



HAL
open science

Solveur de type Godunov pour simuler les écoulements turbulents compressibles

Alain Forestier, Jean-Marc Hérard, Xavier Louis

► **To cite this version:**

Alain Forestier, Jean-Marc Hérard, Xavier Louis. Solveur de type Godunov pour simuler les écoulements turbulents compressibles. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 1997, 324 (8), pp.919-926. 10.1016/S0764-4442(97)86969-8 . hal-01579899

HAL Id: hal-01579899

<https://hal.science/hal-01579899>

Submitted on 8 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Solveur de type Godunov pour simuler les écoulements turbulents compressibles

Alain Forestier, Jean-Marc Hérard, Xavier Louis

► **To cite this version:**

Alain Forestier, Jean-Marc Hérard, Xavier Louis. Solveur de type Godunov pour simuler les écoulements turbulents compressibles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, Elsevier, 1997, 324 (8), pp.919-926. hal-01579899

HAL Id: hal-01579899

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01579899>

Submitted on 8 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Solveur de type Godunov pour simuler les écoulements turbulents compressibles

Alain FORESTIER, Jean-Marc HÉRARD et Xavier LOUIS

A. F. et X. L. : CEA Cadarache, DER/SERA/LTME, 13108 Saint-Paul-lez-Durance

J.-M. H. : EDF, Direction Études et Recherches,

Département Laboratoire National d'Hydraulique, 6, quai Watier, 78400 Chatou.

Résumé.

On présente ici un solveur de type Godunov qui permet la simulation d'un système hyperbolique non conservatif sur des maillages non structurés. Le système provient du modèle de turbulence compressible $K - \varepsilon$. On présente l'inégalité d'entropie associée au système considéré et la solution du problème de Riemann unidimensionnel obtenue en connectant les états par des relations de saut approchées à travers les discontinuités.

A Godunov type solver for turbulent compressible flows

Abstract.

We present here a Godunov type solver which enables us to compute a non conservative hyperbolic system on unstructured meshes. The convective system comes from the standard turbulent compressible $K - \varepsilon$ model. An entropy inequality is given first; then the solution of the associated one dimensional Riemann problem is given, using approximate jump conditions to connect states through discontinuities.

Abridged English Version

We examine the non conservative hyperbolic system arising from the $K - \varepsilon$ turbulent compressible model (see Equations (1)-(12), numbers refer to the French version) arising from Favre's averaging technique. Variables ρ , U , P , and E denote respectively the mean density, mean velocity, mean pressure, and mean total energy; $K = \rho \overline{u''_i u''_i} / 2$ and ε represent the turbulent kinetic energy and the turbulent dissipation. The state law is given by (9). We set $\mathbf{Z}^t = (\rho, \rho U, \rho V, \rho W, E, K, \varepsilon)$ and get an entropy inequality (see proposition II). We also set $T = \rho^{-1} P$, $S_{i,j} = U_{i,j} + U_{j,i}$; the entropy-entropy flux pair $(\eta(\mathbf{Z}), f_{\eta}^i(\mathbf{Z}))$ is given by (13). Governing equations of the non conservative system are ((17)-(21)). The 1-wave and 5-wave are GNL fields. Other waves are Linearly Degenerate. Riemann invariants are detailed in (22)-(26) (setting: $\eta = 1 + \frac{2}{3} C_{\varepsilon_1}$, and $s = P \rho^{-\gamma}$). We introduce standard notations: $\bar{\phi} = (\phi_G + \phi_D) / 2$, $[\phi] = \phi_D - \phi_G$, where ϕ_G et ϕ_D represent the left and right states on each side of a travelling discontinuity. We consider approximate jump conditions ((27)-(28)) (σ denotes the speed of the discontinuity). It may be shown that rarefaction curves and shock curves (see (30)-(31))

are C^2 connected (see [12]). Even more, the entropy inequality (29) enables to check that $[U] < 0$ through shocks. Thus, we may examine the Cauchy problem arising from (17)-(21) and the initial data:

$$W(x < 0, t = 0) = W_L = (\rho_L, \rho_L U_L, E_L, K_L, \varepsilon_L),$$

$$W(x > 0, t = 0) = W_R = (\rho_R, \rho_R U_R, E_R, K_R, \varepsilon_R).$$

PROPOSITION. – *The one dimensional Riemann problem associated with (17)-(21) and jump conditions (27-28) admits a unique entropy-consistent solution with positive density provided that:*

$$U_R - U_L < X_L + X_R.$$

setting $c^2 = \gamma P/\rho + 10 K/(9\rho)$ and

$$X_i = \int_0^{\rho_i} \frac{c'(\rho, \varepsilon, K\rho^{-5/3})}{\rho} d\rho \quad \text{with } i = L \text{ or } R.$$

