aucune référence ou renvoi n'est fait à la riche bibliographie fournie. L'auteur [41] précise d'ailleurs que l'ouvrage a été rédigé (en une année) sans l'aide d'aucun autre auteur.

Lors de notre travail de lecture nous nous sommes parfois trouvés confrontés à des difficultés de compréhension face à des raccourcis et/ou maladresses parfois récupérables.

Un exemple repris de la version simplifiée du théorème de Terras publiée par Eric Roosendaal que nous avons déjà mentionnée est particulièrement intéressant. Il révèle une difficulté liée à la remarque que nous avons faite à propos de l'heuristique. Il s'agit du lemme :

Lemme 4 [42] : $T^{(k)}(n) \approx \lambda_k(n)n$ c'est-à-dire $\lim_{T^{(k)}(n)\to\infty} \frac{T^{(k)}(n)-\lambda_k(n)n}{T^{(k)}(n)} = 0$

Ce lemme utilise, sans hypothèse *ab absurdo* ni autre précaution, une limite lorsque la valeur de $T^{(k)}(n)$ tend vers l'infini alors que $k$ est la variable libre. Sans compter que l'on n'aimerait justement pas que cette valeur tende vers l'infini.

# Conclusion

Le point de départ de notre travail était le constat de la prolifération des conjectures liées au problème de Syracuse.

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous nous sommes intéressés à faire un état du microcosme « s'agitant » autour de la suite de Collatz. Notre méthode a été de consulter les moteurs de recherche et de suivre quelques références bibliographiques. Dans la bibliographie, on verra que la plupart des articles « historiques » ont été mis à disposition librement sur Internet.

La plupart des travaux plus récents ont été consultés sur des sites ou blogs personnels ou les archives ouvertes arXiv et Hal.

En cours de travail, nous avons trouvé plusieurs tentatives de démonstrations de la conjecture. Il nous a paru intéressant d'en garder trace. Nous avons étendu notre propos initial en examinant, bien que parfois superficiellement, tous les travaux se référant au problème de Syracuse : ceux affirmant la démonstration de la conjecture (il va sans dire que nous

41. Il précise n'être pas mathématicien, mais diplômé de grandes écoles d'ingénieurs et que ses fonctions en entreprise l'ont éloigné des sciences et de leurs « sens aigu de l'analyse et des méthodes ».

42. La démonstration utilise la relation 7 page 22 sous la forme :

$$\frac{T^{(k)}(n) - \lambda_k(n)n}{T^{(k)}(n)} = \frac{\rho_k(n)}{T^{(k)}(n)} = \frac{\rho_k(n)}{\lambda_k(n)n + \rho_k(n)}$$

Il faut mentionner que les exemples sont toutefois assez convaincants.
- $n = 17$ ; $(17, 26, 13, 20, 10, 5)$ ; $T^{(5)}(17) = 5$ ; $v_5(17) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$
- $\lambda_5(17) \times 17 = (3^2 \times 17)/2^5 = 4.78$ ; (erreur : 4,4%)
- $n = 123$ ; $(123, 185, 278, 139, 209, 314)$ ; $T^{(5)}(123) = 314$ ; $v_5(123) = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$
- $\lambda_5(123) \times 123 = (3^4 \times 123)/2^5 = 311.34$ ; (erreur : 0,8%)

tenons le problème comme non résolu), les tentatives avortées et encore les développements d'amateurs qui se placent en dehors des courants initiés par les mathématiciens professionnels.

## Remarques concernant les publics

L'ensemble des articles donne l'impression que chez les mathématiciens professionnels « confirmés » un espoir de démontrer la conjecture subsistait encore dans les années quatre-vingt-dix. Il restait encore des extensions et des généralisations d'où pouvait provenir la délivrance. Puis, chez le même public, la conjecture semble être devenue petit à petit une sorte de terrain de jeu. Des résultats d'une assez grande technicité apparaissent pour étendre le domaine de définition du processus, de la fonction de récurrence ou pour démontrer différentes propriétés annexes à la conjecture originale (estimation de maxima, par exemple). Ceci sans que l'apport à la démonstration de la conjecture ne soit évident, ni annoncé explicitement. C'est une occasion de faire des mathématiques sans forcément s'intéresser à la nature profonde du problème.

Parmi les auteurs qui persistent et proposent des démonstrations plusieurs proviennent étonnamment du monde universitaire, ce sont aussi bien des étudiants que des membres du corps enseignant. Il est intéressant de noter l'effort fait par certains pour analyser et décortiquer le travail d'autres, et cela même pour des travaux encore immatures et difficilement compréhensibles. Des collaborations s'instaurent dans toutes les strates de culture mathématique.

Nous avions pensé énoncer, sur un mode semi-sérieux, une conjecture qui finalement est vraisemblablement à réfuter :

***Conjecture sur la résolvabilité de la conjecture*** : La croyance dans la possibilité de démontrer la conjecture de Syracuse est inversement proportionnel à la culture mathématique de l'auteur.

En effet, certains amateurs aboutissent sans trop de mal à plusieurs formules butoirs classiques (par exemple la formule 3 page 11). C'est souvent en voulant forcer ce barrage que les erreurs sont commises. L'aspect « fractal » du processus de recherche des nombres qui vérifient la conjectures - ce qu'illustrent les graphes des prédécesseurs - incite également à imaginer une sorte de limite à l'infini embrassant tous les nombres.

Inversément, des universitaires se laissant abuser par leur facilité technique, peuvent perdre le contrôle logique de la démonstration.

On notera la différence de style entre les auteurs de culture francophone et ceux de culture anglo-saxonne. A la différence des seconds, les premiers introduisent de nombreuses notations et définitions (nombres de Collatz, couronne de Collatz, etc.). Ils recourent à un vocabulaire imagé : temps de vol (pour temps d'arrêt - stopping time), distance de vol, temps de vol en altitude, etc. Il n'est pas certain que cela permette de mieux traiter le problème.

## Remarques concernant les erreurs à éviter

L'examen de la suite de Syracuse demande quelques précautions. On note quelques difficultés récurrentes, notamment, le « presque partout » est d'une utilisation délicate avec des risques de confusion entre l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ et l'ensemble des points de la trajectoire, un germe étant donné d'avance.

Ensuite, il s'agit de bien distinguer les deux conjectures : celle concernant l'absence de suites divergentes et celle concernant l'impossibilité de cycles non-triviaux. Les raisonnements qui se basent sur des moyennes ou des limites liées à des suites infinies, et mêmes divergentes, peuvent parfois oublier l'existence possible de cycles non triviaux.

On note que plusieurs auteurs travaillant sur les prédécesseurs (et notamment l'arbre lié à cette relation), finissent par « démontrer » que l'ensemble des prédécesseurs de 1 est l'ensemble des naturels. Qu'est-ce qui rend cette erreur si commune ? Dans ce processus constructif, il apparaît que l'ensemble des nombres qui restent à tester s'éclaircit au fur et à mesure du travail. Cette perception induit certainement les erreurs commises par la suite. Dans d'autres cas, on réutilise dans le contrôle les éléments qui ont servi à le construire. Vraisemblablement la charge cognitive nécessaire à la démonstration de différents résultats (parfois triviaux comme la connexité du graphe) conduit à l'illusion que tous les nombres sont atteints ou masque l'insuffisance de la preuve.

Par ailleurs, on note qu'un réflexe simple est souvent oublié. Celui de se pas se lancer dans des développements qui ne permettent pas de distinguer le cas $3x + 1$ d'autres cas, par exemple $5x + 1$.

## Remarques à propos des reformulations

La conjecture de Syracuse est à plusieurs reprises reformulée dans un autre domaine. Toutefois, la plupart du temps, il est difficile de déconnecter la nouvelle conjecture des propriétés de la suite de Syracuse originale. Comme le notait déjà Lagarias (1985, [4]) : quelles propriétés intéressantes possèdent la fonction $Q_\infty$ ? Possède-t-elle une caractérisation autre que la définition récursive liée à la suite de Syracuse ?

Les deux cas relativement déconnectés de la conjecture originale rencontrés sont ceux de la formule 3 page 11 (qui reste une question ouverte) et l'utilisation de la théorie ergodique avec $\mathbb{Z}_2$ qui conduit à une impasse. De ce point de vue, le recours au noyau d'une fonctionnelle dans les fonctions analytiques constitue peut-être un autre exemple.

Chacun ramène le problème dans sa spécialité : théorie des nombres, nombres p-adiques, théorie des fonctions analytiques, etc. Les tentatives de résolution de ce nouveau problème se confrontent aux difficultés du problème initial formulées dans un nouveau langage.

Dans quel recoin mathématique peuvent se cacher les contraintes fortes qui relient des nombres d'une suite de Syracuse ? Entre analyse, arithmétique et logique, le cas semble encore assez loin d'être tranché.

# En guise de postface : le problème original de Collatz

Sur la base des carnets de notes de Collatz, Lagarias (1985, [4]) nomme « problème original de Collatz » (1932) l'étude de la fonction [43] $g$ donnée par :

$$g(m) = \begin{cases} \frac{2}{3}m & \text{si } m \equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{4}{3}m - \frac{1}{3} & \text{si } m \equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{4}{3}m + \frac{1}{3} & \text{si } m \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

Cette fonction génère une permutation $P$ des nombres naturels :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\ldots \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 9 & 11 & 6\ldots \end{pmatrix}$$

ou sous forme de cycles : $P = (2\ 3)(4\ 5\ 7\ 9\ 6)(8\ldots)$

***Conjecture*** : le cycle de 8 est infini.

# Complément

Nous rassemblons ici quelques articles dont les références nous ont été principalement transmises par Google Scholar ou le site Researchgate.

## Encore des démonstrations de la conjecture ou de sa négation

P. Bruckman (2010, [85]) tente une démonstration par l'absurde en considérant $N_0$ le plus petit germe ne satisfaisant pas la conjecture. Une erreur dans l'estimation de la terrible somme [44] $\sum_{j=0}^{k-1} 3^{k-1-j}2^k$ (page 7, 5e ligne avant la fin) arrête notre lecture.

M. Orus–Lacort (2018, [86]) propose de démontrer la conjecture par induction mathématique. Dans son argumentation pour le passage du cas $m$ au cas $m+1$, l'auteur utilise un passage à la limite qui met en oeuvre la formule itérée (1). Les deux raisonnements sont évidemment incompatibles.

D. Jenber (2018, [87]) établit des « preuves » de la conjecture de Collatz pour quelques familles de nombres qui sont de fait réunis par la relation $4n + 1$. De façon astucieuse, chaque famille est construite par une relation de récurrence utilisant un nombre de la précédente (la suite « au-dessus » du premier double possible). Par exemple la première famille est (1, 5, 9 , ...), la deuxième utilise 5 dans sa construction ; la suite au-dessus de $2 \times 5$ est (3, 13, ...) la troisième (17, 69, ...) au-dessus de $2 \times 13$ (il n'y a pas de nombre impair au-dessus de 6), etc. L'auteur prolonge sa construction par récurrence. Son raisonnement est difficile à suivre, notamment embué par le traitement de tous les nombres pairs. Toutefois, l'auteur ne semble pas vérifier que tous les nombres sont englobés dans sa construction.

43. C'est une application de Conway avec $M_3 = \{2, 4, 4\}$ et $R_3 = \{0, 1, -1\}$
44. partie du numérateur de la formule 2 page 10

M. Sghiar (2018, [88]) utilise le prolongement de la fonction $C$ par une fonction réelle. Il peut en utilisant cette fonction démontrer (Théorème de Sghiar-Syracure) que 1 appartient à l'orbite de n'importe quelle valeur entière. Son idée est de calculer la somme des valeurs d'une partie de l'orbite d'un germe $x$ par une intégrale. On laisse le lecteur suivre le raisonnement de l'auteur.

J.W. Porras (2018, [89], [90]) propose une démonstration de la conjecture en commettant un type erreur assez commune sur l'arbre des prédécesseurs de 1 (voir aussi Alahassa (2017, [83]). En montrant que chaque nombre possède une famille de prédécesseurs, il en déduit que l'ensemble des nombres est atteint.

W. Ren (2019, [91]) démontre ( !) que la conjecture est équivalente à la conjecture que nous avons appelée *Conjecture du temps d'arrêt fini*. Il montre que la propriété est valable pour des familles de nombres. Il ne reste plus qu'à ... !

M. Berkouk (2019, [92]) dans une nouvelle contribution établit la formule des cycles donnée page 17) et se propose de démonter l'équivalence de l'égalité $\frac{\log 3}{\log 2} < \frac{p}{q}$ et la « convergence » de la suite vers 1. Dans son raisonnement l'auteur oublie que la convergence vers 1 peut ne pas être liée à l'existence de cycles.

T. Hamot (2019, [93]) démontre que l'alternance de deux types de motifs (série de divisions par 2 et opération $(3x + 1)/2$ appelée motif « m d » (montée-descente) ne peut se faire indéfiniment. Par la suite, dans l'échange que nous avons eu avec lui, il se tourne vers l'arbre des prédécesseurs.

M. C. Bennassar (2019, [94]) propose un tableau de nombres qui démontre visuellement la conjecture.

L'article de V. Padilla (2919, [95]) est une révision d'articles précédents. L'auteur suit une idée semblable à celle de T. Hamot et obtient sa démonstration au bout de 156 pages de calculs très techniques. L'auteur exploite la notion de rang d'un nombre impair. Nous sommes dubitatifs quant à la validité des relations « pour tout K » de la page 15.

F. Galetto (2019, [96], [97], [98], [99], [100]) nous gratifie de toute une série de démonstrations de la conjecture. Dans la plus récente, l'auteur pense, en appliquant le principe SPQR (Semper Paratus ad Qualitatem et Rationem) ( !) (Galetto, 2017, [101]), qu'une certaine méthode probabiliste est capable de mener à une démonstration de la conjecture qu'il a déjà démontrée dans les articles précédents.

