

Dynamique d'un plasma magnétique froid

Ibtissem Zaafrani, Simon Labrunie

▶ **To cite this version:**

Ibtissem Zaafrani, Simon Labrunie. Dynamique d'un plasma magnétique froid. 2017. hal-01572067v2

HAL Id: hal-01572067
https://hal.science/hal-01572067v2

Preprint submitted on 10 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dynamique d'un plasma magnétique froid

Ibtissem Zaafrani et Simon Labrunie
Université de Lorraine, Institut Elie Cartan de Lorraine, UMR 7502,
54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France
CNRS, Institut Elie Cartan de Lorraine, UMR 7502,
54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France
ibtissem.zaafrani@gmail.com,simon.labrunie@univ-lorraine.fr

11 décembre 2017

Sommaire

1 Modèle **2**

2 Outils mathématiques et espaces fonctionnels **5**
2.1 Théorème de Lax–Milgram 5
2.2 Opérateurs non-bornés 5
2.2.1 Définitions 5
2.2.2 Propriétés 6
2.3 Espaces fonctionnels 6
2.3.1 Opérateurs rotationnel-divergence-gradient 8
2.3.2 Espaces $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$, $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ 8
2.3.3 Traces des champs vectoriels 9
2.3.4 Dualités et intégrations par parties 10
2.4 Résultats techniques 11

3 Bonne position des équations d'évolution **11**
3.1 Cadre du travail 12
3.2 Conditions aux limites de conducteur parfait 15
3.3 Conditions aux limites de Silver–Müller 20
3.3.1 Condition aux limites absorbante (Silver–Müller homogène) . 21
3.3.2 Condition aux limites d'onde entrante (Silver–Müller non homogène) 26

4 Vérification des autres équations du modèle **28**
4.1 Conditions de divergence 28
4.2 Conditions aux limites 29
4.2.1 Conducteur parfait 29
4.2.2 Silver–Müller 31

Références **32**

1 Modèle

L'électromagnétisme est le domaine de la physique qui s'intéresse à l'ensemble des phénomènes électriques et magnétiques. Les champs électromagnétiques apparaissent dès lors que des charges électriques sont en mouvement.

Le système physique qui nous intéresse est un plasma, c'est-à-dire un gaz totalement ionisé, où règne un champ magnétique externe, statique $\boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{x})$. Pour les différents modèles de plasma magnétique, et la propagation d'ondes dans les plasmas, nous renvoyons à [6]. Nous supposons que le plasma est "froid", c'est-à-dire que l'agitation thermique des particules, et donc leur pression, est négligeable. Dans la suite, les différentes espèces de particules (ions et électrons) seront désignées par l'indice s.

On suppose que le plasma est dans un état d'équilibre mécanique et électrostatique, perturbé par un onde électromagnétique de faible amplitude. Les champs électrique $\mathcal{E}$ et magnétique $\mathcal{B}$ totaux sont donc :

$$\mathcal{E}(t,\boldsymbol{x}) = \epsilon \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}), \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{x}) + \epsilon \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}),$$

$\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont le champs électrique et le champ magnétique de l'onde, et ϵ est un paramètre de perturbation. Les termes qui sont à l'ordre 1 en ϵ sont, en fait, une petite perturbation, et à l'ordre 0 sont physiquement en cas d'équilibre.

Pour chaque espèce s, on introduit la densité de charge et le courant partiel $\varrho_s,\ \mathcal{J}_s$. Le courant et la charge totales sont alors

$$\begin{aligned} \varrho(t,\boldsymbol{x}) &= \sum_s \varrho_s(t,\boldsymbol{x}) := \sum_s n_s^0(\boldsymbol{x}) q_s + \epsilon \rho_s(t,\boldsymbol{x}), \\ \mathcal{J}(t,\boldsymbol{x}) &= \sum_s \mathcal{J}_s(t,\boldsymbol{x}) := \sum_s \epsilon \boldsymbol{J}_s(t,\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

avec q_s la charge des particules de chaque espèce et $(\rho_s, \boldsymbol{J}_s)$ représentant la perturbation pour l'espèce s. Le terme $n_s^0(\boldsymbol{x})q_s$ est la densité d'équilibre. Pour avoir l'équilibre électrostatique, nous supposons à l'ordre 0 en ϵ que

$$\sum_s n_s^0(\boldsymbol{x}) q_s = 0,$$

ce qui explique que le terme d'ordre 0 dans le développement du champ électrique est nul. De même le terme d'ordre 0 du courant est nul en raison de l'équilibre mécanique.