The mean pressure P and the turbulent kinetic energy K remain positive in the (x, t) plane.

A numerical Godunov-type scheme was implemented in a two-dimensional framework, on unstructured meshes. The one-dimensional Finite-Volume scheme is detailed in (33)-(38). A non conservative version of the Roe-type scheme has also been defined in [7] and compared with the Godunov-type scheme. A numerical computation is displayed in figure 1.

Introduction

On s'intéresse à la modélisation numérique des écoulements turbulents compressibles à forte dominante convective, en simulant le système de turbulence compressible à deux équations, appelé modèle $K - \varepsilon$ (voir [1], [2] et [3]), qui est basé sur une formulation en moyenne de Favre (voir [4]). Dans le cadre de la méthode des Éléments Finis, une proposition a été faite dans [5] pour aborder la résolution des modèles de turbulence compressible à une ou deux équations. Dans le cadre des méthodes de Volumes Finis, deux propositions distinctes ont été formulées dans [2] et [6], la dernière étant basée sur la similitude du pseudo-système convectif associé au modèle $K - \varepsilon$ et du système des équations d'Euler multi-espèces (voir également [3]). On s'intéresse ici à l'analyse et au traitement numérique du système complet de convection associé à ce système qui est non conservatif, et on donne la solution du problème de Riemann, pour un choix de relations de saut approchées. Un résultat numérique de tube à choc par un schéma de type Godunov est présenté.

I. Le modèle de turbulence compressible

Le modèle continu choisi pour décrire les évolutions du fluide monophasique en état d'agitation turbulente est le système à deux équations $K - \varepsilon$. Il est présenté ici en introduisant l'énergie cinétique turbulente $K = \overline{\rho u_i'' u_i''} / 2$, la densité moyenne ρ , la vitesse moyenne U , l'énergie totale moyenne E et la viscosité turbulente μ_t :

$$(1) \quad (\rho)_{,t} + (\rho U)_{,x} = 0,$$

$$(2) \quad (\rho U)_{,t} + \left(\rho U_i U_j + \left(P + \frac{2K}{3} \right) \delta_{ij} \right)_{,j} = -(\tau_{ij}^v)_{,j},$$

$$(3) \quad (E)_{,t} + (U_j E)_{,j} + \left(U_i \left(P + \frac{2K}{3} \right) \delta_{ij} \right)_{,j} = -(U_i \tau_{ij}^v)_{,j} - (\Phi_j^E)_{,j},$$

$$(4) \quad (K)_{,t} + (KU_i)_{,i} + \frac{2}{3} K(U_i)_{,i} = S_K - (\phi_i^K)_{,i},$$

en considérant les relations de fermeture :

$$(5) \quad \tau_{ij}^v = -\mu_{\text{eff}} \left(U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} U_{1,1} \delta_{ij} \right),$$

$$(6) \quad \mu_{\text{eff}} = \mu_{\text{lam}} + \mu^t \equiv \mu_{\text{lam}} + C_\mu \frac{K^2}{\epsilon},$$

$$(7) \quad S_K = \frac{\mu^t}{2} \left(U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} U_{1,1} \delta_{ij} \right) (U_{i,j} + U_{j,i}) - \epsilon \equiv \pi - \epsilon,$$

$$(8) \quad \phi_i^K = -\sigma_K (\rho^{-1} K)_{,i}; \quad \phi_i^E = \phi_i^K - \sigma_E (\rho^{-1} P)_{,i},$$

(voir [1], [2], [3] et [5]). La loi d'état moyennée des gaz parfaits (P désigne la pression moyenne) est :

$$(9) \quad P = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho U_j U_j - K \right).$$