L. Laurore (2019, [102]) veut démontrer que toute suite de Syracuse finit par passer au dessous de son point de départ. En introduisant la notion de « suites confluentes » il montre que toute suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme $4m + 3$ finit par croiser une suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme $4m + 1$. Dans son raisonnement bien mené l'auteur oublie que si la suite passe au-dessous de son point de départ, ce n'est pas forcément le cas pour le point de départ de la suite $4m + 3$.

S. Zou (2019, [103]), dans un bref article de 4 pages, décompose $\mathbb{N}$ en deux ensembles B et H. Les nombres de B satisfont la conjecture, les autres non. Puis l'auteur montre que H est vide. L'article étant écrit en chinois, les détails sont laissés aux lecteurs intéressés.

M.M. Ahmed (2019,[104]) démontre que la conjecture est fausse en s'appuyant sur le fait qu'une infinité de suites se terminent de façon identique. End of story dit-il.

R. Deloin (2019, [105]) décompose $setN$ en une suite d'intervalles $[2^n, 2^{n+1} - 1]$. Il note ensuite que l'opération $3n + 1$ provoque un saut en avant de 1 ou 2 intervalles et que la division par 2 un recul possible de 1 intervalle ce qui rend possible, selon l'auteur, de démonter la conjecture pour autant que les trajectoires restent bornées (la possibilité de cycles n'est pas évoquée). Il prétend ensuite montrer que le nombre de « jumps » $((3x+1)/2)$ est inférieur au nombre de divisions par 2 ce qui terminerait la démonstration.

Z. B. Batang (2019, [106]) montre pourquoi la conjecture doit être vraie à partir de l'étude de l'arborescence construite sur la suite inverse de Collatz. Dans argumentation une confusion apparaît due au fait que la notation du quotient d'une division euclidienne par 3 se réfère au reste (0, 1 ou 2) et non au dividende.

W. Ren (2019, [107]) nomme dynamique réduite l'étude des suites de Syracuse de l'origine à la première valeur inférieure. Il montre avec force calculs que la dynamique réduite conduit à la dynamique originale.

J. Olloh (2019, [108]) en différenciant diverses classes de nombres pairs et impairs estime qu'une preuve de la conjectures est imminente.

## D'autres conjectures

W.B. Vasantha Kandasamy et collègues (2016, [109]) émettent une conjecture dans l'ensemble des nombres neutrosophiques. Sans entrer dans le monde des objets neutrosophiques, on retient que la suite est étudiée sur les nombres du type $a + bI$ avec $a$ et $b$ dans $\mathbb{Z}$ et $I$ un élément formel avec la règle $I^2 = I$. La conjecture est que la suite de Syracuse dans cet ensemble « converge » vers un des 55 nombres cités dans l'article.

P. Castañeda (2019 [110]) étudie la dynamique de l'itération d'une fonction basée sur le code binaire des nombres et propose la conjecture de Collatz binaire.

## Productions assez savantes sur des propriétés associées

### Les articles anciens

Ce sont des articles qui explorent une voie que nous avons manquées dans première recension. Ils examinent la structure des cycles. Plusieurs de ces résultats ont perdu de l'intérêt vu le résultat d'Eliahou relatif à la longueur des éventuels cycles.

R. P. Steiner (1978,[111]), en utilisant $T$, considère les cycles (1-cycle) constitués d'une phase ascendante (donc des nombres impairs) suivis d'une phase descendante (de nombres pairs) (appelés des circuits). Il démontre que le seul cycle de ce type est (1, 2).

R. P. Steiner (1981,[112]) détermine les circuits qui sont des cycles pour les suites $qx + 1$ avec $q = 5$ et $q = 7$.

B.G. Seifert (1984, [113]) donne quelques informations à propos des cycles liés aux problèmes $3x \pm 1$ (les suites sont restreintes aux nombres impairs). A propos du problème $3x - 1$ il formule a conjecture suivante : toute suite se termine par un des 3 cycles (1, 1, 1, ...), (5, 7, 5, ...) ou (17, 25, 37, 55, 41, 61, 91, 17, ...) [45]. Nous avions trouvé cette

45. Notés négativement, ce sont des cycle du problème $3x + 1$

conjecture dans l'article de Kaneda (2014, [62]) (*Generalized Collatz Cycle Conjecture*). Elle n'est pas non plus citée dans les bibliographies commentées de Lagarias qui pourtant référencent l'article de Seifert.

T. Brox (2000, [114]) considère les cycles $\Gamma$ de la fonction que nous avons désignée par $N$ (et lui par $T_1$) appelés cycle de Collatz. $\delta(\Gamma)$ désigne le nombre d'éléments de $x \in \Gamma$ avec $\nu(x) > 2$. Il montre que $\delta(\Gamma) < 2 \log |\Gamma|$ où $|\Gamma|$ est la longueur du cycle.

Ce théorème généralise le théorème de R. P. Steiner (1978,[111]).

T. Mimuro (2001,[115]) examine quelques cycles de la suite de Syracuse sur les nombres rationnels.

F. Luca (2005, [116]) améliore des résultats de Steiner et Mimuro concernant la structure des cycles non-triviaux.

John L. Simons (2004, [117] ; 2007, [118]) démontre l'inexistence de 2-cycles, c'est-à-dire de cycles constitués de deux répétitions d'une phase ascendante suivi d'une phase descendante.

A. Caraiani (2010, [119]) étend l'étude du semi-groupe $3x+1$ (page 35) à des semi-groupes de $qx + 1$ pour quelques valeurs premières de $q$.

### Les articles nouveaux

Ce sont des articles parus à l'époque de notre travail.

Y. N. Aliyev (2017, [120], [121]) étudie la suite de Collatz en notation de base trois et prouve certains résultats sur la distribution des digits pour des suites formées de répétitions des opérations S et T respectivement $(3x + 1)/2$, $x/2$. Certains nombres spéciaux semblent donner tous les schémas de distribution des digits.

M. Winkler (2017, [122], [123]) présente une théorie du problème du *stopping time* avec notamment une référence à l'algorithme générant les germes $x$ avec *stopping time* fini.

J.-J. Daudin (2017, [124]) propose une version de la représentation de Wirsching-Goodwin des entiers connectés à 1 dans le problème $3x + 1$ par des mathématiques élémentaires.

Y. Yu et D. Pei (2017, [125]) annoncent un résultat qui confirme la conjecture proposée par Terras en 1976 (voir 80-13 dans biblio du livre !). L'article sera retiré avec un commentaire : *We can not prove Lemma 1 in Sect 2.4, and Terras did not prove it either, we misunderstood Terras's result here. Thus our proof about Theorem 2 is wrong.*

O. Rozier (2018, [126]) étudie la dynamique de la suite $3x+1$ dans les nombres 2-adiques.

A. Rukhin 2018, [127]) propose également une variété de démonstrations algébriques du théorème de Steiner sur les 1-cycles.

G.M. Georgiou (2018, [128]) associe de façon univoque à une suite de Syracuse une suite binaire qui, via une représentation graphique, permet des comparaisons qualitatives.

W. Ren et collègues (2018, [129]) proposent de nouveaux algorithmes pour vérifier la conjecture pour de très grands nombres et suggèrent d'utiliser la conjecture de Collatz comme « preuve de travail » dans la technologie *blockchain*.

O. Rozier (2019, [130]) propose une nouvelle formule pour la transformée inverse de la prise du vecteur de parité et poursuit l'étude de la dynamique de $3x+1$ sur $\mathbb{Z}_2$.

E. Tezcan(2019, [131]) présente des variations sur la fonction itérée 1 (page 10) et la fonction inverse $R(n) = \frac{2^x-1}{3}$ avec $x$ convenable.

V. Martin Chabrera (2019,[132]) remarque une analogie entre la formule 3 (page 11) utilisée dans la version faible de la conjecture et la formule donnant les nombre de triangles dans les différentes étapes de la construction de la fractale de Sierpinski. Passer par les fractales algébriques [46] permet de reformuler la conjecture faible dans une version algébrique et une version géométrique.

T. Tao (2019, [133]) vraisemblablement atteint par la maladie mathématique qu'il nomme par ailleurs [12]), prolonge un résultat de Korec (1994, [134]) [47] par le résultat : pour toute fonction $f : \mathbb{N}+1 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, le minimum de l'orbite de $m$ est inférieur ou égal à $f(m)$ pour presque tout $m$ (dans le sens de la densité logarithmique). Une avancée spectaculaire selon plusieurs avis. Il précise toutefois : « ...[the] conjecture remains well beyond reach of current methods ».

B. Bairrington et A. Okano (2019,[135]) lient l'histoire du problème au développement de l'algorithme de Cosper qui projette des séquences binaires sur des ensembles de nombres. Cet algorithme semble correspondre à la recherche des nombres correspondant à un vecteur de parité.

Y. N. Aliyev (2019, [136]) poursuit son étude de certaines suites en ajoutant une opération supplémentaire à S et T : V (soit $((3x+2)/2)$.

N. Lygeros et O. Rozier (2020, [137]) reprennent l'étude d'un prolongement analytique sur les réels. Une généralisation à une classe de fonctions réelles dépendant de quatre paramètres est proposée de manière à englober de nombreuses variantes du problème $3x+1$.

## Productions plus ou moins élémentaires vraisemblablement correctes de propriétés associées

W. Poulain (2017, [138]) propose quelques calculs liés à la formule itérée (1) (avec généralisation à $kn+1$) et à la formule des prédécesseurs.

D. Barina (2018, [139]) étudie la suite donnée par :

$$f(m) = \begin{cases} 7m+1 \text{si } m \equiv 1 \pmod 4 \\ 7m-1 \text{si } m \equiv 3 \pmod 4 \\ m/2 \text{si } m \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

La conjecture est la même que pour la suite de Syracuse avec le même argument heuristique.

46. Une fractale algébrique est une série formelle de $\mathbb{C}[[X]]$ que l'on peut mettre sous la forme $P(X)P(X^m)P(X^{m^2}$.... P en est le polynôme générateur et $m$ l'ordre.

47. Le minimum de l'orbite de $m$ est inférieur ou égal à $m^\Theta$ avec $\Theta > \log 3/\log 4$ pour presque tout $m$

M. Chouar ([140]) introduit la suite de Syracuse dans son site consacré aux nombres de de la forme $6n \pm 1$. Il considère la conjecture de Syracuse inversée, c'est-à-dire la recherche des prédécesseurs de nombres, en particulier 1. Il note que l'on *peut toujours continuer*. Croit-il avoir démontré la conjecture ?

StyxSwimmer ([141]) utilise la bibliothèque D3 pour poursuivre le travail de Jason Davies (annexe 6). Il réalise de véritables de galaxies comprenant jusqu'à 100000 termes de la suite de Collatz.

G. Tyshko (2019, [142]) procède à une véritable botanique des nombres dont il ne ressort pas clairement s'il prétend démontrer ou non que tous les nombres sont dans l'arbre canonique.

L'éditeur du livre de précise *This book is at first glance a proof of the well-known conjecture of Lothar Collatz on the Syracuse sequence. However, in fact, this book is about finding consistency and regularity in the world around us.*.

S. Chen et collègues (2019, [143] construisent une fonction $\mathfrak{Z}$ avec $\mathfrak{Z}(n) = \sum f(a_i)$ où les $a_i$ sont les composante de $n$ exprimé en base $k$ (la référence aux nombres k-adique n'est pas appropriée) et $f$ définie selon le reste $\pmod p$ de son argument. Avec quelques hypothèses supplémentaires, il est montré que la suite construite avec $\mathfrak{Z}$ termine sur le cycle $1, 2$. Le lien avec la suite de Collatz est ténu. Il tient simplement dans la définition de $f$.

F. Pan et J. P. Draayer (2019, [144]) proposent une version de la suite de Collatz dans l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps à deux éléments. Ils montrent que le degré des polynômes finissent par décroître en moyenne. Ce qui permet de montrer la conjecture dans cet espace. Ce résultat est considéré comme une preuve faible de la conjecture de Collatz.

M. Peral Manzo (2019, [145]) étudie les classes mod 9 des nombres de Collatz (les origines des suites se terminant par 1).

L. Sternberg (2019, [146]) démontre quelques propriétés de la suite inverse de Collatz.

L. Sternberg (2019, [147]) définit une pseudo-suite de Collatz et en démontre la convergence.

## Productions plus ou moins élémentaires plutôt douteuses de propriétés associées

A. Nikolaychuk (2018, [148]) appelle $\delta(m)$ le nombre d'éléments de la $C$-suite de Collatz jusqu'à 1. Il définit divers opérateurs pour trouver (tous ?) les nombres de même $\delta$ (dans sa construction il n'évoque pas le cas éventuel de suites non convergentes). Il n'est pas clairement perceptible si l'auteur prétend démontrer la conjecture de Collatz où seulement d'indiquer une voie à suivre.

M.A. Idowu (2015, [149]) propose une « nouvelle mathématique » basée sur le système des nombres de Collatz.

J.M. Ashfaque (2019, [150]) en une note de deux pages propose de s'intéresser à la suite $n + d$ et chercher les valeurs de $d$ qui conduisent à des suites entières (!) menant à 1.

### Evocation de la conjecture

R. Cuculière et J.-P. Guichard (1984, [151]) ont édité une brochure à but didactique dont un chapitre, celui des problèmes, évoque la suite de Syracuse.

B. Bajorska-Harapinska et ali (2017, [152]) font référence au problème de Collatz comme un exemple de problème traitant d'orbites liées à des transformations sur les nombres entiers.

## Références


[1] J. Lagarias, *The set of rational cycles for the* $3x+1$ *problem. Acta Arithmetica*, 56 (1):33–53, 1990. aa5614.pdf.

