Les invariants du tenseur d'élasticité

Marc Olive, Boris Kolev, Nicolas Auffray

Les invariants du tenseur d'élasticité

M. OLIVE[a] , B. KOLEV[b] , N. AUFFRAY[c]

a. b. I2M, CNRS & Université de Provence, 39 Rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France – a. marc.olive@math.cnrs.fr – b. boris.kolev@math.cnrs.fr
c. MSME, Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France – nicolas.auffray@univ-mlv.fr

Résumé :

Le propos de cet exposé est de donner pour la première fois une base d'intégrité de l'espace des tenseurs d'élasticité. Nous considérons dans premier temps le cas des bases d'intégrité d'espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2*, pour ensuite aborder le cas de l'espace des tenseurs d'élasticité, d'ordre* 4*. Ces questions trouvent leur source à la fois dans des travaux de mécaniques des milieux continus (par l'intermédiaire de Rivlin, Spencer, Boehler et al.) ainsi que dans des travaux de mathématiques (dans le cadre de la théorie des invariants). Les enjeux sont tout aussi important dans chacun des deux domaines, que ce soit pour des questions de classification de matériaux élastiques ou encore de méthodes effectives de description d'espaces d'orbites.*

Abstract :

We give in this talk and for the first time an integrity bases of elasticity tensors. We first introduce integrity basis for tensor spaces of order less or equal to 2*. Our goal is then to get to an integrity basis of tensor spaces of greater order, such as the one of elasticity tensor (of order* 4*). Such questions arise from continuum mechanic (as in the works of Rivlin, Spencer, Boehler and al.) and in the mathematical field of invariant theory, both questions being of primary importance, as in the one of elastic material classification or effective approaches in orbit space description.*

Mots clefs : Elasticité ; Théorie des invariants ; Espaces de tenseurs.

1 Introduction : motivations mécaniques

1.1 Lois de comportement

En théorie de l'élasticité dite de grande transformation, le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ (d'ordre 2, symétrique) est une fonction tensorielle du tenseur de dilatation de Cauchy–Green gauche $\mathbf{B}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}(\mathbf{B}).$$

Si on suppose le matériau *isotrope*, on en déduit la *covariance* de $\mathbf{G}$ par rapport au groupe $\mathrm{O}(3)$ des transformations orthogonales :

$$\mathbf{g}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{g}^T = \mathbf{g}\mathbf{G}(\mathbf{B})\mathbf{g}^T = \mathbf{G}(\mathbf{g}\mathbf{B}\mathbf{g}^T), \quad \forall \mathbf{g} \in \mathrm{O}(3).$$

D'où une loi de comportement de la forme [14]

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbf{B}^2$$

où $\mathbf{I}$ désigne le tenseur identité et α_i des fonctions *invariantes* du tenseur $\mathbf{B}$. Notons que dans le cas d'un matériau hyperélastique isotrope, c'est l'énergie libre $W(\mathbf{B})$ qui est fonction invariante du tenseur $\mathbf{B}$ et les coefficients α_i s'expriment alors en fonction de W.

A ce stade, plusieurs généralisations sont possibles, que ce soit à travers des lois de comportement *anisotrope* [3], ou bien en théorie du *second–gradient de la déformation* [8]. Dans ce dernier cas [7], on écrit l'énergie libre W en fonction de la déformation ainsi que de son gradient

$$W = W(\mathbf{B}, \nabla\mathbf{B}).$$

Le matériau est alors dit isotrope si cette énergie est une fonction isotrope de ses arguments, c'est-à-dire si $W(\mathbf{B}, \nabla\mathbf{B})$ est fonction des invariants de $\mathbf{B}$ (d'ordre 2) et de $\nabla\mathbf{B}$ (d'ordre 3).

Dans la pratique, on recherche les invariants parmi les *polynômes* invariants, et la question va naturellement porter sur la recherche d'une *base d'intégrité finie* (famille génératrice finie) de l'algèbre des polynômes invariants. Dans le cas d'un tenseur symétrique $\mathbf{B}$ d'ordre 2, on sait ainsi qu'une base d'intégrité est donnée par

$$I_1 := \text{trace}\,(\mathbf{B}), \quad I_2 := \frac{1}{2}\left((\text{trace}\,(\mathbf{B}))^2 - \text{trace}\,(\mathbf{B}^2)\right), \quad I_3 := \det \mathbf{B}$$

ce qui signifie que tout polynôme invariant s'exprime polynomialement en fonction de ces trois invariants. Un article de Zheng [16] résume ainsi la plupart des résultats obtenus en mécanique des milieux continus, portant uniquement sur des espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à deux.