La dissipation visqueuse ϵ associée au mouvement fluctuant est solution de :

$$(10) \quad (\epsilon)_{,t} + (\epsilon U_i)_{,i} + \frac{2}{3} C_{\epsilon 1} \epsilon (U_i)_{,i} = S_\epsilon - (\phi_i^\epsilon)_{,i}.$$

Le terme source S_ϵ et le flux diffusif turbulent associés s'écrivent :

$$(11) \quad S_\epsilon = \frac{\epsilon}{K} (C_{\epsilon 1} \pi - C_{\epsilon 2} \epsilon); \quad \phi_i^\epsilon = -\sigma_\epsilon (\rho^{-1} \epsilon)_{,i}.$$

Les valeurs classiques, issues de la modélisation en situation incompressible, sont :

$$(12) \quad C_{\epsilon 1} = 1.44; \quad C_{\epsilon 2} = 1.92; \quad C_\mu = 0.09.$$

Les fonctions σ_E , σ_K , σ_ϵ doivent être positives.

II. Caractérisation entropique

On pose : $\mathbf{Z}^t = (\rho, \rho U, \rho V, \rho W, E, K, \epsilon)$ et on introduit le couple (entropie, flux d'entropie) :

$$(13) \quad \eta(\mathbf{Z}) = -\rho \text{Log}(P \rho^{-\gamma}), \quad f_\eta^i(\mathbf{Z}) = U_i \eta.$$

On a alors (voir [7]), pour toute solution régulière Z de (1), (2), (3), (4), (9), la proposition suivante :

PROPOSITION II. – Le système (1)-(12) admet l'inégalité d'entropie suivante :

$$\begin{aligned} & (\eta(\mathbf{Z}))_{,t} + (f_\eta^i(\mathbf{Z}))_{,i} + \left((\gamma - 1) \frac{\sigma_E}{T} T_{,i} \right)_{,i} \\ & = -(\gamma - 1) \frac{\sigma_E}{T^2} T_{,i} T_{,i} - \frac{(\gamma - 1)}{T} \left(\epsilon + \frac{\mu_{\text{lam}}}{2} S_{ij} \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{11} \delta_{ij} \right) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

On a noté ici : $T = \rho^{-1}P$ et $S_{i,j} = U_{i,j} + U_{j,i}$. La caractérisation entropique est très proche de celle de la dynamique des gaz dans le cadre laminaire. Elle fait apparaître le fait que la fonction de dissipation d'entropie est (explicitement) indépendante de la viscosité turbulente μ_t . L'entropie est une fonction convexe (non stricte) de Z ; elle permettra de sélectionner la solution admissible du problème de Riemann associé au système de convection non conservatif dans les champs VNL.

III. Hyperbolicité du système de convection

Le système de convection associé au membre de gauche du système ((1)-(4),(9)-(10)) est non conservatif et peut s'écrire dans les zones régulières (en notant : $Z^t = (\rho, \rho U, \rho V, \rho W, E, K, \varepsilon)$) :

$$(14) \quad Z_{,t} + A_i(Z) Z_{,i} = 0.$$

On introduit alors une normale unitaire quelconque : $n^t = (n_x, n_y, n_z)$, et les notations suivantes :

$$(15) \quad U = n_x U + n_y V + n_z W, \quad c'^2 = \gamma P/\rho + 10 K/(9\rho).$$

PROPOSITION III. – *Le système de convection non conservatif (14) est hyperbolique non strict. Les valeurs propres s'écrivent dans le cas tridimensionnel :*

$$(16) \quad \lambda_1 = U - c', \quad \lambda_i = U \quad (i = 2, 3, 4, 5, 6), \quad \lambda_7 = U + c'.$$

L'hyperbolicité du système est associée au respect de la positivité des densité et pression moyennes, et de l'énergie turbulente. Le système est invariant par rotation. On se restreint au cadre unidimensionnel :

$$(17) \quad (\rho)_{,t} + (\rho U)_{,x} = 0,$$

$$(18) \quad (\rho U)_{,t} + (\rho U^2)_{,x} + P_{,x} + \frac{2}{3} K_{,x} = 0,$$

$$(19) \quad (E)_{,t} + (U(E + P + 2K/3))_{,x} = 0,$$

$$(20) \quad (K)_{,t} + (KU)_{,x} + \frac{2}{3} KU_{,x} = 0,$$

$$(21) \quad \varepsilon_{,t} + (\varepsilon U)_{,x} + \frac{2}{3} C_{\varepsilon_1} \varepsilon U_{,x} = 0.$$