[2] D. Holden, *Results on the* $3x+1$ *and* $3x+d$ *conjectures.* Dhiraj.pdf.

[3] R.E. Crandall, *On the* $3x+1$ *Problem. Mathematics of Computation*, 144(32): octobre 1978, 1281–1292, octobre 1978. S0025-5718-1978-0480321-3.pdf ; utilise la fonction $N$.

[4] J. Lagarias, *The* $3x+1$ *problem and its generalizations. American Mathematical Monthly*, 92(1):3 – 23, 1985. `http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/`, Lagarias3-23.pdf.

[5] J. Lagarias, *The* $3x+1$ *Problem : An Overview. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, chapitre Introduction, pages 3–30. Providence : American Mathematical Society, 2010. mbk-78-prev.pdf.

[6] J.-P. Delahaye, *La conjecture de Syracuse. Pour la Science*, 247:100–105, mai 1998. 053.pdf.

[7] G. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the 3n + 1 Function.* Lecture Notes in Math. 1681. Springer-Verlag, 1998. MR1612686 (99g :11027).

[8] B.J. Green et T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Annals of Mathematics*, 167 (2008):481–547, 2008. arXiv :math.NT/0404188.

[9] J.-A. Calame et F. Jaquet, *Mathématique 8ème CS.* DIP, Neuchâtel, 1991. Atelier page 10.

[10] L.-O. Pochon, *La suite de Syracuse. Bulletin de la SENS*, 14, 1993.

[11] N. Svensson, *Theme and Variations on th* $3N+1$ *Problem.* Bachelor_Thesis.pdf.

[12] T. Tao, *The Collatz conjecture, Littlewood-Offord theory, and powers of 2 and 3.* `http://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/the-collatz-conjecture-littlewood-offord-theory-and-powers-of-2-and-3/`, 2011. consulté : mars 2014 - blogTTao.pdf.

[13] R.K. Guy, *Don't try to solve these problems. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, pages 231–240. Providence : American Mathematical Society, 2010. reprinted early paper 1983.

[14] J.-P. Delahaye, *J'aimerais tant prouver Syracuse. Pour la Science*, dossier 74:98–103, janvier-mars 2012.

[15] J.-P. Delahaye et C. Lasou, *La conjecture de Syracuse*. Licence s.t-a., Université des Sciences et Technologies de Lille, 2007. syracuse.pdf.

[16] G. Opfer, *An Analytic approach to the Collatz* $3N+1$ *Problem*, 2011. hbam2011-09.pdf, consulté : septembre 2012.

[17] C. A. Feinstein, *The Collatz* $3n+1$ *Conjecture is Unprovable*. arXiv :math/0312309v19, 2012.

[18] J. H. Conway, *Unpredictable iterations. In Proceedings of the Number Theory Conference*, page 49–52, 1972.

[19] C.T. Dianopoulos, *The Collatz Conjecture Proof*, 2012. COLLATZ_CONJECTURE_PROOF.pdf.

[20] P. Andaloro, *On total stopping times under 3x+1 iteration*. Rapport technique, Kent State University, 1998. andaloro.pdf.

[21] J.R. Goodwin, *The* $3x+1$ *Problem and Integer Representations*. Rapport technique, St. Edward's University, Austin, Texas, 2015. arXiv :1504.03040.

[22] J. Lagarias, *The 3x + 1 Problem : An Annotated Bibliography II (2000-2009)*. arXiv :math/0608208v5, 2011.

[23] J. Lagarias, *The* $3x+1$ *Problem : An Annotated Bibliography (1963–1999) (Sorted by Author)*. arXiv :math/0309224v13, 2011. Lag-0309224v13.pdf.

[24] J. Lagarias, *The* $3x+1$ *Problem : An Annotated Bibliography II (2000-2009)*. arXiv :math/0608208v6, 2012. Lag-0608208v6.pdf.

[25] J. Lagarias, *Preface. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The* $3x+1$ *Problem*, chapitre Preface, pages ix–xiv3–30. Providence : American Mathematical Society, 2010. mbk-78-prev.pdf.

[26] J. Arsac, *Algorithmes pour vérifier la conjecture de Syracuse. Informatique théorique et applications*, 21:3–9, 1987. `http://www.numdam.org/item?id=ITA_1987_21_1_3_0`.

[27] S. Eliahou, *Le problème* $3n+1$ *: y a-t-il des cycles non triviaux ? (III)*. `http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-y-a-t-il-des.html`, 2011.

[28] M. Chamberland, *A Continuous Extension of the* $3x+1$ *Problem to the Real Line*. Rapport technique, Dpt of Mathematics and Statistics, McMaster University, Ontario, Canada, 1996. 3x_1996.pdf.

[29] M. Chamberland, *A Continuous Extension of the* $3x+1$ *Problem to the Real Line. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2 (1996):495–509, 1996.

[30] N. Lygeros et O. Rozier, *Dynamique du problème* $3x+1$ *sur la droite réelle*. arXiv :1402.1979, 2014. 1402.1979.pdf.

[31] A.A. Kurtz et J. Simon, *The Undecidability of the Generalized Collatz Problem*. Rapport technique, Department of Computer Science The University of Chicago, 2006. 10.1.1.84.6811-pdf incomplet.

[32] J. Sinyor, *The 3x + 1 Problem as a String Rewriting System. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2010(Article ID 458563), 2010. 458563.pdf.

[33] J. H. Conway, *FRACTRAN : A simple universal programming language for arithmetic. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, pages 249–264. Providence : AMS, 2010. reprinted early paper 1987.

[34] K.G. Monks, *3x+1 Minus the +. Discrete Math. and Theorical Computer Science*, 5 (2002):47–54, 2002. dm050103.pdf, ken_0.pdf, (usage de FRACTRAN).

[35] A. Slakmon et L. Macot, *On the Almost Sure Convergence of Syracuse Sequences*. Rapport technique, Départements de mathématiques et de physique, Collège de Bois-de-Boulogne, Montréal, 2003. AlmostConvergenceSyracuseSeq.pdf.

[36] T. Carletti et D. Fanelli, *Quantifying the degree of average contraction of Collatz orbits*. Rapport technique, Department of Mathematics and Namur Center for Complex Systems, University of Namur ; Dipartimento di Fisica e Astronomia, University of Florence, 2016. arXiv :math/1612.07820.pdf).

[37] T. Carletti et D. Fanelli, *Quantifying the degree of average contraction of Collatz orbits. Boll Unione Mat Ital*, https ://doi.org/10.1007/s40574-017-0145-x:1–24, 2017. 10.1007-s40574-017-0145-x.pdf.

[38] M. Chamberland, *Averaging Structure in the* $3x + 1$ *Problem*. Rapport technique, Department of Mathematics and Computer Science, Grinnell College, 2003. average_3x+1.pdf.

[39] F. Fleckinger et I. Abdoulkarim, *Sur la conjecture de Collatz*. Rapport technique, Université de Franche-Comté, 2015. arXiv :math/1607.02370.pdf.

[40] R. Haynberg, *State of the Collatz-Conjecture*. Rapport technique, Dept. of Mathematics University College Cork, 2009. collatzproof.pdf ; 10.1.1.622.8570.pdf.

[41] R. Haynberg, *State of the 3x+1 problem*. `http://rolf.haynberg.de/?p=429`, 2009.

[42] P. Schorer, *Are We Near a Solution to the 3x + 1 Problem ? A Discussion of Several Possible Strategies*. Rapport technique, Hewlett-Packard Laboratories, Palo Alto, 2014. schorer.pdf.

[43] P. Schorer, *A Solution to the 3x + 1 Problem*. Rapport technique, Hewlett-Packard Laboratories, Palo Alto, 2014. solutionsubmit2.pdf.

[44] J.P. Bendegem (van), *The Collatz conjecture. A Case Study in Mathematical Problem Solving. Logic and Logical Philosophy*, 14 (2005):7–23, 2005. jpvb.pdf.

[45] A. Billot, *La conjecture de Syracuse*. Gallimard, 2008.

[46] M. Chamberland, *A* $3x + 1$ *survey : Number theory and dynamical systems. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, pages 189–207. Providence : American Mathematical Society, 2010.

[47] M. Chamberland, *An Update on the* $3x + 1$ *Problem*. Rapport technique, Department of Mathematics and Computer Science, Grinnell College, 2015. 3x_survey_eng.pdf.

[48] E. Belaga et M. Mignotte, *Walking Cautiously Into the Collatz Wilderness : Algorithmically, Number Theoretically, Randomly*. Rapport technique, Université Louis Pasteur 7, Strasbourg, report 2000-18, 2015. documentation/syracuse/dmAG0117-1.pdf.

[49] T. Oliveira e Silva, *Empirical verification verification of the 3x+1 problem and related conjectures. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, pages 189–207. Providence : American Mathematical Society, 2010.

[50] E. Roosendaal, *On the 3x+1 Problem.* URL : `http://www.ericr.nl/wondrous/`.

[51] S. Eliahou, *Le problème* $3n+1$ *: élémentaire mais redoutable (I).* `http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-elementaire-mais.htm`, 2011.

[52] S. Eliahou, *Le problème* $3n+1$ *: cycles de longueur 5 (II).* `http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-cycles-de.html`, 2011.

[53] R. Ghosh, *New lower bounds for the size of a non-trivial loop in the Collatz 3x+1 and generalized px+q problem*, 2009. LoopCollatz_01.pdf.

[54] M.K. Sinisalo, *On the minimal cycle lengths of the Collatz sequences.* Preprint, june 2003, Department of Mathematical Sciences University of Oulu (Finland), 2003. Sinisalo_collatz.pdf).

[55] A. Slakmon et L. Macot, *On the Almost Sure Convergence of Syracuse Sequences. Statistics and Probability Letters*, 15 (2006):1625–1630, 2006.

[56] D. Applegate et J.C. Lagarias, *Density Bounds for the* $3x+1$ *Problem II. Krasikov Inequalities. Math. Comp.*, 64 (1995):427–438, 1995.

[57] I. Krasikov et J.C. Lagarias, *Bounds for the* $3x+1$ *Problem using Difference Inequalities.* arXiv :math.NT0205002v1, 2002.

[58] K.M. Monks, *The sufficiency of arithmetic progressions for the 3x+1 conjecture. In Proceedings of the American mathematical society*, volume 134, pages 2861–2872, 2006. S0002-9939-06-08567-4.pdf , SufficiencyRev4.pdf, ken_1.pdf.

[59] S. Letherman, D Schleicher et R. Wood, *The* $3n+1$ *- Problem and Holomorphic Dynamics. Experimental Mathematics*, 8(3):241–252, 1998. euclid.em.1047262405.

[60] O. Rozier, *Le problème de Syracuse étendu.* URL : `http://www.probleme-syracuse.fr`.

[61] E. Belaga, *Walking Cautiously into the Collatz Wilderness : Algorithmically, Number Theoretically, Randomly.* a8_BelagaMathInfo06Presentation060920.ppt, 2006. September 18-22, 2006.

[62] M. Kaneda, *Two remarks on the Collatz cycle conjecture.* `https://arxiv.org/abs/1010.6206v3`. 1010.6206.pdf.

[63] J.-P. Allouche, *Sur la conjecture de Syracuse-Kakutani-Collatz. Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, 1978-79, 1979. Exposé 9, résumé dans [23].

[64] J.-P. Allouche, *Two exercises of Comtet and two identities of Ruehr.* Rapport technique, CNRS, Inst. Math. Jussieu-PRG, UPMC, 2017. 1707.05751.pdf.

[65] E. Belaga et M. Mignotte, *The Collatz Problem and Its Generalizations : Experimental Data. Table 1. Primitive Cycles of* $(3n+d)$*-mappings.* Rapport technique, Université Louis Pasteur 7, Strasbourg, report 2000-18, 2006. documentation/syracuse/06015.pdf.

[66] E. Belaga et M. Mignotte, *Cyclic Structure of Dynamical Systems Associated with $3x + d$ Extensions of Collatz Problem*. Rapport technique, Université de Strasbourg, report 2000-18, 2000. documentation/syracuse/00018.pdf, (consulté : septembre 2012).

[67] E.G. Belaga, *Effective Polynomial Upper Bounds to Perigees and Numbers of $(3x + d)$-Cycles of a Given Oddlength*. *Acta Arithmetica*, 106.2:197–206, 2003. aa106-2-09.pdf.

[68] E. Belaga, *Effective Polynomial Upper Bounds to Perigees and Numbers of $(3x + d)$-Cycles of a Given Oddlength*. Rapport technique, Université Louis Pasteur 7, Strasbourg, 2007. documentation/syracuse/00028.pdf.

[69] W.B Vasantha Kandasamy, I. Kandasamy et F. Smarandache, *A New $3n ? 1$ Conjecture Akin to Collatz Conjecture*. Rapport technique, VIT University, 2016. ANew3NConjectureCollatz.pdf.

[70] W.B Vasantha Kandasamy, I. Kandasamy et F. Smarandache, *The $3n + p$ Conjecture : A Generalization of Collatz Conjecture*. *Journal of Ultra Scientist of Physical Sciences*, 29(2):83–88, 2017. Collatz Conjecture-paper774-170206140527.pdf.

[71] Z. Franco et C. Pomerance, *On a Conjecture of Crandall Concerning the $qx+1$ Problem*. *Mathematics of Computation*, 64(211):1333–1336, 1995. paper101.pdf.

[72] H.M. Farkas, *Variants of the $3N + 1$ problem and multiplicative semigroups*. *In Geometry, Spectral Theory, Groups and Dynamics : Proceedings in Memory of Robert Brooks, Contemporary Math., Volume 387*, pages 121–127. Amer. Math. Soc., 2005.