Mais ces questions relatives aux bases d'intégrité trouvent aussi une application importante dans des problèmes liés à la *classification* des matériaux linéaires (élastiques, piézoélectriques, etc). Dans le cas de la classification des matériaux élastiques linéaires, il est ainsi nécessaire de considérer une base d'intégrité du tenseur d'élasticité, d'ordre 4.

1.2 Classification des matériaux élastiques

En élasticité linéaire, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des petites déformations ε sont liés par la relation linéaire

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$$

où $\mathbf{C}$ est un tenseur d'ordre 4, appelé *tenseur d'élasticité*. L'espace des tenseurs d'élasticité, noté $\mathbb{E}\mathrm{la}$, est un espace vectoriel de dimension 21. Un *changement d'orientation* d'un matériau dans l'espace, par l'intermédiaire d'une rotation $\mathbf{g} \in \mathrm{SO}(3)$, va déterminer un nouveau tenseur $\overline{\mathbf{C}}$ dont les composantes seront liées à celle de $\mathbf{C}$ par la relation

$$\overline{\mathbf{C}}_{ijkl} = \mathbf{g}_{ip}\mathbf{g}_{jq}\mathbf{g}_{kr}\mathbf{g}_{ls}\mathbf{C}_{pqrs}.$$

On dit en fait que les tenseurs $\mathbf{C}$ et $\overline{\mathbf{C}}$ sont dans la même *orbite* sous l'action du groupe $\mathrm{SO}(3)$

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{C}.$$

Comme l'ont souligné Boehler–Kirilov–Onat [2], un *matériau élastique homogène* est un point dans l'*espace des orbites* $\mathbb{E}\mathrm{la}/\mathrm{SO}(3)$: la classification des matériaux élastiques passe donc par la description mathématique de cet espace. Or, un tel espace n'est en général pas une *variété différentielle* : il s'agit d'un recollement de plusieurs variétés de dimensions différentes, chacune de ces variétés étant caractérisée par une certaine classe de symétrie. Rappelons à ce sujet que les matériaux élastiques se découpent en huit classes de symétries [4] :

Nom	Classe	Par.	Ang.	Nom	Classe	Par.	Ang.
Isotrope	$[\mathrm{SO}(3)]$	2	0	Trigonale	$[\mathrm{D}_3]$	6	3
Cubique	$[\mathcal{O}]$	3	3	Orthotropique	$[\mathrm{D}_2]$	9	3
Iso. trans.	$[\mathrm{O}(2)]$	5	2	Monoclinique	$[\mathrm{Z}_2]$	12	3
Tétragonale	$[\mathrm{D}_4]$	6	3	Triclinique	$[\mathbb{1}]$	18	3

On donne dans ce tableau le nombre de paramètres minimum pour décrire chacune des classes. Notons qu'il faut ensuite tenir compte de paramètres associés à d'éventuels angles d'Euler pour rendre ce nombre de paramètres minimium. Il y a par exemple pour la classe triclinique 3 angles d'Euler qui vont permettre d'annuler 3 composantes d'un tenseur d'élasticité triclinic donné.

Pour tenter de décrire chacune de ces classes, à l'image de la classe isotrope, une idée consiste à faire intervenir des *invariants polynomiaux*, comme proposé par Auffray–Kolev–Petitot [1]. Cette démarche nécessite de connaître une base d'intégrité de l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}$.

2 Construction effective de bases d'intégrité

Une fois fixé une *action de groupe* G sur un espace vectoriel V, dont un modèle est l'action du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$ sur l'espace $\mathbb{R}^3$, on construit l'*algèbre des polynômes invariants*. Un théorème de Hilbert [11] nous assure que, pour tout groupe compact, une telle algèbre est toujours *finiment engendrée* : il existe ainsi une famille génératrice finie, appelé *base d'intégrité finie*. Une question, difficile en générale, est de pouvoir déterminer explicitement une base d'intégrité finie d'une algèbre d'invariants donnée.

Le cas de l'espace $(\mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3))$ est assez direct : une base d'intégrité est simplement donnée par le carré de la *norme*. Pour l'action du groupe $\mathrm{O}(3)$ sur p copies de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$, un résultat de Weyl [15] nous montre qu'une base d'intégrité est donnée par la famille finie des produits scalaires $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$. Des travaux effectués dans le cadre de la mécanique des milieux continus [16] abordent alors des bases d'intégrités finies pour des familles de p vecteurs, n tenseurs symétriques et q tenseurs antisymétriques d'ordre 2.