La loi d'état est toujours (9) et on introduit la variable réduite : $W^t = (\rho, \rho U, E, K, \varepsilon)$. Les valeurs propres du système (17) à (21) sont : $\lambda_1 = U - c'$; $\lambda_i = U$ ($i = 2, 3, 4$); $\lambda_5 = U + c'$. Les 1-onde et 5-onde sont VNL; le champ associé à la valeur propre triple U est Linéairement Dégénéré (LD). Les invariants de Riemann sont (en posant : $\eta = 1 + \frac{2}{3} C_{\varepsilon_1}$ et également $s = P \rho^{-\gamma}$) :

$$(22) \quad \phi_1^{1,2,3,4}(W) = \left(s, K \rho^{-5/3}, U + \int \frac{c'(\rho, s, K \rho^{-5/3})}{\rho} d\rho, \varepsilon \rho^{-\eta} \right),$$

$$(23) \quad \phi_2^{1,2,3,4}(\mathbf{W}) = \left(U, P, P + \frac{2}{3} K, \varepsilon \right),$$

$$(24) \quad \phi_3^{1,2,3,4}(\mathbf{W}) = \left(U, s, P + \frac{2}{3} K, \varepsilon \right),$$

$$(25) \quad \phi_4^{1,2,3,4}(\mathbf{W}) = \left(U, s, P + \frac{2}{3} K, K \right),$$

$$(26) \quad \phi_5^{1,2,3,4}(\mathbf{W}) = \left(s, K \rho^{-5/3}, U \int \frac{c'(\rho, s, K \rho^{-5/3})}{\rho} d\rho, \varepsilon \rho^{-\eta} \right).$$

IV. Solution du problème de Riemann unidimensionnel

On s'intéresse maintenant aux solutions discontinues du système (17)-(21) en se restreignant au cadre des ondes de choc de faible amplitude. On introduit les notations : $\bar{\phi} = (\phi_G + \phi_D)/2$, $[\phi] = \phi_D - \phi_G$, où ϕ_G et ϕ_D désignent les valeurs gauche et droite de la discontinuité se déplaçant à la vitesse σ . On envisage les relations de saut approchées (voir [8], [9], [10], [11] et [12]) :

$$(27) \quad -\sigma [K] + [UK] + \frac{2}{3} \bar{K} [U] = 0,$$

$$(28) \quad -\sigma [\varepsilon] + [U\varepsilon] + \frac{2}{3} C_{\varepsilon 1} \bar{\varepsilon} [U] = 0.$$

Ces relations de saut permettent ici d'obtenir une connection C^2 des courbes de choc et de détente (voir [12] et [9] pour le cadre général). Si on introduit la relation (27) dans l'inégalité d'entropie :

$$(29) \quad -\sigma [\eta] + [U\eta] < 0,$$

on obtient : $[U] < 0$, et la paramétrisation des chocs ($\beta = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$),

$$(30) \quad \frac{\rho_r}{\rho_1} = z, \quad \frac{P_r}{P_1} = \frac{\beta z - 1}{\beta - z}, \quad \frac{K_r}{K_1} = \frac{4z - 1}{4 - z}, \quad \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_1} = \frac{\mu z - 1}{\mu - z},$$

$$(31) \quad \frac{u_r - u_1}{c_1} = \pm \frac{z - 1}{z^{1/2}} \left(\frac{2}{(\gamma - 1)(\beta - z)} + \frac{10 K_1}{3 \gamma P_1 (4 - z)} \right)^{1/2},$$

($\mu = (C_{\varepsilon 1} + 3)/C_{\varepsilon 1}$), avec un signe négatif pour le 1-choc ($z > 1$) et positif pour le 5-choc ($0 < z < 1$) dans la formule (31). A travers la discontinuité de contact, on a :

$$(32) \quad \sigma = u_r = u_1, \quad P_r - P_1 + \frac{2}{3} (K_r - K_1) = 0.$$