Chaque espèce obéit à l'équation de conservation de l'impulsion, nommée aussi équation d'*Euler* :

$$m_s \frac{\partial \mathcal{U}_s}{\partial t} + m_s(\mathcal{U}_s.\nabla)\mathcal{U}_s - q_s(\mathcal{E} + \mathcal{U}_s \wedge \mathcal{B}) + m_s \nu_s \mathcal{U}_s = 0, \tag{1}$$

$\mathcal{U}_s$ désigne la vitesse eulérienne du fluide et ν_s est une fréquence de collision qui dépend seulement de la variable $\boldsymbol{x}$. m_s est la masse des particules de chaque espèce. La vitesse du fluide et la densité des particules $n_s(t,\boldsymbol{x})$ sont liées au courant partiel par

$$n_s q_s \mathcal{U}_s, = \mathcal{J}_s = \epsilon \boldsymbol{J}_s. \tag{2}$$

En raison de l'équilibre mécanique, la vitesse est d'ordre 1 en ϵ. En multipliant l'équation (1) par $\frac{n_s q_s}{m_s}$ et en remplaçant $\mathcal{U}_s$ par sa nouvelle expression, nous trouverons

$$\epsilon\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} + \frac{\epsilon^2}{n_s q_s}(\boldsymbol{J}_s.\nabla)\boldsymbol{J}_s - \epsilon\frac{n_s q_s^2}{m_s}\boldsymbol{E} - \epsilon\frac{q_s}{m_s}\boldsymbol{J}_s \wedge \boldsymbol{B}^0 - \epsilon^2\frac{q_s}{m_s}\boldsymbol{J}_s \wedge \boldsymbol{B} + \epsilon\nu_s\,\boldsymbol{J}_s = 0. \quad (3)$$

Si on travaille à l'ordre 1 en ϵ, alors on se débarrasse des termes qui sont à l'ordre 2. Ainsi, de l'équation (3) on obtient

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} - \frac{n_s q_s^2}{m_s}\boldsymbol{E} - \frac{q_s}{m_s}\boldsymbol{J}_s \wedge \boldsymbol{B}^0 + \nu_s\,\boldsymbol{J}_s = 0. \quad (4)$$

A l'ordre 0, la densité de particules n_s est égale à n_s^0 qui dépend seulement de la variable espace. Il s'ensuit alors

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} - \frac{n_s^0 q_s^2}{m_s}\boldsymbol{E} - \frac{q_s}{m_s}\boldsymbol{J}_s \wedge \boldsymbol{B}^0 + \nu_s\,\boldsymbol{J}_s = 0. \quad (5)$$

Nous introduisons respectivement la pulsation plasma et la pulsation cyclotron de chaque espèce s :

$$\omega_{ps}\,(\boldsymbol{x}) := \sqrt{\frac{q_s^2 n_s^0}{\varepsilon_0\, m_s}}, \quad \Omega_{cs}\,(\boldsymbol{x}) := \frac{q_s|\boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{x})|}{m_s}. \quad (6)$$

Nous notons $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{x})|}$. Alors, l'équation (5) se réécrit

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} - \varepsilon_0\,\omega_{ps}\,\boldsymbol{E} - \Omega_{cs}\,\boldsymbol{J}_s \wedge \boldsymbol{b} + \nu_s\,\boldsymbol{J}_s = 0. \quad (7)$$

On nomme cette nouvelle équation encore équation d'*Euler*.

Maintenant, nous allons introduire les équations de Maxwell dans le vide à l'ordre un en ϵ. Soit

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = c^2\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_s \boldsymbol{J}_s\,; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}\,; \quad (9)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_s \rho_s\,; \quad (10)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0\,; \quad (11)$$

où les constantes ε_0 et c sont respectivement la permittivité du vide et la vitesse de la lumière. Les variables $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{J}_s$ et ρ_s dépendent des variables temporelles t et spatiales $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Les conditions initiales, à l'instant $t = 0$, sont

$$\boldsymbol{E}_0, \quad \boldsymbol{B}_0, \quad \boldsymbol{J}_{s,0}.$$

Ces quatre équations, ci-dessus, sont nommées respectivement *Maxwell–Ampère*, *Maxwell–Faraday*, *Maxwell-Gauss* et *Maxwell flux magnétique*. Les équations (8) et (9) sont des équations d'évolution, tandis que (10) et (11) sont appelées équations de contrainte.