Pour aborder le cas des espaces de tenseurs d'ordre supérieur ou égal à 3, il est possible de construire « à l'aveugle » des familles de polynômes invariants en passant par des opérations de traces. Le problème – très difficile en général – est de savoir extraire une famille génératrice *finie* à partir de cette famille infinie. Par un procédé de complexification, on peut en fait ramener le problème au cas de l'algèbre des polynômes $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ invariants sur des espaces de *formes binaires* (polynômes homogènes sur $\mathbb{C}^2$).

Dans ce cadre, qui correspond à la *théorie classique des invariants*, il existe essentiellement deux approches de constructions *effectives* de bases d'intégrité : celle basée sur la *géométrie algébrique*, développée par Hilbert, puis celle développée par Cayley et Gordan au 19ième siècle, basée sur des opérateurs invariants. Cette dernière approche, modernisée et reformulée dans un travail récent [9], nous a permis de trouver une base d'intégrité finie de l'espace des tenseurs d'élasticité.

3 Les invariants du tenseur d'élasticité

Nous fixons ici l'espace $(\mathbb{E}\mathrm{la}, \mathrm{SO}(3))$ des tenseurs d'élasticité. Nous connaissons une *décomposition harmonique* de cet espace

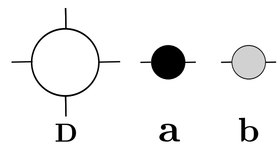
$$\mathbb{E}\mathrm{la} \simeq \mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0$$

où $\mathbb{H}^n$ est l'espace des tenseurs totalement symétriques de trace nulle [1]. Pour tout tenseur $\mathbf{C} \in \mathbb{E}\mathrm{la}$ on peut donc écrire

$$\mathbf{C} \simeq (\mathbf{D}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda, \mu) \in \mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0$$

On représente alors un tenseur $\mathbf{T} \in \mathbb{H}^n$ par un *atome de valence* n :

1. Cette décomposition généralise la décomposition en partie sphérique et partie déviatorique d'un tenseur symétrique d'ordre 2.



Ensuite, toute opération de *trace* se représente par une ou plusieurs *arêtes* entre atomes :

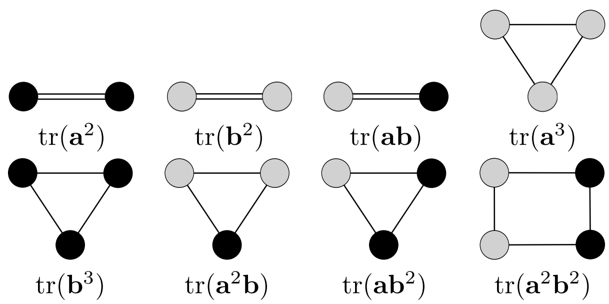


FIGURE 1 – Base d'intégrité des invariants de $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$.

Par des résultats classiques, on connaît une base d'intégrité des invariants de $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$ composée d'invariants *simples* et d'invariants *joints* (cf figure 1). Boehler–Kirilov–Onat [2] ont traduit des résultats de théorie classique des invariants pour obtenir une base d'intégrité de $\mathbb{H}^4$. Il reste ainsi à obtenir les invariants joints de $\mathbb{H}^4$ et $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$ qui, à notre connaissance, n'avaient jamais été obtenus jusqu'à présent.

4 Résultats

Pour obtenir ces invariants joints, on utilise une version modernisée et optimisée de l'*algorithme de Gordan* [9]. Par des scripts écrits en Macaulay 2, nous sommes parvenu à établir l'existence d'une *base d'intégrité minimale* de 299 invariants. Cette famille est composée

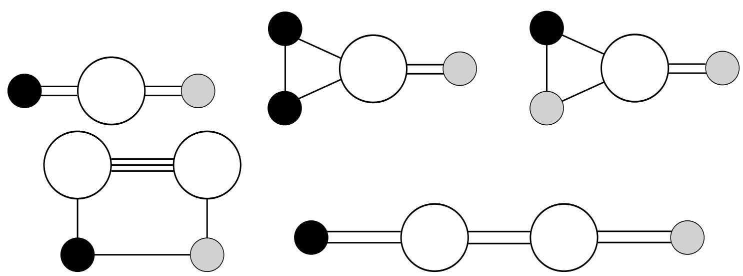
1. d'invariants simples pour chaque composante $\mathbb{H}^2$;
2. d'invariants joints pour $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$;
3. de 9 invariants simples pour la composante $\mathbb{H}^4$;
4. d'invariants joints pour $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$, comptés en double ;
5. d'invariants joints pour $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$