[73] J. Lagarias, *Wild and Wooley numbers*. *Amer. Math. Monthly*, 113 (2006)(2):97–108, 2006. lagarias97.pdf.

[74] D. Applegate et J.C. Lagarias, *The $3x + 1$ semigroup*. *Journal of Number Theory*, 117 (2006):146–159, 2006. 1-s2.0-S0022314X05001459-main.pdf, math0411140.pdf.

[75] K. Conrow, *Collatz $3n+1$ problem*. `http://www-personal.ksu.edu/~kconrow/`.

[76] C.T. Dianopoulos et K. Kulkarni, *Collatz Conjecture Proof*, 2013. `https://fr.scribd.com/document/160395809/Collatz-Proof`.

[77] O. Pirson, *Démonstration de la suite de L. Collatz*. `http://www.opimedia.be/3nP1/`, consulté 2016.

[78] K. Conrow, *The Structure of the Collatz Trajectories with an Inductive/Constructive Proof of the conjecture*. Rapport technique, Kansas State University, 2007. colstruc.pdf.

[79] R. Ghosh, *Non-trivial loops do not exist in the Collatz problem*. 10.1.1.312.6615.pdf, 2009.

[80] P. Schorer, *A Solution to the $3x + 1$ Problem*. `http://www.occampress.com/#3x+1`, 2009. papier retiré.

[81] M. Berkouk, *Démonstration de la suite de L. Collatz*. `http://vixra.org/abs/1507.0200`, 2015. 1507.0200v2.pdf.

[82] F. Baleh, *Collatz conjecture The trivial cycle is unique (because a Collatz sequence that becomes periodic converges).* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01484740, 2017. Collatz_Trivial_cycle uniqueness_V2.pdf.

[83] N. K.-A. Alahassa, *Arithmétique cantus, graphe de Syracuse, et preuve de la conjecture de Collatz.* Rapport technique, Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal, 2017. syracuse2.pdf.

[84] R. Simonetto, *Conjecture de Syracuse : avancées inédites.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01419948v1, 2016.

[85] P. S. Bruckman, *A proof of the Collatz conjecture. nternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39:403–407, 2010. A_NEW_PROOF_OF_THE_COLLATZ_CONJECTURE_8-28-10.pdf).

[86] M. Orus–Lacort, *Analyzing whether Mathematical induction method could be used in Collatz conjecture*, 2018. CC.pdf.

[87] D. Jenber, *Collatz Problem.* Rapport technique, College of Natural and Social Sciences Mathematics Division Addis Ababa Science and Technology University, 2018. 1811.08500.pdf.

[88] M.. Sghiar, *L' attraction des nombres par la force Syracusienne.* Rapport technique, Département de mathématiques, université de Bourgogne, 2018. LaconjecturedeSyracuse.pdf.

[89] J.W. Porras Ferreira, *Solución a la Conjetura de Collatz.* Rapport technique, Centro de Investigaciones Científicas, Escuela Naval de Cadetes "Almirante Padilla", Isla Manzanillo, Cartagena de Indias, 2018. SolucionalaConjeturadeCollatz.pdf.

[90] J.W. Porras Ferreira, *Solution to Collatz ?s Conjecture.* Rapport technique, Centro de Investigaciones Científicas, Escuela Naval de Cadetes "Almirante Padilla", Isla Manzanillo, Cartagena de Indias, 2018. SolutionCollatzsConjecture.pdf.

[91] W. Ren, *A New Approach on Proving Collatz Conjecture. Hindawi Journal of Mathematics*, 2019, 2019. NewApproachProvingCollatzConjecture.pdf.

[92] M. Berkouk, *Démonstration de la suite de L. Collatz.* http://vixra.org/abs/1507.0200v4, 2019. 1507.0200v4.pdf.

[93] T. Hamot, *La conjecture de Syracuse.* Rapport technique, 2019. Conjecture de Collatz.pdf et annexes.

[94] M. C. Bennassar, *The Collatz Conjecture, Order and harmony in the sequence numbers.* Rapport technique, 2019. Bennassar.pdf.

[95] V. Padilla, $3x+1$ *Problem, Rev-14.* Rapport technique, 2019. arXiv :1910.05622.

[96] F. Galetto, *Syracuse_ Collatz Conjecture : Comparison of two Markov approaches towards the proof.* Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02274552.

[97] F. Galetto, *Proof of the Syracuse_ Collatz Conjecture.* Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02048821.

[98] F. Galetto, *Proof of Syracuse_ Collatz Conjecture by Flow Graphs.* Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02288698.

[99] F. Galetto, *Collatz Conjecture, new proof by merging into three SuperStates*. Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02316263.

[100] F. Galetto, *Collatz-Syracuse Conjecture, proof by Reliability Integral Theory*. Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02334855.

[101] F. Galetto, *The SPQR («Semper Paratus ad Qualitatem et Rationem») Principle in Action. Engineering and Applied Sciences*, 2017.

[102] L. Laurore, *Eléments de démonstration des conjectures de Collatz et de Kakutani*. hal-02336166, 2019.

[103] S. Zou, *Proof of Collatz Conjecture. Pure Mathematics*, 9(3):414–416, 2019. ProofofCollatzConjecture.pdf.

[104] M.M. Ahmed, *The Collatz Conjecture is blatantly false*. Rapport technique, Punjiri Web and Mobile Technologies, 2019. collatzconvergence.pdf.

[105] R. Deloin, *Proof of Collatz conjecture*. Rapport technique, Université de Sherbrooke, 2019. Collatz-v21engamsart.pdf.

[106] Z.B. Batang, *Integer patterns in Collatz sequences*. Rapport technique, King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal (Saudi Arabia), 2019. arXiv :1907.07088v2.

[107] W. Ren, *Reduced Collatz Dynamics Data Reveals Properties for the Future Proof of Collatz Conjecture. Data*, 4, 89, 2019. ReducedCollatzDynamicsDataRevealsProperties.pdf.

[108] J. Olloh, *On the fundamentals of Collatz conjecture (Revised)*. Article in ssrn electronic journal · february 2019, Kaduna State University, Nigeria, 2019. newcollatzSSRN-id3302210-1.pdf.

[109] W.B Vasantha Kandasamy, I. Kandasamy et F. Smarandache, *Modified Collatz conjecture or* $(3a+1)+(3b+1)I$ *Conjecture for Neutrosophic Numbers* $\mathbb{Z} \cup I$. *Neutrosophic Sets and Systems*, 14 (2016):44–46, 2016. ModifiedCollatzConjecture.pdf.

[110] P. Castañeda, *A dynamical approach towards Collatz conjecture*. Rapport technique, Department of Mathematics, ITAM, Mexico, 2019. castaneda.pdf).

[111] R.P. Steiner, *A Theorem on the Syracuse Problem. In Proc. 7th Manitoba Conf. on Numerical Mathematics and Computing*, page 553–559, 1978.

[112] R.P. Steiner, *On the* $QX+1$ *Problem, Q Odd. The Fibonacci Quarterly*, 19:285–288, 1981. 19-3.pdf, steiner.pdf, 10.1.1.388.4222.pdf.

[113] B. G. Seifert, *On the arithmetic of cycles for the Collatz-Hasse ('Syracuse') conjectures. Discrete Mathematics*, 68 (1988), 1984. 1-s2.0-0012365X88901215-main.pdf.

[114] T. Brox, *Collatz cycles with few descents. ACTA ARITHMETICA*, XCII.2 (2000): 181–188, 2000. aa9229.pdf).

[115] T. Mimuro, *On certain simple cycles of the Collatz Conjecture. SUT Journal of Mathematics*, 2 (2001):79–89, 2001. 01-Mimuro.pdf.

[116] F. Luca, *On the non-trivial cycles in Collatz's problem. SUT Journal of Mathematics*, 41(1):31–41, 2005. 25fb5c28718ab66d3de0167260b779071490.pdf.

[117] J.L. Simons, *On the Nonexistence of 2-Cycles for the* $3x+1$ *Problem. Mathematics of Computation*, 74, 2004. S0025-5718-04-01728-4.pdf.

[118] J.L. Simons, *A simple (inductive) proof for the non-existence of 2-cycles of the 3x + 1 problem. Journal of Number Theory*, 123 (2007), 2007. 1-s2.0-S0022314X06001223-main.pdf.

[119] A. Caraiani, *Multiplicative semigroups related to the* $3x + 1$ *problem.* Rapport technique, 2010. semigroups.pdf).

[120] Y.N. Aliyev et V. A. Suleymanov, *Construction of periods for* $3x+1$ *problem : Use of division algorithm by 2 in 3-base number system for construction of 3-adic numbers as periods of Collatz sequence. In 2013 7th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT)*, 2013. MSW_A4_formatAliyev.pdf.

[121] Y.N. Aliyev, *Construction of periods for* $3x+1$ *problem : Use of division algorithm by 2 in 3-base number system for construction of 3-adic numbers as periods of Collatz sequence. In 10th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT 2016)*, 2017. Conference Location : Baku, Azerbaijan.

[122] M. Winkler, *The algorithmic structure of the finite stopping time behavior of the* $3x + 1$ *function.* Rapport technique, Fakultät für Mathematik Ruhr-Universität Bochum, Germany, 2017. 1709.03385.pdf.

[123] M. Winkler, *The Recursive Stopping Time Structure of the 3x + 1 Function.* Rapport technique, Fakultät für Mathematik Ruhr-Universität Bochum, Germany, 2017. 1709.03385_latest_update.pdf.

[124] J.J. Daudin, *A simple proof of the Wirsching-Goodwin representation of integers connected to 1 in the* $3x + 1$ *problem.* hal-01664084, 2017. principal.pdf.

[125] Y. Yu et D. Pei, *On the Glide of 3x+1 Problem.* Rapport technique, Institute of Information Engineering, Chinese Academy of Sciences, 2017. `https://arxiv.org/abs/1710.01525v2`.

[126] O. Rozier, *Parity sequences of the 3x+1 map on the 2-adic integers and Euclidean embedding.* Rapport technique, Institut de Physique du Globe de Paris, France, 2018. 1805.00133.pdf.

[127] A. Rukhin, *A dual-radix approach to Steiner's 1-cycle theorem.* Rapport technique, The Johns Hopkins University, 2018. 1805.10496.pdf.

[128] G.M. Georgiou, *Encoding and Visualization in the Collatz Conjecture*, 2018. 1811.00384.pdf.

[129] W. Ren, S. Li, R. Xiao et W. Bi, *Collatz Conjecture for* $2^{100000} - 1$ *Is True - Algorithms for Verifying Extremely Large Numbers. In 2018 IEEE SmartWorld*, 2018. Conference location : Guangzhou, China.

[130] O. Rozier, *Parity Sequences of the* $3X + 1$ *Map on the 2-adic Integers and Euclidian Embedding. INTEGERS*, 19 (2019):25 pages, 2019. Parity.pdf.

[131] E. Tezcan, *On Collatz conjecture*, 2019. arXiv :1902.07312v1 ; 1902.07312.pdf.

[132] V. Martin Habrera, *An algebraic fractal approach to Collatz Conjecture.* Bachelor thesis, Facultat de Matemàtiques i Estadística, Universitat Politècnica de Catalunya, 2019. memoria.pdf.

[133] T. Tao, *Almost all Orbits of the Collatz Map Attain Almost Bounded Values*, 2019. arXiv :1909.03562v1.

[134] I. Korec, *A density estimate for the* $3x+1$ *problem. Math. Slovaca*, 44(1):85–89, 1994.

[135] B. Bairrington et A. Okano, *New Experimental Investigations for the* $3x+1$ *Problem : The Binary Projection of the Collatz Map. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 20:article 4, 2019. NewExperimentalInvestigations.pdf.

[136] Y.N. Aliyev, *Another Generalization of* $3x+1$ *Problem : Existence of periodicity in the construction of numbers in periodic version of generalized Collatz' problem and its computational aspects. In Conference : Application of Information and Communication Technologies 2019*, 2019. aict2019.pdf.

[137] N. Lygeros et O. Rozier, *Paramétrisation du problème* $3x+1$ *sur la droite réelle : diagramme de phase, renormalisation et intervalles errants.* hal-02412727, 2020. param-v2.pdf.

[138] W. Poulain, *Suite impaire symbolique de Collatz étendue à* $kn+1$, 2017. probKn-Plus1.pdf.

[139] D. Barina, $7x+1$ *: Close Relative of Collatz Problem.* Rapport technique, Faculty of Information Technology, Brno University of Technology, 2018. 1807.00908.pdf.

[140] M. Chouar, *Conjecture de Syracuse et* $6n \pm 1$. `https://sites.google.com/site/loqiquedespremiers/regles-desdeplacements-des-entiers-par-rapport-au-nombres-premiers/conjecture-de-syracuse-et-6n--1`.

[141] StyxSwimmer, *Graphing the Collatz Conjecture.* `http://swimmingthestyx.com/?p=447`.

[142] G. Tyshko, *Proof of the Collatz conjecture.* Collection Amazon, 2019. https ://www.amazon.fr/Proof-Collatz-conjecture-Georgiy-Tyshko/dp/1090639279.

[143] S. Chen, Q.Y. Sun et Y. Zhu, *The Periodicity to a Kind of Generalized Collatz Problem.* Rapport technique, Hangzhou Normal University, 2019. https ://arxiv.org/abs/1903.03365v3.

[144] F. Pan et J.P. Draayer, *A polynomial approach to the Collatz conjecture.* Rapport technique, 2019. arXiv :1905.08462v1, PolynomialApproach.pdf.

[145] M. Peral Manzo, *¡Pinball Collatz!* Rapport technique, National Pedagogic University (Mexico), 2019. collatzMODULOS.pdf, de Researchgate.