On peut donc s'intéresser au problème de Riemann associé aux conditions initiales :

$$\begin{aligned} W(x < 0, t = 0) &= W_L = (\rho_L, \rho_L U_L, E_L, K_L, \varepsilon_L), \\ W(x > 0, t = 0) &= W_R = (\rho_R, \rho_R U_R, E_R, K_R, \varepsilon_R). \end{aligned}$$

PROPOSITION IV. – *Le problème de Riemann unidimensionnel associé au système non conservatif (17)-(21) et aux relations de saut approchées (27)-(28) admet une unique solution entropique à densité strictement positive si, et seulement si,*

$$U_R - U_L < X_L + X_R,$$

en posant :

$$X_i = \int_0^{\rho_i} \frac{c'(\rho, s, K \rho^{-5/3})}{\rho} d\rho \quad \text{avec } i = L \text{ ou } R.$$

La pression P et l'énergie cinétique turbulente K restent alors positives dans le plan (x, t) .

La preuve (voir [12] et [13]) s'obtient par simple étude de fonctions; la résolution pratique du problème de Riemann nécessite néanmoins la résolution d'un système de deux équations non linéaires (2×2) (voir [12]). On obtient évidemment le résultat classique de la DG lorsque l'on pose formellement : $K = 0$. La paramétrisation de la courbe de pression dans (30) est identique à celle de la DG. Si l'on « oublie » le terme non conservatif dans l'équation (14), l'étude du système conservatif (qui est encore hyperbolique), montre que la pression peut devenir négative dans les détentes (voir [7] et [12]), ce qui interdit l'utilisation « numérique » de la solution du problème de Riemann associé. L'examen de la préservation de la positivité des variables ρ , P et K dans le cadre de solutions régulières est abordé dans [13] (voir également [15] et [16]).

V. Un schéma de type Godunov (voir [17])

Le système convectif non conservatif unidimensionnel (17)-(21) peut s'écrire comme suit :

$$(33) \quad W_{,t} + (F_x(W))_{,x} + B(W) W_{,x} = 0,$$

$$(34) \quad (F_x(W))^t = \left(\rho U, \rho U^2 + P + \frac{2}{3} K, U \left(E + P + \frac{2}{3} K \right), UK, U\varepsilon \right),$$

$$(35) \quad (B(W) W_{,x})^t = \left(0, 0, 0, \frac{2K}{3} U_{,x}, \frac{2\varepsilon}{3} C_{\varepsilon,1} U_{,x} \right).$$

On sait que la simulation numérique de systèmes hyperboliques non conservatifs est très délicate dans le cas de chocs forts, même si ceux-ci dérivent de lois de conservation bien identifiées ([18]). On pourrait *a priori* envisager, dans un cadre unidimensionnel, de considérer le résultat de la projection L^2 des deux demi-solutions des problèmes de Riemann associés aux interfaces ($i \pm 1/2$), soit :

$$(36) \quad \begin{aligned} W_i^{n+1} h_i &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} W^{\text{Riemann}} \left(W_{i-1}^n, W_i^n, \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t} \right) dx \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} W^{\text{Riemann}} \left(W_i^n, W_{i+1}^n, \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t} \right) dx. \end{aligned}$$

Solveur de type Godunov pour simuler les écoulements turbulents compressibles

Ce schéma préserve les propriétés de positivité, mais il s'avère délicat de l'étendre au cadre multidimensionnel sur maillage non structuré. On propose le schéma explicite d'intégration :

$$(37) \quad (W_i^{n+1} - W_i^n) h_i + \Delta t (F_x(W_{i+1/2}^{\text{God}}) - F_x(W_{i-1/2}^{\text{God}})) + \Delta t X_i = 0,$$

$$(38) \quad X_i^t = \left(0, 0, 0, \frac{2}{3} \hat{K}_i (U_{i+1/2}^{\text{God}} - U_{i-1/2}^{\text{God}}), \frac{2}{3} C_{\varepsilon_1} \hat{\varepsilon}_1 (U_{i+1/2}^{\text{God}} - U_{i-1/2}^{\text{God}}) \right) = 0,$$

où W^{God} désigne la valeur en $x/t = 0$ de la solution du problème de Riemann associé à (14), et

$$(39) \quad (\hat{K})_i^n = (K_{i+1/2}^{\text{God}} + K_{i-1/2}^{\text{God}})/2, \quad (\hat{\varepsilon})_i^n = (\varepsilon_{i+1/2}^{\text{God}} + \varepsilon_{i-1/2}^{\text{God}})/2.$$