L'ensemble de ces résultats, dont les deux derniers sont originaux, sont résumés dans la table 1.

degré	$\mathbb{H}^4$	$\mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^0$	$\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$
1	–	–	1	–	–	–
2	1	1	–	1	–	–
3	1	1	–	2	2	1
4	1	–	–	1	4	6
5	1	–	–	–	7	18
6	1	–	–	–	10	36
7	1	–	–	–	11	53
8	1	–	–	–	10	45
9	1	–	–	–	5	10
10	1	–	–	–	2	2
11	–	–	–	–	2	3
Tot	9	2	1	4	53	174

TABLE 1 – Base d'intégrité du tenseur d'élasticité.

Nous fournissons finalement quelques invariants joints de degré inférieur ou égal à 4, obtenu à l'aide de l'algorithme de Gordan :



5 Conclusion

La détermination d'une base d'intégrité complète de l'espace des tenseurs d'élasticité n'est qu'une première étape dans ce qui permet de décrire effectivement l'espace des orbites $\mathbb{E}\text{la}/\text{SO}(3)$, et donc d'établir une classification des matériaux élastiques linéaires. Il reste maintenant à rendre exploitable une telle base d'intégrité, en fournissant notamment leur expression en terme de traces.

A l'instar de ce qui a été fait en mécanique des milieux continus dans le cas des tenseurs d'ordre inférieur ou égal à deux, on peut aussi tenter d'extraire, de cette base d'intégrité, une famille de séparants, qui permet de séparer les orbites autant que les invariants. Une autre piste consiste aussi à chercher des invariants parmi des fonctions rationnelles, ce qui fait intervenir des théories mathématiques portant sur les corps d'invariants rationnels. Chacune de ces pistes reste encore à explorer.

Remerciements

N. Auffray tient à remercier le pôle EMC2 et la Région Pays de la Loire pour son financement.

Références

[1] Auffray, N., Kolev, B., Petitot, M. (2014). *On anisotropic polynomial relations for the elasticity tensor*. Journal of Elasticity, 115(1), 77-103.

[2] Boehler, J. P., Kirillov Jr, A. A., Onat, E. T. (1994). *On the polynomial invariants of the elasticity tensor*. Journal of elasticity, 34(2), 97-110.

[3] Boehler, J. P. (1978). *Lois de comportement anisotrope des milieux continus*. Journal de mécanique, 17(2), 153-190.

[4] Forte, S., Vianello, M. (1996). *Symmetry classes for elasticity tensors*. Journal of Elasticity, 43(2), 81-108.

[5] Gordan, P. (1868). *Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 69, 323-354.

[6] Hochster, M., Roberts, J. L. (1974). *Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay*. Advances in mathematics, 13(2), 115-175.

[7] dell'Isola F., Sciarra G. Vidoli S., Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials. *Proc. R. Soc. A, 465, 2177–2196, 2009*

[8] Mindlin, R. D. (1965). *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity*. International Journal of Solids and Structures, 1(4), 417-438.

[9] Olive, M. (2014). *About Gordan's algorithm for binary forms*. arXiv preprint arXiv :1403.2283.

[10] Brouwer, A. E., Popoviciu, M. (2010). *The invariants of the binary decimic*. Journal of Symbolic Computation, 45(8), 837-843.

[11] Hilbert, D. (1993). *Theory of algebraic invariants*. Cambridge University Press.

[12] Rivlin, R. S., Ericksen, J. L. (1997). *Stress-deformation relations for isotropic materials*. In Collected Papers of RS Rivlin (pp. 911-1013). Springer New York.

[13] Rivlin, R. S. (1997). *Some Topics in Finite Elasticity*. In Collected Papers of RS Rivlin (pp. 360-389). Springer New York.

[14] Spencer, A. J. M. (2004). *Continuum mechanics*. Courier Corporation.

[15] Weyl, H. (1997). *The classical groups : their invariants and representations (Vol. 1)*. Princeton university press.

[16] Zheng, Q. S. (1994). *Theory of representations for tensor functions - a unified invariant approach to constitutive equations*. Applied Mechanics Reviews, 47(11), 545-587.