[146] L. Sternberg, *Predictable trajectories of the hailstone sequence generated by the Collatz iteration and proof of a converging Pseudo-Collatz algorithm.* Rapport technique, Department of Biology, University of Miami, 2019. PredictableTrajectories.pdf, de Researchgate.

[147] L. Sternberg, *Odd numbers generated from reduced Collatz iterations are produced by a unique set of reverse iterations.* Rapport technique, Department of Biology, University of Miami, 2019. Injective2.pdf, de Researchgate.

[148] A. Nikolaychuk, *Supplement to The Collatz Conjecture. Journal Of Advances in Mathematics*, 15 (2018):8120–8132, 2018. 7876-Article Text-16244-2-10-20181208.pdf.

[149] M. A. Idowu, *On the Foundations of the Theory of a new Collatz Based Number System*. Rapport technique, Abertay University, 2015. ArXiv :1503.04661v2.

[150] J.M. Ashfaque, *A Variant of the Collatz Conjecture*. Rapport technique, Max Planck Institute for Software Systems, 2019. VariantofCollatz.pdf.

[151] R. Cuculière et J.-P. Guichard, *Arithmétique au fil des âges*. IREM de Poitiers, 1984. http ://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IPO84001.htm.

[152] B. Bajorska-Harapinska, M. Pleszcynski, M. Rózanski, M. Szeeda et R. Witula, *Generalizations of Kaprekar's transformations and Kaprekar-style transformations*. *In* R. Witula, B. Bajorska-Harapinska, E. Hetmaniok, D. Slota et T. Trawinski, éditeurs, *elected Problems on Experimental Mathematics*, pages 233–258. Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, Gliwice, 2017. mono_spem_str_233-258.pdf).

# Annexes

## Annexe 1 : A propos de la difficulté du problème

Guy (2010, [13]) et Tao (2011, [12]) montrent la difficulté du problème en le reliant à d'autres questions non résolues.

Mais une autre filière (Lagarias, 2015) montre pourquoi Erdös jugeait le problème difficile. Les travaux sur les carrés latins auto-orthogonaux SOLS [48] (c'est-à-dire dont la juxtaposition d'un carré et de sa transposée est un carré gréco-latin) avait montré l'intérêt de l'étude des orbites générées par des familles finies de fonctions affines (de plusieurs variables) $R$ à coefficients entiers positifs. Cela revient aussi à étudier les semi-groupes (voire groupes) générées par de telles familles.

Klarner & Rado étudient la question suivante : étant donné un ensemble d'entiers $A = \{a_i\}$ quelles sont les caractéristiques du petit ensemble $T = \langle R : A\rangle \subset \mathbb{N}$ engendré à partir de $A$ par itération des fonctions de $R$ ?

Pour les fonctions à deux variables ou plus, ils notent que très souvent $T$ contient une progression arithmétique. Il est donc de densité non nulle. Avec une seule variable cela semble plus compliqué.

*Etude de cas* : $R = \{f_1 : x \mapsto 2x + 1; f_2 : x \mapsto 3x + 1\}$ engendre le semi-groupe de Klarner-Rado.

*Question* : l'orbite $\langle R : \{1\}\rangle = \{1, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 15, 19, 21, 22, 27, 28, 31, 39, 40, 43...\}$ contient-elle une progression arithmétique infinie ?

Dès 1934, Rado et Erdös collaborent. Ils signeront ensemble dix-huit articles et publieront le théorème d'Erdös-Rado [49] généralisation du théorème de Ramsey et le théorème de Erdös-Ko-Rao [50]. Erdös répondra non à la question ci-dessus en montrant que l'orbite est de densité nulle.

*Théorème (Erdös, 1972)* [51] : Soient $A$ ensemble non-vide d'entiers, $I \subset \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in I$. Soit $\sigma$ un nombre réel positif tel que $\alpha = \sum_{i\in I} 1/m_i^\sigma < 1$. Alors si $T = \langle\{m_i x + n_i\} : A\rangle$ on a pour tout $t \in \mathbb{N}$ :

$$|T \cap [1, t]| <= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{a\in[1,t]\cap A} (\frac{t}{a})^\sigma$$

*Corollaire* : Si de plus $\sigma < 1$ et l'ensemble $A$ est soit fini soit la série $\sum_{a\in A} a^{-\sigma}$ est convergente, alors $T$ est de densité nulle et il n'est ni une réunion finie de progressions arithmétiques infinies (per-set) ni presque per-set.

*Cas particulier* : $T = \langle\{2x + 1, 3x + 1\} : \{1\}\rangle$ est de densité 0 et ne contient donc pas de progression arithmétique infinie.

48. Théorème (Brayton, Coppersmith, Hoffman, 1974) : Il existe des SOLS de tout ordre sauf 2, 3 et 6.
49. https ://en.wikipedia.org/wiki/Erd%C5%91s%E2%80%93Rado_theorem
50. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d'Erd%C5%91s-Ko-Rado
51. Dans la version Théorème 8 dans Klarner & Rado (1974).

## Annexe 2 : Calcul de $N(m)$ selon $m \pmod{16}$, $m$ impair

$m \equiv 1 \pmod 4$

De façon globale : $m = 1 + 4n : N(m) = [3 + 12n + 1] = [1 + 3n]$

- $m \equiv 1, 9 \pmod{16} : m = 1 + 8n : N(m) = [3 + 24n + 1] = 1 + 6n$
- $m \equiv 5 \mod 16 : m = 5 + 16n : N(m) = [15 + 48n + 1] = [1 + 3n]$
- $m \equiv 13 \mod 16 : m = 13 + 16n : N(m) = [39 + 48n + 1] = 5 + 6n$

Après une itération, tous les valeurs se trouvent être inférieures à la valeur de départ.

$m \equiv 3 \pmod 4$

De façon globale : $m = 3 + 4n : N(m) = [9 + 12n + 1] = 5 + 6n$

- $m \equiv 3 \pmod{16} : m = 3 + 16n; N(m) = 5 + 24n; N(24n + 5) = 2 + 9n$
- $m \equiv 7 \pmod{16} : m = 7 + 16n; N(m) = 11 + 24n; N(24n + 11) = [11 + 19n]$
- $m \equiv 11 \pmod{16} : m = 11 + 16n; N(m) = 17 + 24n; N(24n + 17) = 13 + 18n$
- $m \equiv 15 \pmod{16} : m = 15 + 16n; N(m) = 23 + 24n; N(24n + 23) = 35 + 36n$

Avec deux itérations, seul le cas $3 + 16n$ se trouve forcément être inférieur à la valeur de départ.

Pour 7 classes sur 8 (7 valeurs de l'offset), la valeur de $N(m)$ peut être calculée précisément. Pour la valeur 5 de l'offset, la valeur de $N(m)$ dépend de la divisibilité de $1 + 3n$ par une puissance de 2.

Ces 8 classes peuvent se réunir en 4 classes :

- $m \equiv 3, 7, 11, 15 \pmod{16}$ ou $m \equiv 3 \pmod 4 : N(3+4n) = [3(3+4n)+1] = [10+12n] = 5 + 6n$
- $m \equiv 1, 9 \pmod{16}$ ou $m \equiv 1 \pmod 8 : N(1+8n) = [3(1+8n)+1] = [4+24n] = 1+6n$
- $m \equiv 13 \pmod{16} : N(13 + 16n) = [3(13 + 16n) + 1] = [40 + 48n] = 5 + 6n$
- $\equiv 5 \pmod{16} : N(5 + 16n) = [16 + 48n] = [1 + 3n]$

Sur les 3 premières classes $N$ est une application linéaire représentée en respectivement rouge, bleu et vert sur le graphe de la figure 2 . Par contre, le comportement de $N$ sur la 4e classe est plus « chaotique » (en noir sur la figure). Cette dernière classe peut être partitionnée pour obtenir des comportements « réguliers » de $N$ et ceci à l'infini, processus que l'on rencontre fréquemment dans ce problème.

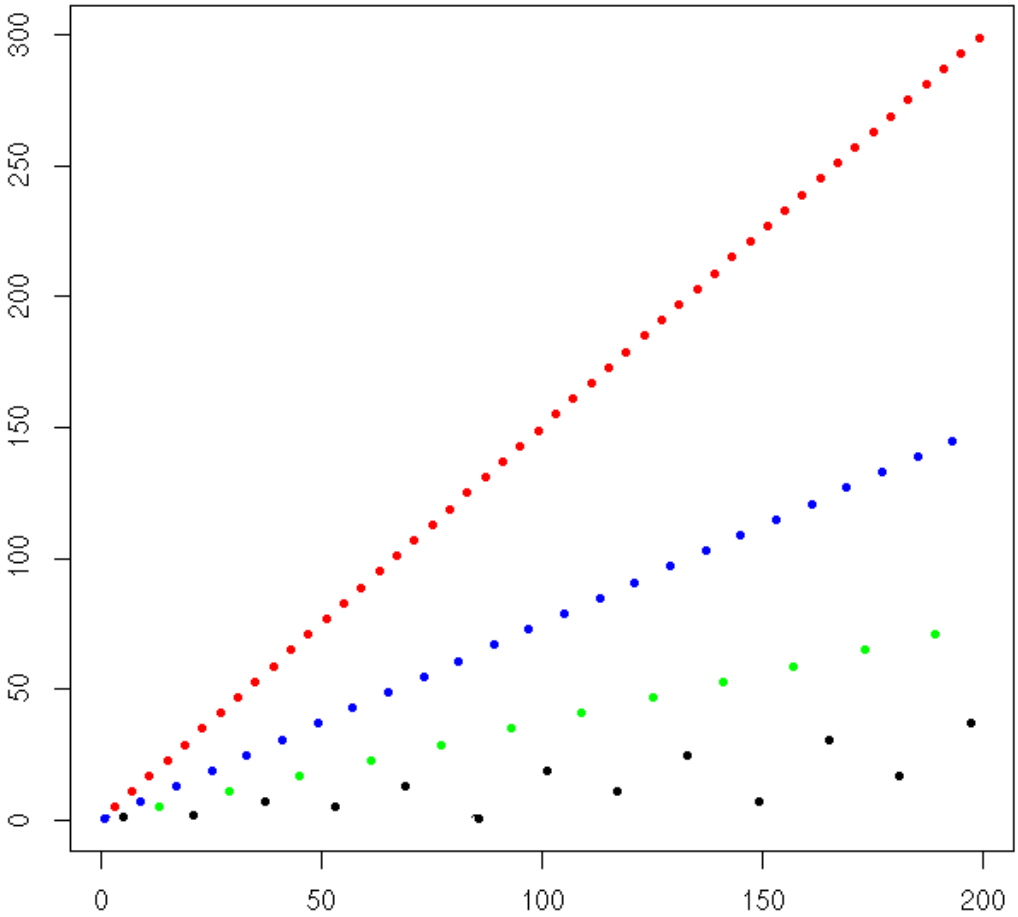



FIGURE 2 – Représentation graphique de $N$

On note que pour $m \equiv 1, 9 \pmod{16}$ on a : $N(m) = (3m + 1)/4$. Des expressions semblables apparaissent dans les autres cas.

## Annexe 3 : Les ensembles $F_s$ et la répartition des prédécesseurs directs

| 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | 5 | | 21 | | 85 | | 341 | | 1365 |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 3 | | 13 | | 53 | | 213 | | 853 | | 3413 | |
| 7 | | 9 | | 37 | | 149 | | 597 | | 2389 | | 9557 |
| 9 | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 7 | | 29 | | 117 | | 469 | | 1877 | | 7509 | |
| 13 | | 17 | | 69 | | 277 | | 1109 | | 4437 | | 17749 |
| 15 | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 11 | | 45 | | 181 | | 725 | | 2901 | | 11605 | |
| 19 | | 25 | | 101 | | 405 | | 1621 | | 6485 | | 25941 |
| 21 | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 15 | | 61 | | 245 | | 981 | | 3925 | | 15701 | |
| 25 | | 33 | | 133 | | 533 | | 2133 | | 8533 | | 34133 |
| 27 | | | | | | | | | | | | |
| 29 | 19 | | 77 | | 309 | | 1237 | | 4949 | | 19797 | |
| 31 | | 41 | | 165 | | 661 | | 2645 | | 10581 | | 42325 |
| 33 | | | | | | | | | | | | |
| 35 | 23 | | 93 | | 373 | | 1493 | | 5973 | | 23893 | |
| 37 | | 49 | | 197 | | 789 | | 3157 | | 12629 | | 50517 |
| 39 | | | | | | | | | | | | |