Le choix (39) permet de retrouver formellement le schéma conservatif de Godunov, pour l'équation de Burgers réécrite sous forme non conservative. La figure 1 illustre le comportement numérique de variable pression moyenne $(P + 2K/3)$, pour le problème de Riemann associé aux valeurs initiales $(\rho_L = 1., U_L = 0., P_L = 100\,000, K_L = 100)$ et $(\rho_R = 0.125, U_R = 0., P_R = 10\,000, K_R = 1000)$. On observe notamment sur ce cas une nette variation de P à travers la discontinuité de contact, alors que $(P + 2K/3)$ reste numériquement invariant dans cette zone (ainsi que U , voir (32)).

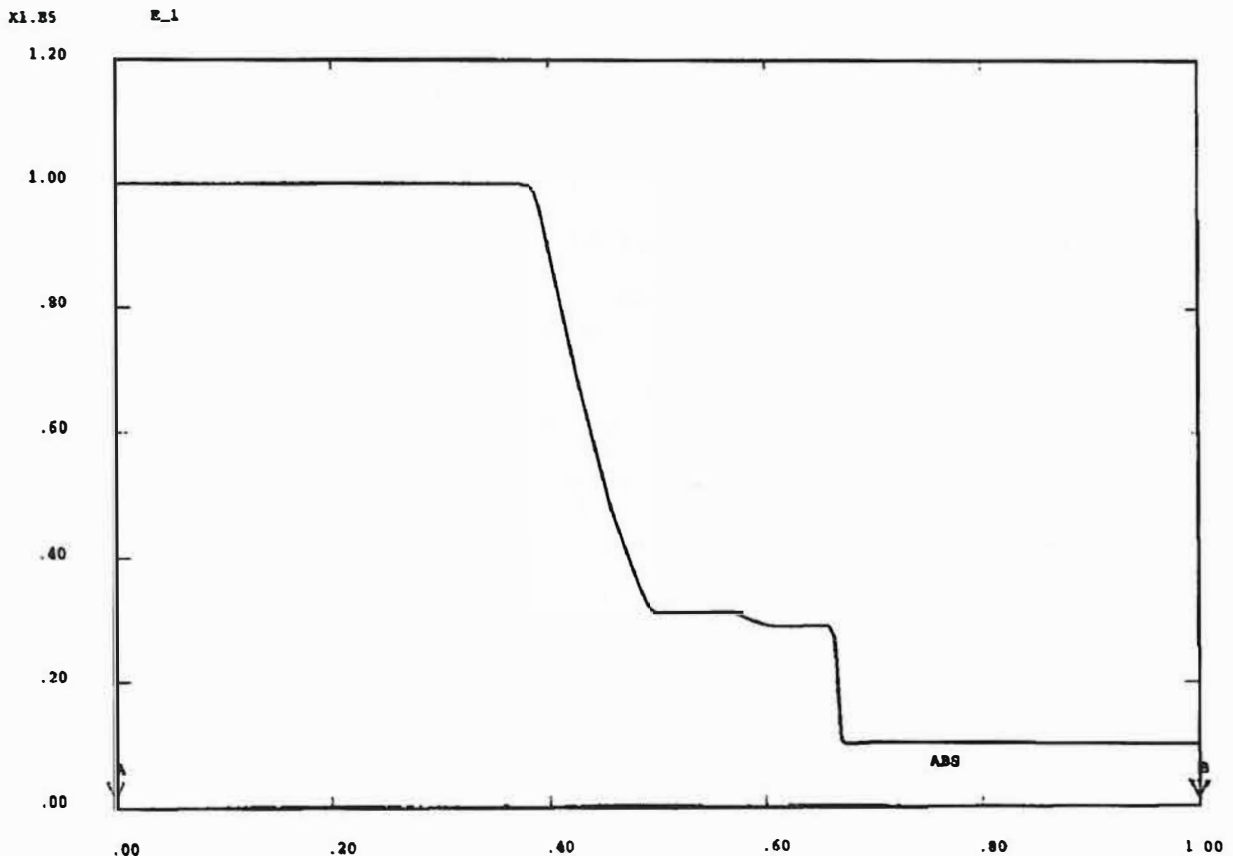


Fig. 1. - Mean pressure P (Shock tube experiment).