Les équations (8)-(11) contiennent implicitement l'équation de continuité de la charge pour chaque espèce, reliant les densités de charges ϱ_s et de courant $\mathcal{J}_s$ pour chaque espèce ; obtenue en combinant la dérivée temporelle de (10) et la divergence de (8) :

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{J}_s = 0. \tag{12}$$

Nous avons alors un modèle couplé qui décrit les champs électriques et les courants de l'onde, construit par les équations dérivés de Maxwell (8), (9) et l'équation d'Euler (7) pour les différentes espèces. Nous supposons que le plasma est constitué de deux espèces, ions et électrons. Mathématiquement, la lettre s qui désigne le type de l'espèce, sera à remplacer par les chiffres 1 ou 2. Soit le modèle :

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_1}{\partial t} = \varepsilon_0\, \omega_{p1}^2\, \boldsymbol{E} + \Omega_{c1}\, \boldsymbol{J}_1 \wedge \boldsymbol{b} - \nu_1\, \boldsymbol{J}_1\,; \tag{13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_2}{\partial t} = \varepsilon_0\, \omega_{p2}^2\, \boldsymbol{E} + \Omega_{c2}\, \boldsymbol{J}_2 \wedge \boldsymbol{b} - \nu_2\, \boldsymbol{J}_2\,; \tag{14}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = c^2\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{B} - \frac{1}{\varepsilon_0}\, \boldsymbol{J}_1 - \frac{1}{\varepsilon_0}\, \boldsymbol{J}_2\,; \tag{15}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\,\mathbf{rot}\, \boldsymbol{E}\,. \tag{16}$$

Nous appelons les équations (13)–(16) *modèle Euler–Maxwell linéarisé*. Ce modèle est semblable à celui obtenu et étudié dans [2] en régime harmonique. Les équations de ce modèle et les équations de divergence sont insuffisantes pour caractériser entièrement les champs électromagnétiques et le courant partiel des particules de l'espèce s. Ainsi, ce modèle doit être complété par des conditions sur le bord du domaine. Supposons que la variable $(t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega$, où T est un réel strictement positif et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. Soit Γ le bord de Ω et $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal unitaire sortant. Cette frontière est composée de deux parties : $\Gamma = \overline{\Gamma_A} \cup \overline{\Gamma_P}$ avec $\overline{\Gamma_A}$ représentant une antenne qui émet l'onde, et $\overline{\Gamma_P}$ le reste. Nous imposons donc des conditions pour chaque partie :

$$\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_P \tag{17}$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_P \tag{18}$$

$$\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{B}_\top = \boldsymbol{g}, \quad \text{sur} \quad \Gamma_A \tag{19}$$

avec $\boldsymbol{g}$, une fonction donnée qui dépend à la fois de t et $\boldsymbol{x}$. La condition (19) est une condition d'*onde entrante* (ou *sortante* si $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$). Les équations (17) et (18) sont des conditions de *conducteur parfait*. Pour plus de détails sur ces conditions, nous renvoyons à [1] et [7].

D'un point de vue mathématique, nous voulons résoudre notre modèle Euler–Maxwell avec les conditions (17)–(19) imposées dans différents cas. La condition (17) est une condition essentielle et la condition (18) est une condition naturelle.

Le schéma de ce mémoire est le suivant. Dans la section §2, nous rappelons des définitions et des résultats utiles pour la suite de cette étude. Nous introduisons aussi de nouveaux espaces, ainsi que leurs propriétés. Ces derniers sont adaptés à l'étude des champs électromagnétiques et dépendent du temps et de l'espace. Nous aurons besoin de ces espaces dans la résolution des formulations variationnelles posées. Dans la section §3, nous résolvons les équations du modèle Euler–Maxwell dans trois cas. D'abord, nous supposons que $\Gamma_A = \emptyset$ et donc la conditions (17) est imposée sur toute la frontière. C'est la condition du conducteur parfait. Puis, nous étudions le cas Silver–Müller : la partie $\Gamma_A \neq \emptyset$ et $\Gamma_P \neq \emptyset$; nous avons donc

dans ce cas les deux conditions (17) et (19) réunies. Nous commençons à résoudre le problème avec le cas homogène, $\boldsymbol{g} = 0$ ensuite nous passons au cas $\boldsymbol{g} \neq 0$. Les résolutions sont basées sur la théorie des semi-groupes et les théorèmes de Hille–Yosida. Enfin, dans la section §4, nous allons récupérer le modèle de Maxwell en récupérant les équations de divergences (10) et (11). Aussi, nous allons montrer dans cette section que la condition (18) c'est à dire $\boldsymbol{B}(t) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ est bien vérifiée, pour tout $t \in [0, T]$, sur Γ_P dans le cas du conducteur parfait et le cas de Silver–Müller.