FIGURE 3 – Les prédécesseurs directs, selon $N$, des nombres impairs

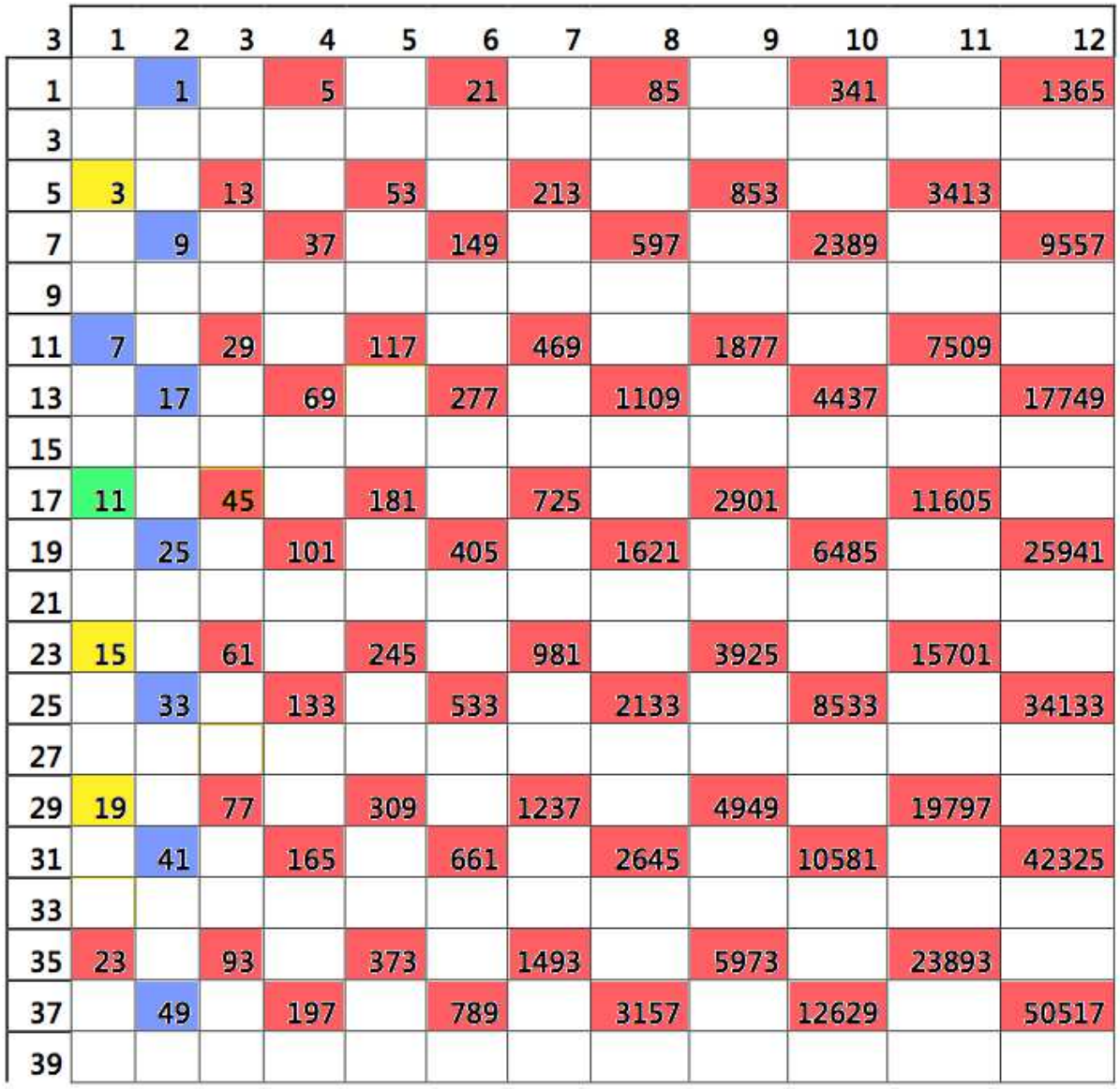
Dans la figure 3 la colonne $s$ contiennent les éléments de $F_s$. Par la fonction $N$ les éléments d'une ligne sont les prédécesseurs directs du label tout à gauche.

En prenant les valeurs (mod 8) on obtient une représentation graphique parlante (figure 4) d'un résultat déjà évoqué qui montre visuellement que la densité de $F_1$ (1e colonne) dans les nombres impairs est de $1/2$, celle de $F_2$ (2e colonne) est de $1/4$.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 3 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | |
| 7 | | 1 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 7 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | |
| 13 | | 1 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 3 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | |
| 19 | | 1 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 7 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | |
| 25 | | 1 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | |
| 27 | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | 3 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | |
| 31 | | 1 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | |
| 33 | | | | | | | | | | | | | |
| 35 | 7 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | |
| 37 | | 1 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | | 5 | |
| 39 | | | | | | | | | | | | | |

FIGURE 4 – Les valeurs  (mod 8) des ensembles $F_s$

## Annexe 4 : Relation entre les partitions $F_s$ et $S_i$



| 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | 5 | | 21 | | 85 | | 341 | | 1365 |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 3 | | 13 | | 53 | | 213 | | 853 | | 3413 | |
| 7 | | 9 | | 37 | | 149 | | 597 | | 2389 | | 9557 |
| 9 | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 7 | | 29 | | 117 | | 469 | | 1877 | | 7509 | |
| 13 | | 17 | | 69 | | 277 | | 1109 | | 4437 | | 17749 |
| 15 | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 11 | | 45 | | 181 | | 725 | | 2901 | | 11605 | |
| 19 | | 25 | | 101 | | 405 | | 1621 | | 6485 | | 25941 |
| 21 | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 15 | | 61 | | 245 | | 981 | | 3925 | | 15701 | |
| 25 | | 33 | | 133 | | 533 | | 2133 | | 8533 | | 34133 |
| 27 | | | | | | | | | | | | |
| 29 | 19 | | 77 | | 309 | | 1237 | | 4949 | | 19797 | |
| 31 | | 41 | | 165 | | 661 | | 2645 | | 10581 | | 42325 |
| 33 | | | | | | | | | | | | |
| 35 | 23 | | 93 | | 373 | | 1493 | | 5973 | | 23893 | |
| 37 | | 49 | | 197 | | 789 | | 3157 | | 12629 | | 50517 |
| 39 | | | | | | | | | | | | |

FIGURE 5 – Répartition de $2\mathbb{N}+1$ selon les ensemble $F_s$ et $S_i$

Dans la figure 3 la colonne $s$ contiennent les éléments de $F_s$. Par la fonction $N$ les éléments d'une ligne ont pour image la valeur du label tout à gauche.

Les éléments des ensembles $S_i$ sont représentés par des couleurs :

- $S_1 = \{2^{2n-1}(4k+1) - 1 \ : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en bleu
- $S_2 = \{2^{2n}(4k+3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en vert
- $S_3 = \{2^{2n-1}(4k+3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en rouge
- $S_4 = \{2^{2n}(4k+1) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en jaune

On voit sur la figure (ce qui se montre d'ailleurs aisément) que :

$F_2 \subset S_1$ , $F_i \subset S_3$ pour $i > 2$, $F_1 \cap S_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2, 3, 4$

Par ailleurs :

- $F_1 \cap S_1 = \{2^{2n-1}(4k+1) - 1 \ : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
- $S_2 \subset F_1$
- $F_1 \cap S_3 = \{2^{2n-1}(4k+3) - 1 \ : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
- $S_4 \subset F_1$

## Annexe 5 : Partition des nombres impairs $(2\mathbb{N}+1)$ selon $N$ : les familles $F_{ij}$

$F_s$ est l'ensemble $m$ des nombres impairs tels que $N(m) = 2^s m'$ où $m'$ est impair. On a :

**s pair** : $F_s = \{\frac{2^s-1}{3} + 2^{s+1}k, k \in \mathbb{N}\}$

*Exemples* :

- $s = 2$ ; $F_2 = \{1, 9, 17, 25, \ldots\}$
- $s = 4$ ; $F_4 = \{5, 37, 69, \ldots\}$
- $s = 6$ ; $F_6 = \{21, 149, \ldots\}$

$N(\frac{2^s-1}{3} + 2^{s+1}k) = 1 + 6k$

**s impair** : $F_s = \{2^s + \frac{2^{s+1}-1}{3} + 2^{s+1}k, k \in \mathbb{N}\} = \{\frac{5\times 2^s-1}{3} + 2^{s+1}k, k \in \mathbb{N}\}$

*Exemples* :

- $s = 1$ ; $F_1 = \{3, 7, 11, 15, \ldots\}$
- $s = 3$ ; $F_3 = \{13, 29, 42, \ldots\}$
- $s = 5$ ; $F_5 = \{53, 117, 181, \ldots\}$

$N(\frac{5\times 2^s-1}{3} + 2^{s+1}k) = 5 + 6k$

Par définition $N(m) = (3m+1)/2^s$ pour $m \in F_s$.

Notation générale : $F_s = \{t_s + km_s, k \in \mathbb{N}\}$

*Proposition* :

1. $m_s = 2^{s+1}$
2. pour $s$ impair $t_s = (5 \times 2^s - 1)/3$ ; pour $s$ pair $t_s = (2^{s+1} - 1)/3$
3. pour $s$ impair : $t_s = t_{s-1} + 3 \times 2^{s-1}$ ; pour $s$ pair : $t_s = t_{s-1} - 2^{s-1}$
4. $t_{2s+1} = 10t_{2s} + 3$

Démonstration du point 4) :

$$10t_{2s} + 3 = 10\frac{2^{2s}-1}{3} + 3 = \frac{10 \times 2^{2s} - 10 + 9}{3} = \frac{5 \times 2^{2s+1} - 1}{3} = t_{2s+1}$$

**QED**

On peut continuer le procédé et chercher $F_{i,j}$ les éléments de $F_i$ dont l'image par $N$ est dans $F_j$. Par exemple : $F_{2,5}$ : éléments $m$ de $F_2$ dont $N(m)$ est dans $F_5$ .

Les éléments de $F_2$ sont de la forme $m = 1 + 8k$. $N(1 + 8k) = 1 + 6k$ doit appartenir à $F_5$ ; donc : $1 + 6k \equiv 53 \pmod{64}$. En développant :

$3k = 26 + 32k'; k' \equiv 2 \pmod 3; k' = 2 + 3k''; 3k = 26 + 32(2 + 3k''); k = 30 + 32k''$

Finalement : $m = 1 + 8k = 1 + 8(30 + 32k'') = 241 + 256k''$ et $F_{2,5} = \{m : m \equiv 241 \pmod{28}\}$

De manière générale : $F_{i,j} = \{m : m = t_{i,j} + km_{i,j}$ avec $k \in \mathbb{N}\}$

Avec : $m_{i,j} = 2^{i+j+1}$

*Proposition (formules pour calculer les $t_{ij}$)* :

Formules pour $t_{1,j}$ et $t_{2,j}$ :

$j$ pair :

$$t_{1,j} \equiv 3 + \frac{8}{9}(2^{j-2} - 2^{j+3} + 2^{2j-1} - 4) \pmod{2^{j+2}}$$

$j \equiv 0 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{16}{9}(2^{j-2} + 2^j + 2^{j+1} - 1) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 2 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{16}{9}(2^{j-2} - 1) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 4 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{16}{9}(2^{j-2} + 2^{j-1} + 2^j - 1) \pmod{2^{j+3}}$$

$j$ impair :

$$t_{1,j} \equiv 3 + \frac{4}{9}(2^{j-1} + 2^{j+1} + 2^{j+2} + 2^{2j} - 8) \pmod{2^{j+2}}$$

$j \equiv 3 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{8}{9}(2^{j+1} + 2^{j-1} - 2) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 1 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{8}{9}(2^{j-1} + 2^j + 2^{j+2} - 2) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 5 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{8}{9}(2^{j-1} + 2^{j+3} - 2) \pmod{2^{j+3}}$$

Récurrence de ligne : $t_{i+2,j} = 4t_{i,j} + 1$

Démonstration : Le calcul suit la méthode utilisée pour le calcul de $F_{2,5}$. Exemple de calcul pour $j$ pair et $j \equiv 2 \pmod 3$ ($j \equiv 2 \pmod 6$)

$t_{2,j} = 1 + 8k$ ; $N(t_{2,j}) = 1 + 6k \in F_j$ ; $1 + 6k = (2^s - 1)/3 + k'2^{s+1}$

$j \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (2^s - 1)/3 \equiv 1 \pmod{()3}$ et donc

$1 \equiv 1 - k' \pmod 3$ ; $k' \equiv 0 \pmod 3$

$1 + 6k = (2^s - 1)/3 + 3k''2^{s+1}$

$6k = (2^s - 4)/3 + 3k''2^{s+1}$

$2k = (2^s - 4)/9 + k''2^{s+1}$

$t_{2,j} = 1 + (16/9)(2^{s-2} - 1) + k''2^{s+3}$

La formule de récurrence découle de la propriété d'invariance de $N$ par $4m + 1$.
**QED**

| | $F_{.1}$ | $F_{.2}$ | $F_{.3}$ | $F_{.4}$ | $F_{.5}$ | $F_{.6}$ | $F_{.7}$ | $F_{.8}$ | $F_{.9}$ | $F_{.10}$ | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 7 | 11 | 19 | 3 | 35 | 99 | 483 | 739 | 1251 | 227 | 3 (4) |
| $F_2$ | 9 | 1 | 17 | 49 | 241 | 369 | 625 | 113 | 1137 | 3185 | 1 (8) |
| $F_3$ | 29 | 45 | 77 | 13 | 141 | 397 | 1933 | 2957 | 5005 | 909 | 13 (16) |
| $F_4$ | 37 | 5 | 69 | 197 | 965 | 1477 | 2501 | 453 | 4549 | 12741 | 5 (32) |
| $F_5$ | 117 | 181 | 309 | 53 | 565 | 1589 | 7733 | 11829 | 20021 | 3637 | 53 (64) |
| $F_6$ | 149 | 21 | 277 | 789 | 3861 | 5909 | 10005 | 1813 | 18197 | 50965 | 21 (128) |
| $F_7$ | 469 | 725 | 1237 | 213 | 2261 | 6357 | 30933 | 47317 | 80085 | 14549 | 213 |
| $F_8$ | 597 | 85 | 1109 | 3157 | 15445 | 23637 | 40021 | 7253 | 72789 | 203861 | 85 |
| $F_9$ | 1877 | 2901 | 4949 | 853 | 9045 | 25429 | 123733 | 189269 | 320341 | 58197 | 853 |
| $F_{10}$ | 2389 | 341 | 4437 | 12629 | 61781 | 94549 | 160085 | 29013 | 291157 | 815445 | 341 |
| $F_{11}$ | 7509 | 11605 | 19797 | 3413 | 36181 | 101717 | 494933 | 757077 | 1281365 | 232789 | 3413 |
| $F_{12}$ | 9557 | 1365 | 17749 | 50517 | 247125 | 378197 | 640341 | 116053 | 1164629 | 3261781 | 1365 |
| $F_{13}$ | 30037 | 46421 | 79189 | 13653 | 144725 | 406869 | 1979733 | 3028309 | 5125461 | 931157 | 13653 |

TABLE 3 – Table des $t_{i,j}$ (offset)

Les ensembles $F_s$ comme les ensembles $F_{i,j}$ fournissent une partition des nombres entiers impairs en progressions arithmétiques infinies de raison les puissances de 2.