Fig. 1. - Pression moyenne (tube à choc).

Conclusion

La principale originalité du travail présenté réside dans l'examen du système de convection complet qui est non conservatif. Le solveur de type Godunov proposé peut s'implémenter dans un cadre multidimensionnel sur maillage non structuré (voir [12]). Les résultats numériques obtenus dans le cadre de simulations de problèmes de Riemann unidimensionnels confirment les qualités du solveur explicite, lorsque les amplitudes de choc sont faibles. Un solveur de Riemann approché de type Roe a également été développé (voir [7]), qui donne des résultats satisfaisants dans le cas de chocs faibles.

Remerciements. Les auteurs remercient Yvon MADAY pour les conseils et encouragements prodigués.

Note remise le 22 novembre 1996, acceptée le 16 décembre 1996.

Références bibliographiques

- [1] D. Vandromme et H. Ha Minh, 1986. About the coupling of turbulence closure models with averaged Navier-Stokes equations, *J.C.P.*, Vol. 65, n° 2, pp. 386-409.
- [2] B. Cardot, B. Coron, B. Mohammadi et O. Pironneau, 1991. Simulation of turbulence with the $k - \epsilon$ model, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 87, pp. 103-116.
- [3] B. Mohammadi et O. Pironneau, 1994. *Analysis of the $k - \epsilon$ turbulence model*, Masson/Wiley.
- [4] A. Favre, L. S. G. Kovasnay, R. Dumas, J. Gaviglio et M. Coantic, 1976. *La turbulence en mécanique des fluides*, Gauthier-Villars.
- [5] K. Jansen, Z. Johan, T. J. R. Hughes, 1993. "Implementation of a one equation turbulence model within a stabilized finite element formulation of a symmetric advective-diffusive system", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 105, pp. 405-433.
- [6] C. Olivier et B. Larroutourou, 1991. "On the numerical approximation of the $k - \epsilon$ turbulence model for two dimensional compressible flows", *INRIA report*, 1526.
- [7] J. M. Hérard, 1995. "Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible", *rapport EDF/DER HE-41/95/0091A*.
- [8] J. F. Colombeau, 1992. "Multiplication of distributions", Springer Verlag.
- [9] P. Le Floch, 1988. "Entropy weak solutions to non linear hyperbolic systems in non conservative form", *Comm. Partial Differential Equations*, 13(6), pp. 669-727.
- [10] P. Le Floch et T. P. Liu, 1992. "Existence theory for non linear hyperbolic systems in non conservative form", *C.M.A.P. report n° 254*, Ecole Polytechnique, France.
- [11] L. Sainsaulieu, 1995. *Thèse d'habilitation*, Université Paris VI, 20/01/1995.
- [12] X. Louis, 1995. *Thèse de doctorat*, Université Paris VI, 06/07/1995.
- [13] J. M. Hérard, A. Forestier, X. Louis, 1994. "Un système non strictement hyperbolique de description de la turbulence compressible", *rapport EDF/DER HE-41/94/0111A*, 1994.
- [14] J. Smoller, 1982. "Shock waves and Reaction-Diffusion Equations", Springer Verlag.
- [15] R. Lewandowski, 1993. « Modèles de turbulence et équations paraboliques » *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, 317, pp. 835-840.
- [16] R. Lewandowski, 1994. « Les équations de Stokes et Navier-Stokes couplées avec l'équation de l'énergie cinétique turbulente » *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, 318, pp. 1097-1102.
- [17] S. K. Godunov, 1959. « A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics », *Math Sb.*, 47(89), pp. 271-306.
- [18] F. De Vuyst, 1994. *Thèse de Doctorat*, Université Paris VI, 19/12/1994.