2 Outils mathématiques et espaces fonctionnels

Dans cette section, les énoncés sont donnés sans démonstration ; nous renvoyons le lecteur intéressé à [5, 1, 3, 4].

2.1 Théorème de Lax–Milgram

On rappelle que *le dual* d'un espace E est l'ensemble E' des formes linéaires continues sur E. L'action d'une forme linéaire $\boldsymbol{\psi} \in E'$ sur un vecteur $\boldsymbol{v} \in E$ est notée $\langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{v} \rangle_E$. La *norme duale* $\|\boldsymbol{\psi}\|_{E'}$ est le plus petit $C_{\boldsymbol{\psi}} \geqslant 0$ tel que

$$\forall \boldsymbol{v} \in E, \quad |\langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{v} \rangle_E| \leqslant C_{\boldsymbol{\psi}} \|\boldsymbol{v}\|_E.$$

$(E', \|.\|_{E'})$ est un espace de Banach.

Dans ce qui suit, on considère un espace de Hilbert H ; sa norme $\|.\|_H$ dérive d'un produit scalaire $(. \mid .)_H$. Soit H' l'espace dual.

Une forme bilinéaire $a(.,.)$ sur $H \times H$ est continue si, et seulement si, il existe $C_a \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in H \times H, |a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqslant C_a \|\boldsymbol{u}\|_H \|\boldsymbol{v}\|_H.$$

Théorème 2.1. *(Lax–Milgram). Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire sur $H \times H$ continue et coercitive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall \boldsymbol{v} \in H \times H, \quad |a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})| \geqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|_H^2.$$

Alors, pour tout $f \in H'$, il existe un unique $\boldsymbol{u} \in H$ tel que :

$$\forall \boldsymbol{v} \in H \times H, \quad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle f, \boldsymbol{v} \rangle_H.$$

De plus il existe une constante $C > 0$, indépendante de f, telle que :

$$\|\boldsymbol{u}\|_H \leqslant C \|f\|_{H'}.$$

2.2 Opérateurs non-bornés

2.2.1 Définitions

Définition 2.2. *Un opérateur non-borné sur un espace de Banach X est un couple $(D(A), A)$, où $D(A)$ est un sous espace vectoriel de X et A une application linéaire de $D(A)$ vers X. On dit que $D(A)$ est le domaine de A.*
On définit ainsi l'image de A par :

$$R(A) := \{A\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in D(A)\},$$

et son graphe par :

$$G(A) := \{(\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in D(A)\}.$$

Définition 2.3. *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non-borné dans l'espace de Hilbert H. Il est dit monotone ssi*

$$\forall \boldsymbol{v} \in D(A), \quad (A\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v})_H \geqslant 0.$$

Si de plus on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall f \in H, \quad \exists \boldsymbol{u} \in D(A), \quad \boldsymbol{u} + \lambda A\boldsymbol{u} = f,$$

alors l'opérateur est dit maximal monotone.

2.2.2 Propriétés

Proposition 2.4. *Soit A un opérateur monotone. S'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $R(I + \lambda_0 A) = H$, alors A est maximal monotone.*

Nous allons présenter maintenant deux théorèmes de Hille–Yosida très importants dans la théorie des semi-groupes. Les démonstrations sont bien détaillées dans la référence [5].

Théorème 2.5. *(Hille–Yosida sans second membre). Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors, pour tout $\boldsymbol{u}_0 \in D(A)$ il existe une fonction*

$$\boldsymbol{u} \in C^1([0,T]; H) \cap C([0,T]; D(A)),$$

unique telle que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \boldsymbol{u}'(t) + A\boldsymbol{u}(t) & = & 0 \quad sur \quad [0,T]; \\ \boldsymbol{u}(0) & = & \boldsymbol{u}_0. \end{array} \right.$$

De plus on a

$$|\boldsymbol{u}(t)| \leq |\boldsymbol{u}_0| \quad et \quad |\boldsymbol{u}'(t)| = |A\boldsymbol{u}| \leq |A\boldsymbol{u}_0| \quad \forall t > 0.$$