## Annexe 5a : Suites basées sur $x + d$ $d$ impair et $3x + 3$

### Suites basées sur la fonction de récurrence $x + d$ avec $d$ impair

La fonction est définie de façon habituelle par :

$$S = S_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (m+d)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

***Proposition*** : (i) $S(d) = d$ ; (ii) $S(m) < d$ si $m < d$ ; (iii) $S(m) < m$ si $m > d$

Démonstration :

(i) $S(d) = (d + d)/2 = d$

(ii) $S(m) = (m + d)/2 < 2d/2 = d$ si $m < d$

(iii) $m > d \Rightarrow 2m > m + d \Rightarrow S(m) \leq (m + d)/2 < m$

**QED**

Conséquence : La suite $(S_d^{(k)}(m))$ est bornée par $\max(d, m)$. Toutes les trajectoires aboutissent donc sur un cycle.

Exemple : $x + 57$

La trajectoire de 1 est un cycle :

(1, 29, 43, 50, 25, 41, 49, 53, 55, 56, 28, 14, 7, 32, 16, 8, 4, 2, 1, ...)

La trajectoire de 3 se termine par le cycle sur 5 :

(3, 30, 15, 36, 18, 9, 33, 45, 46, 23, 40, 20, 10, 5, ...)

La trajectoire de 5 est un cycle :

(5 31 44 22 11 34 17 37 47 52 26 13 35 46 23 40 20 10 5)

Cet exemple montre aussi l'insuffisance de l'heuristique développée à la page 17.

### Suites basées sur la fonction de récurrence $3x + 3$

$$N(m) = \frac{3m + 3}{2^{\nu(3m+3)}}$$

Cette suite est intéressante, proche de $3x+1$ (vraisemblablement convergente vers 3 pour toute valeur de départ) mais avec des paramètres (figure 6) plus aisément maîtrisables. Toutes les valeurs de la suite, à l'exception du germe, sont évidemment des multiples de 3 (le tableau des prédécesseurs équivalent à celui de l'annexe 3, n'a des lignes que face aux multiples de 3, seuls les multiples de 3 ont des prédécesseurs).

Le tableau de la figure 6 réparti l'ensemble des germes, d'une part en les ensembles $F_s = \{m : \nu(m) = s\}$ (les colonnes) et d'autre part en les ensembles $S_i$ (à ne pas les confondre avec ceux de l'annexe 4). Tous les germe de $S_m$ génèrent la même suite (représentée tout à droite du tableau).

Le tableau est engendré par $s_{0,0} = 1$ et les deux relations de récurrences :

| n / m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | m | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | ... | $s_{0,m}$ | $S_0$ | 3, 3, ... |
| 1 | 5 | 11 | 23 | 47 | 95 | 191 | ... | $s_{1,m}$ | $S_1$ | 9, 15, ... |
| 2 | 9 | 19 | 39 | 79 | 159 | 319 | ... | $s_{2,m}$ | $S_2$ | 15, 3, ... |
| 3 | 13 | 27 | 55 | 111 | 223 | 447 | ... | $s_{3,m}$ | $S_3$ | 21, 33, ... |
| 4 | 17 | 35 | 71 | 143 | 287 | 575 | ... | $s_{4,m}$ | $S_4$ | 27, 21, ... |
| 5 | 17+4 | 35+8 | 71+16 | 143+32 | 287+64 | 575+128 | ... | $s_{5,m}$ | $S_5$ | 33, 51, ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| n | 4n+1 | +2(2n+1) | $+2^2$(2n+1) | $+2^3$(2n+1) | $+2^4$(2n+1) | $+2^5$(2n+1) | ... | $s_{n,m}$ | $S_n$ | [3(4n+2)] |
| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | ... | $F_{m+1}$ | | |

FIGURE 6 – Découpages de $2\mathbb{N}+1$ selon $3x+3$

– $s_{n,m} = s_{n-1,m} + 2^{m+2}$
– $s_{n,m} = s_{n,m-1} + 2^m(2n+1)$

Mais il est facile d'obtenir une expression simple pour $s_{n,m}$ :

$$s_{n,m} = 4n+1+2(2n+1)+2^2(2n+1)+\ldots+2^m(2n+1) = 4n+1+2(2n+1)(2^m-1)$$

Finalement : $s_{n,m} = 2^{m+1}(2n+1)-1$

Par ailleurs,

$$N^{(q)}(x) = \frac{3^q x + 3^q + 3^{q-1}2^{k_1} + 3^{q-2}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{q-1}}}{2^s}$$

avec $k_i = \nu(N^{(i-1)}(m)$ et $s = k_1 + \ldots + k_q$

Pour démontrer, par récurrence, la conjecture $3x+3$, il « suffirait » de montrer que pour tout $n$ il existe $q$, $(k_i)_{i=1,\ldots,q}$ , $m$ et $n' < n$ tels que :

$$N^{(q)}(4n+1) = s_{n',m}$$

Exemple : La suite de $13 = 4 \cdot 3 + 1$ aboutit sur un élément $s_{n',m} \in S_{n'}$ avec $n' < 3$

Dans ce cas, $n = 3$, la solution est : $q = 4$, $n' = 2$, $m = 2$ et $(k_i) = (1,1,1,2)$ $(s = 5)$.

En effet : $T^{(4)}(13) = 39 = s_{2,2}$.

## Annexe 6 : Illustration des prédécesseurs de 1

Cette figure provient de la page `http://www.jasondavies.com/collatz-graph/` où elle est produite de façon dynamique.

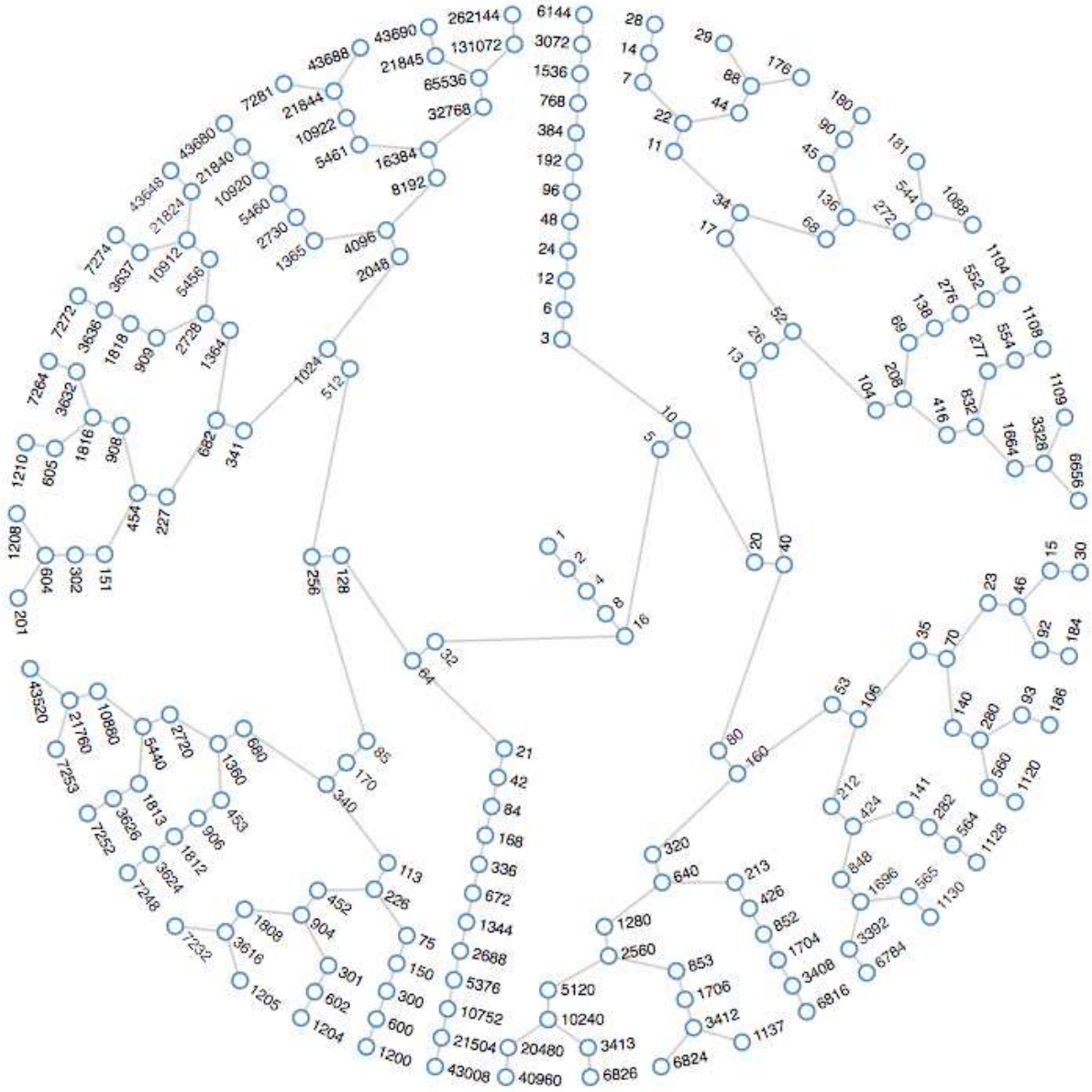



FIGURE 7 – Prédécesseurs de 1

## Annexe 7 : Quelques cycles pour $3x + 13$

| $n$ | $s$ | $(k_i)$ | Cycle |
|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 1,1,1,1,4 | 211 323 491 743 1121 211 |
| 5 | 8 | 1,1,1,3,2 | 259 395 599 905 341 259 |
| 5 | 8 | 1,1,1,2,3 | 227 347 527 797 601 227 |
| 5 | 8 | 1,1,2,2,2 | 283 431 653 493 373 283 |
| 5 | 8 | 1,2,1,2,2 | 319 485 367 557 421 319 |

TABLE 4 – Quelques cycles entiers et primitifs pour $3x + 13$

Le théorème de Dhiraj ([2]) permet de trouver les 3 premiers. Les 4 autres sont trouvés facilement en utilisant la formule donnant un point de retour.

Si $n \leq s$ entiers tels que $2^s - a^n = b$ (ou diviseur de $b$) alors toutes les suites $(k_i)$ de longueur $n$ et de somme $s$ donnent lieu à un cycle entier de $ax + b$. Deux suites de $(k_i)$ différentes à une permutation circulaires près donnent des cycles différents. Ces cycles sont primitifs puisque 13 premier ne divise pas les éléments du cycle (si c'était le cas on aurait un cycle non trivial pour $3x + 1$.

Sinon le cycle est entier ou rationnel selon que $b \times num/(2^s - a^n)$ est entier ou non. $num$ étant un nombre entier (somme de produit de puissances de 2 et de puissances de $a$).

Quelques outils en R ou Prolog [52] ont été créés pour générer des suites de Collatz ou de calculer quelques invariants.

Exemples :

Le commande R 'SyrNd(283,13,10)' calcule 10 valeurs successives de la suite $N$-Collatz générée par $3x + 13$ et les exposants $(k_i)$ de la puissance de 2 utilisée comme dividende à chaque étape.

Résultat :

[[1]] [1] 283 431 653 493 373 283 431 653 493 373

[[2]] [1] 0 1 1 2 2 2 1 1 2 2

La commande R 'pt.retour(3,13,c(1,1,2,2,2))' donne comme résultat : 283 13, valeurs à partir desquelles un point de retour pour $3x + 13$ et $(k_i)$ peut être calculé : $x_0 = 13 * 283/13 = 283$

En SWI-Prolog la commande 'syracuseQR(S,Q,R,N,Len)' calcule 'Len' termes de la suite $Qx + R$ de type 'S' d'origine 'N'.

52. disponibles chez les auteurs.

# Annexe 8 : FRACTRAN

## Principe

Un programme FRACTRAN peut être vu comme le fonctionnement d'une machine à registre dont les mémoires sont constituées des exposants des nombres premiers en lesquels se décomposent l'état courant n.

Cette technique reprend l'idée utilisée par Gödel où un nombre naturel $n$ peut encoder un nombre arbitraire de nombres naturels variables. La valeur de chaque variable est l'exposant d'un nombre premier apparaissant dans la décomposition de $n$ en facteurs premiers. Par exemple, l'entier $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ représente l'état de 3 variables $v2$, $v3$ et $v5$ valant respectivement 2, 1 et 1. Toutes les autres variables potentielles ($v7$, $v11$, etc.) ont 0 pour valeur.

Un programme FRACTRAN est une liste ordonnée de fractions irréductibles (on peut aussi utiliser un programme constitué de plusieurs lignes voir Conway, 1972 [33]). Chaque fraction représente une instruction de test et de modification des valeurs des variables. Appliquer un programme à une entrée $n$ c'est recherche la première fraction de la liste telle que son dénominateur divise $n$. Le produit de $n$ par la fraction constitue le nouveau nombre (entier) auquel on applique le même processus. Si aucune fraction ne convient, le programme s'arrête.

Par exemple $f_1 = \frac{21}{20} = \frac{3\times7}{2^2\times5^1}$ teste si $v2$ et $v5$ sont supérieures ou égales respectivement à 2 et 1 auquel cas la division est effectuée (ce qui revient à une soustraction au niveau des exposants, c'est-à-dire des valeurs des variables) puis il y a multiplication par 3 et 7 ce qui revient à ajouter 1 aux variables $v3$ et $v7$. Par exemple :

$$60 \times f_1 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times \frac{3 \times 7}{2^2 \times 5^1} = 3^2 \times 7^1$$

Ainsi les seules instructions de FRACTRAN sont :
– les tests conjugués avec des décrémentations
– les incrémententations
Il n'y a pas de test indépendamment de décrémentations. Il n'est pas possible, par exemple, de tester directement si une variable est nulle ou pas.

## Exemple

Exemple de programme : $(\frac{3}{10}, \frac{4}{3})$

Si on applique ce programme à 14, la procédure s'arrête immédiatement. Si on l'applique à 15 on obtient successivement 20, puis 6, puis 8 et la procédure s'arrête.

Le programme d'addition : $(\frac{2}{3})$ en partant de $2^a \times 3^b$ on obtient $2^{a+b}$ .

## FRACTRAN et vector game

Un *vector game* est donné par par une liste finie de vecteurs entiers (le programme), tous de la même dimension. Le jeu part d'un vecteur $x$ de composantes entières positives. On

additionne à $x$ le premier vecteur de la liste qui préserve la « positivité »de toutes les composantes.

Le processus se répète autant de fois que possible.

Exemple : En partant de x = (a,b) le programme contentant une seule instruction (1,-1) on abouti à (a+b, 0).

On voit facilement en numérotant les composants des vecteurs par la suite des nombres premiers qu'on passe facilement d'un *vector game* à un programme FRACTRAN et vice-versa.

## Annexe 9 : Les nombres p-adiques

### Les nombres 2-adiques

Il y a plusieurs façons de définir les nombres 2-adiques. On peut par exemple considérer $\mathbb{Q}$ avec la distance donnée par la norme $|2^k(n/m)| = 2^{-k}$ où $n$ et $m$ sont deux entiers impairs. Exemple : $|8| = 1/8$, $|3/20| = 4$. Cette distance est ultramétrique.

Le corps des nombres 2-adiques $\mathbb{Q}_2$ est le complété de Cauchy de $\mathbb{Q}$ avec la norme 2-adique. $\mathbb{Z}_2$ est l'ensemble des nombres de norme inférieure à 1 (boule unité compact de $\mathbb{Q}_2$). Il n'est pas difficile de vérifier que tout élément de $\mathbb{Z}_2$ peut être représenté par une série (développement de Hensel) :

$\alpha = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots$ avec les $a_i$, 2-digits de $\alpha$ valant 0 ou 1. On peut écrire simplement $(a_0, a_1, \ldots)$.

Pour un élément de $\mathbb{Q}_2$, la série comprend un nombre fini de puissances négatives de 2.

L'addition et la multiplication de $\mathbb{Q}$ s'étendent aux nombres 2-adiques et s'exécutent en étendant de façon naturelle l'addition et la multiplication des sommes finies (qui correspondent à $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_2$) aux sommes infinies.

Exemples :

Développement de Hensel de 3 : $3 = 1 + 2$ ou $(1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$

Développement de Hensel de -1 : $\sum_{i \geq 0} 2^i$ ou $(1, 1, 1, \ldots)$

Développement de Hensel de $1/3$ : $1 + \sum_{i \geq 0} 2^{2i+1}$

Développement de Hensel de -1/3 : $\sum_{i \geq 0} 2^{2i+1}$

On peut vérifier que $3 \times 1/3 = 1$ :

$(1, 1, 0, 0, 0, \ldots) \times (1, 1, 0, 1, \ldots) = (1, 1, 0, 1, \ldots) + (0, 1, 1, 0, 1, \ldots) = (1, 0, 0, 0, \ldots)$ QED

Une base d'ouverts autour de $\alpha$ est donnée par les disques $B_k(\alpha) = \{\beta : |\beta - \alpha| <= 2^{-k}\} = \{\beta : \beta \equiv \alpha \pmod{2^k}\}$ ($\beta \equiv \alpha \pmod{2^k}$ signifie que les 2-digits de $\alpha$ et $\beta$ sont égaux jusqu'au k-1 nième.

Une mesure de Haar (invariante pour l'addition) est définie par $\mu_2(B_k(\alpha)) = 2^{-k}$. En particulier $\mu_2(\mathbb{Z}_2) = 1$.

### Les nombres p-adiques

Il se définissent de la même manière en utilisant $p$ nombre premier.

Dans $\mathbb{Q}_p$ : $-1 = \sum_{i=0}^{\infty} (p-1)p^i$.

L'ensemble des fractions de $\mathbb{Q}$ dont le dénominateur est premier avec $p$ est contenu dans $\mathbb{Z}_p$.

## Annexe 10 : Discussion sur le Net

On trouve dans plusieurs forums des discussions relatives à la suite de Syracuse. Ce sujet mériterait une étude spéciale liée aux représentations des mathématiques chez le *grand-public*. Voici quelques extraits assez significatifs.

### Une annonce de « démonstration » [53]

Himlaya : Bonjour. J'écris sur ce forum parce que je pense, après bien du mal, avoir réussi à démontrer la conjecture de Syracuse (je possède une licence mathématiques). Cependant je ne peut pas m'empêcher de penser que je me suis peut-être trompé quelque part. Qui plus est je ne sais pas comment m'y prendre pour publier ma démonstration avec confiance. Quelqu'un pourrait-il me renseigner ?... Merci d'avance pour vos réponses. (31.01.09)

Modo Ferox : Point culminant de la chaîne de l'Himalaya...Il y a déjà eu Titus (à qui je n'ai toujours pas répondu) qui pensait avoir démontré cette conjecture : as-tu lu cette discussion : http ://www.bibmath.net/forums/viewtopic.php ?id=2232 ?

Qu'entends-tu par (..) publier ma démonstration avec confiance ? Que crains-tu ?

* Qu'on ne te prenne pas au sérieux ? Là, détrompe-toi, même si tu dois être bien conscient qu'a priori, on est dans le doute, lequel doute est salutaire en maths. As-tu déjà soumis ta démo à quelqu'un pour qu'il la lise avec un oeil différent de celui de Chimène ?

* Qu'on te vole ta découverte s'il s'avère que tu mérites la médaille FIELDS ? Dans ce cas, faire un double de ta démo, la déposer devant huissier chez un notaire qui cachètera l'enveloppe...

Sinon, vas-y lance-toi... A te lire (31.01.09)

(La démonstration a été publiée mais n'est plus disponible)

### Une autre annonce de « démonstration » [54]

Alkat : Voici ma demonstration cfr. piece jointe et si vous avez quelque pour commenter mais poliment. Pour trouver ce fichier veuillez consulter hal.archives-ouvertes.fr

Deedee81 : Salut,

C'est particulièrement court. Ou ce sera vite démonté (*) ou alors c'est sacrément génial.

(*) je n'ai malheureusement plus le temps aujourd'hui et je parie une choucroute que ce sera fait par quelqu'un d'autre avant demain :)

EDIT en matière de politesse : bienvenue sur Futura, et n'oublie pas toi-même de dire bonjour ! ! ! ! (voir point 2 de la charte du Forum).

Pelkin : Bonjour,

53. http ://www.bibmath.net/forums/viewtopic.php ?id=2384
54. http ://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/682244-preuve-de-conjecture-de-syracuse.html

Tu parles, cela foire déjà à la deuxième ligne avant même que la démonstration ne démarre, déjà pas foutu d'écrire correctement la conjecture.

gg0 : Bonjour Alkat,

Une démonstration est faite pour convaincre. Donc elle doit être compréhensible par ceux auxquels elle s'adresse. A qui est adressée cette démonstration ? Autrement dit, qui sait de quoi tu parles au début avec tes droites "qui ne contiennent que des nombres premiers" ?

Car pour le commun des mortels, et même pour le mathématicien de base, une droite contient des points, pas des nombres. Même premiers.

Donc, pour que tu sois compris, il va falloir commencer par définir les objets dont tu parles. Employer des mots du vocabulaire mathématique n'est pas faire des mathématiques.

Dernière chose : "par généralisation ..." (fin de la "démonstration") est un moyen classique de ne rien prouver. Soit on sait généraliser, et on le prouve par un raisonnement et/ou un calcul, soit on n'a rien fait.

Mais comme ce qui précède est incompréhensible (pourquoi les triangles sont semblables ? Ce n'est pas vrai sur le dessin. Quel rapport avec la suite de Syracuse ? etc.), ce n'est même pas grave : Il n'y a aucune démonstration.

Désolé !

Mediat : Bonjour,

Tout a été dit, soit alkat publie une nouvelle version convaincante, prenant en compte les différentes remarques faites jusqu'ici, soit ce fil sera fermé et vite oublié.

Médiat, pour la modération.

Alkat : Merci pour la lucidite, la cathete du plus petit triangle est 1,5 et les coordonnees sont parties faisantes du cote du triangle, dans ma graduation 0 n'existe pas cfr dessin, #univers la cotes sont proportionnels avec pour incertitude k+ ou - epsilon avec epsilon etant dans l'intervalle ferme de 0 et 1 et les 3 proprietes restantes de la simulitude des triangles sont respectees

gg0 : Tu racontes n'importe quoi !

On a tous vu que tes axes commencent à 1. Les côtés de triangles semblables sont proportionnels, ce n'est pas le cas quand ces côtés mesurent 4-1 et 2-1 pour l'un et 26-1 et 17-1 pour l'autre. Tu peux baratiner tant que tu veux, ça ne prouve pas quoi que ce soit. Les preuves mathématiques sont vérifiables, on y exclut donc toute explication non mathématique. Toi, tu n'as encore donné aucune explication mathématique.

Ne t'étonnes pas si ce sujet est fermé : Tu n'as rien fait pour être pris au sérieux. Sur certains forums mathématiques, tu aurais été blessé depuis longtemps par les réactions des gens sérieux. Ta demande " commenter mais poliment" montre que tu crains les réactions des autres. Mais pas assez pour essayer d'être sérieux toi-même.

Médiat : Ite missa est !

Si alkat se conforme à ma demande du message #12, il peut m'envoyer un Message privé, si cela en vaut la peine je rouvrirai ce fil avec joie.

Médiat pour la modération

### Devenez célèbre avec la conjecture de Syracuse ! [55]

Belane : La conjecture de Syracuse est un problème mathématique dont l'énoncé est enfantin. Pourtant, personne n'a jamais pu confirmer ou infirmer cet énoncé.

La résolution de la conjecture de Poincaré par Grégory Perelman lui avait valu la médaille Fields et les 10 000 euros qui vont avec, qu'il avait d'ailleurs refusés en bloc. Alors, on ne sait jamais : tentez votre chance avec la conjecture de Syracuse !

(suit l'énoncé de la conjecture de Syracuse)

### Conjecture de Syracuse démontrée ? [56]

Voici un échange bon enfant entre deux internautes qui semblent se connaître (ne serait-ce que de façon virtuelle). Des messages intermédiaires ont été supprimés.

babsgueye : Salut.

Je donne ici les grandes lignes de ma démonstration de la conjecture de Syracuse.

La suite de Syracuse d'un entier positif est définie de la manière suivante : on part de cet entier plus grand que zéro, s'il est pair, on le divise par deux ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun dépend de son précédent.

La conjecture de Syracuse dit que quelque soit l'entier n, la suite de Syracuse de n atteint 1 à partir d'un certain rang et qu'après que le nombre 1 ait été atteint, la suite des valeurs (1, 4, 2, 1, 4, 2,...) se répète indéfiniment en cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

En fait j'ai montré que de n'importe quelle suite de Syracuse, on peut extraire une sous-suite décroissante. Cette sous-suite de nombres positifs étant minorée par 1, va donc l'atteindre et par définition de Syracuse, décrit le cycle trivial.

Pour n pair : la suite extraite est (U3k+1)k.

Pour n impair : la suite extraite est (U3k+2)k.

Qu'en pensez-vous ?

GaBuZoMeu : Que c'est faux, bien sûr.

babsgueye : T'es trop @GBZM. C'est la réponse que j'attendais de toi. Mais vérifie un peu.

GaBuZoMeu : Ta première affirmation (pour n pair) entraîne la deuxième (pour n impair) : en effet, dans une "suite de Syracuse", tout nombre impair est immédiatement suivi par un nombre pair.

Pour montrer que tes affirmations sont fausses, il suffit de montrer que la deuxième est fausse.

Tu n'as pas précisé si tu numérotes la suite à partir de 0 ou de 1. Peu importe, je vais donner un contre-exemple qui marche pour les deux cas.

Tu affirmes que la sous-suite U2,U5,U8,U11,... est décroissante.

55. http ://www.yabiladi.com/forum/devenez-celebre-avec-conjecture-syracuse-1-4763161.html
56. http ://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php ?43,1181897,1182461

Considérons la suite de Syracuse 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, ...

Elle commence bien par un nombre impair.

Supposons que tu commences à numéroter à partir de 0 : U0=15 et U2=23<U5=106. Pas très décroissant.

Supposons que tu commences à numéroter à partir de 1 : U1=15 et U5=35<U8=160. Pas très décroissant.

J'ai donc prouvé ma première déclaration : "C'est faux, bien sûr".

babsgueye : Pour cette fois t'as effectivement raison @GBZM ! J'ai laissé tomber les dénominateurs dans mes calculs. Merci. ça me semblait quand même trop facile pour résister tout ce temps !

Je vais quand même te dire sur ce fil que j'ai démontré La Conjecture de Legendre avec la fameuse diophantienne 2kk' + k + k'..

GaBuZoMeu : N'importe quoi, comme d'habitude ...

babsgueye : ha ha... ! Je fais mon apprentissage à Latex..pour bien te le sortir. Tu trouvera ) redire je m'y attend.

Dom : Heu, juste une question, puis-je raconter n'importe quoi dans ce fil de discussion ?

ev : Voila une de tes conjectures qui pourrait bien se vérifier.

e.v.

[Aucune conjecture n'ayant été montrée, je ferme ce fil. –JLT]