Théorème 2.6. *(Hille–Yosida avec second membre). Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors, pour tout $\boldsymbol{u}_0 \in D(A)$ et tout $f \in W^{1,1}(0,T; H)$ il existe une fonction*

$$\boldsymbol{u} \in C^1([0,T]; H) \cap C([0,T]; D(A)),$$

unique telle que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \boldsymbol{u}'(t) + A\boldsymbol{u}(t) & = & f(t) \quad sur \quad [0,T]; \\ \boldsymbol{u}(0) & = & \boldsymbol{u}_0. \end{array} \right.$$

2.3 Espaces fonctionnels

Dans cette section, on considère Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ. Tous les espaces fonctionnels sont définis sur cet ouvert. On notera les espaces des champs vectoriels en caractère gras.

Définition 2.7. *L'espace* L^2 *est composé des fonction* f *mesurables sur* Ω*, et telles que*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} := \left\{\int_\Omega |f|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Muni de la norme $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$, L^2 *est un espace de Banach. En outre, c'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(f \mid g) = \int_\Omega fg \quad dx.$$

On définit ainsi l'espace fonctionnel des champs vectoriels, $\mathbf{L^2}(\Omega) = \mathrm{L}^2(\Omega)^3$, qui jouera un rôle important dans la suite. Le produit scalaire de $\mathbf{L^2}(\Omega)$ sera noté $(. \mid .)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition 2.8. *Soient* $m \in \mathbb{N}$*,* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* X *un espace de Banach. On définit :*

- $\mathrm{L}^1(I;\mathrm{X})$ *est l'ensemble des fonctions mesurables de l'intervalle* I *vers* X *telles que :*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1(I;\mathbf{X})} := \int_I \|f\|\mathbf{x} < \infty.$$

Muni de la norme $\|.\|_{\mathrm{L}^1(I;\mathrm{X})}$, $\mathrm{L}^1(I;\mathrm{X})$ *est un espace de Banach.*

- $\mathbf{L}^1(I;\mathrm{X}) = (\mathrm{L}^1(I;\mathrm{X}))^3$ *est un espace de Banach.*

- $\mathrm{W}^{\mathrm{m},1}(I;\mathrm{X}) = \{f \in \mathrm{L}^1(I;\mathrm{X}) : \forall k \in \mathbb{N}, k \leq m, f^{(k)} \in \mathrm{L}^1(I;\mathrm{X})\}$*, muni de la norme* $\|f\|_{\mathrm{W}^{\mathrm{m},1}(I;\mathrm{X})} := \sum_{k=0}^{m} \|f^{(k)}\|_{\mathrm{L}^1(I;\mathrm{X})}$*, est un espace de Banach.*

- $\mathbf{W}^{m,1}(I;\mathrm{X}) = (\mathrm{W}^{\mathrm{m},1}(I;\mathrm{X}))^3$ *est un espace de Banach.*

- *Les espaces* $C(I;\mathrm{X})$ *et* $C^m(I;\mathrm{X})$ *sont respectivement l'ensemble des fonctions continues et de classe* C^m *sur* I*, à valeurs dans* X*.*

Soient $s \in \mathbb{R}$*. On définit*

- $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) := \{\boldsymbol{v} : v_i \in \mathcal{D}(\Omega); i = 1,2,3\}$.

Les espaces ci-dessous sont des espaces de Hilbert :

- $\mathbf{H}^s(\Omega) := \{\boldsymbol{v} : v_i \in \mathrm{H}^s(\Omega), i = 1,2,3\}$.
- $\mathbf{L}^2(\Gamma) := \{\boldsymbol{v} : v_i \in \mathrm{L}^2(\Gamma), i = 1,2,3\}$.
- $\mathbf{H}^s(\Gamma) := \{\boldsymbol{v} : v_i \in \mathrm{H}^s(\Gamma), i = 1,2,3\}$.

Définition 2.9. *Soit* Γ' *une partie du bord. On définit l'espace*

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma') = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma'), \boldsymbol{v} \text{ prolongé par } 0 \text{ sur } \Gamma'' \text{ est un élément de } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\}.$$

On note $\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma')$ *l'espace dual de* $\widetilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma')$*, aussi on note* $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma')$ *le dual de* $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma')$*.*

2.3.1 Opérateurs rotationnel-divergence-gradient

Soient $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ un vecteur tel que chaque composante est définie sur Ω et v un scalaire défini sur Ω.

Définition 2.10. *On appelle rotationnel, et on note* **rot**, *l'opérateur qui, à un vecteur* $\boldsymbol{v}$, *associe le vecteur* $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}$ *défini par*

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Définition 2.11. *On appelle divergence, et on note* div, *l'opérateur qui, à un vecteur* $\boldsymbol{v}$, *associe le scalaire* $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ *défini par*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Définition 2.12. *On appelle gradient, et on note* **grad**, *l'opérateur qui, à un scalaire* v, *associe le vecteur* $\mathbf{grad}\,v$ *défini par*

$$\mathbf{grad}\,v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Proposition 2.13. *On a, au sens des distributions,*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,v = 0,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = 0.$$

2.3.2 Espaces $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$, $\mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega)$

Définition 2.14. *On définit les espaces de Hilbert* $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ *et* $\mathbf{H}(div;\Omega)$ *par*

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\},$$
$$\mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div}\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\},$$

munis des normes canoniques

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\boldsymbol{\Omega})} := \left\{ \int_\Omega (|\boldsymbol{v}|^2 + |\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}|^2) dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega)} := \left\{ \int_\Omega (|\boldsymbol{v}|^2 + |\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^2) dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Aussi, on est amené à introduire l'espace de Hilbert suivant :

$$\mathbf{H_0}(\mathbf{rot};\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) : \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$\mathbf{H_0}(\operatorname{div};\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega) : \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Proposition 2.15. *On considère*

- $\mathbf{H_0}(\mathbf{rot};\Omega)$ = *l'adhérence de* $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ *dans* $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ *selon la norme* (20)
- $\mathbf{H_0}(\operatorname{div};\Omega)$ = *l'adhérence de* $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ *dans* $\mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega)$ *selon la norme* (21)

2.3.3 Traces des champs vectoriels

Maintenant, nous passons à définir des nouvelles traces et espaces qui seront utiles dans les sections §3 et §4. Nous donnerons aussi quelques propriétés à ces nouvelles.

Théorème 2.16. *Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ une fonction définie sur Ω. Sa trace normale $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma$ sue Γ est notée $\gamma_n\boldsymbol{v}$, et γ_n s'appelle l'application trace normale.*

L'application γ_n est continue de $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ dans $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Définition 2.17. *Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ une fonction définie sur Ω. Sa trace tangentielle $\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{n}_{|\Gamma}$ sur Γ est notée $\gamma_\top\boldsymbol{v}$, et $\gamma_\top$ s'appelle l'application trace tangentielle.*

Soit l'espace $\mathbf{TT}(\Gamma)$ de trace tangentielle défini par

$$\mathbf{TT}(\Gamma) := \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \exists \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega), \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{n}_{|\Gamma}\}.$$

On déduit donc que l'application $\gamma_\top$ est continue et surjective de $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ dans $\mathbf{TT}(\Gamma)$.

Définition 2.18. *Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ une fonction définie sur Ω. Sa composante tangentielle $\boldsymbol{v}_\top := \boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{n})_{|\Gamma}$ sur Γ est notée $\pi_\top\boldsymbol{v}$, et $\pi_\top$ s'appelle l'application composante tangentielle.*

Soit l'espace $\mathbf{TC}(\Gamma)$ de composante tangentielle défini par

$$\mathbf{TC}(\Gamma) := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \exists \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega), \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{v}_{\top|\Gamma}\}.$$

De cela découle la continuité et la surjectivité de l'application $\pi_\top$ de $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ dans $\mathbf{TC}(\Gamma)$.

Définition 2.19. *Soit l'espace tangentiel $\mathbf{L}^2_t(\Gamma)$ défini par*

$$\mathbf{L}^2_t(\Gamma) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(\Gamma) : \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{n} = 0\}.$$

C'est un sous espace fermé de $\mathbf{L}^2(\Gamma)$.

Proposition 2.20. *On a :*

$$\mathbf{TT}(\Gamma)\cap\mathbf{TC}(\Gamma) \subset \mathbf{L}^2_t(\Gamma).$$

On suppose dans la suite que la frontière $\Gamma = \overline{\Gamma'}\cup\overline{\Gamma''}$ avec $\Gamma'\cap\Gamma'' = \emptyset$. Et donc, on peut définir la restriction des applications $\gamma_\top$ et $\pi_\top$ sur une partie de la frontière en donnant quelques propriétés.

Théorème 2.21. *L'application $\gamma_{\top'} : \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{n}_{|\Gamma'}$ est linéaire, continue et surjective de $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ dans $\mathbf{TT}(\Gamma')$.*
L'application $\pi_{\top'} : \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{n})_{|\Gamma'}$ est linéaire, continue et surjective de $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ dans $\mathbf{TC}(\Gamma')$.

Définition 2.22. *On considère*

$$\mathbf{H}''_0(\mathbf{rot};\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) : \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{n}_{|\Gamma''} = 0\}.$$

On définit ci-dessous deux sous espaces vectoriels respectivement de $\mathbf{TT}(\Gamma')$ et $\mathbf{TC}(\Gamma')$.

Définition 2.23. *Soient*

- $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma') := \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma') : \exists \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0''(\mathbf{rot};\Omega), \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n}_{|\Gamma'}\},$
  $= \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{TT}(\Gamma') : \textit{ le prolongement de } \boldsymbol{\varphi} \textit{ par 0 à } \Gamma \textit{ appartient à } \mathbf{TT}(\Gamma)\}$

L'application $\gamma^0_{\top'} : \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n}_{|\Gamma'}$ *est linéaire, continue et surjective de* $\mathbf{H}_0''(\mathbf{rot};\Omega)$ *dans* $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma')$.

- $\widetilde{\mathbf{TC}}(\Gamma') := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma') : \exists \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0''(\mathbf{rot};\Omega), \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{v}_{\top|\Gamma'}\},$
  $= \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TC}(\Gamma') : \textit{ le prolongement de } \boldsymbol{\lambda} \textit{ par } 0 \textit{ à } \Gamma \textit{ appartient à } \mathbf{TC}(\Gamma)\}$

L'application $\pi^0_{\top'} : \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{n} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n})_{|\Gamma'}$ *est linéaire, continue et surjective de* $\mathbf{H}_0''(\mathbf{rot};\Omega)$ *dans* $\widetilde{\mathbf{TC}}(\Gamma')$.

Remarque 2.24.

Les espaces $\mathbf{TT}(\Gamma)$, $\mathbf{TC}(\Gamma)$, $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma')$ et $\widetilde{\mathbf{TC}}(\Gamma')$ ont été décrits dans l'article [2]. Par ailleurs, il existe des autres définitions intrinsèques pour ces espaces. De ces définitions découlent des expressions de normes hilbertiennes, autrement dit, ces espaces munis de ces normes sont hilbertiens. Ils sont désignés respectivement, dans les articles [1], [3] et [4], $\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}_\Gamma,\Gamma)$, $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}_\Gamma,\Gamma)$, $\mathbf{H}_{||}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}^0_{\Gamma'},\Gamma')$ et $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{curl}^0_{\Gamma'},\Gamma')$.

2.3.4 Dualités et intégrations par parties

Nous présenterons dans cette paragraphe quelques formules d'intégration par parties en utilisant des résultats de dualité entre les espaces de trace tangentielle et de composante tangentielle. Pour les démonstrations de ces formules, nous renvoyons le lecteur aux articles [1], [3] et [4].

Théorème 2.25. *Soit* $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$:

$$(\boldsymbol{u} \mid \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}) - (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{22}$$

Soit $(\boldsymbol{u},v) \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$:

$$(\boldsymbol{u} \mid \mathbf{grad}\, v) + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \mid v) = \langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, v \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{23}$$

Théorème 2.26. *Soit* $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot};\Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$:

$$(\boldsymbol{u} \mid \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}) - (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}) = 0.$$

Théorème 2.27. *On a l'identité de dualité suivante :*

$$(\mathbf{TT}(\Gamma))' = \mathbf{TC}(\Gamma).$$

Cette dualité entre ces deux espaces est notée ${}_\gamma\langle .,. \rangle_\pi$ *ou* ${}_\pi\langle .,. \rangle_\gamma$.

On a la formule d'intégration par parties, pour $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$:

$$(\boldsymbol{u} \mid \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}) - (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}) = {}_\gamma\langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_\top \rangle_\pi = -{}_\gamma\langle \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}_\top \rangle_\pi.$$

Théorème 2.28. *On a les identités de dualité suivantes :*

$$(\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma'))' = \mathbf{TC}(\Gamma'),$$
$$\mathbf{TT}(\Gamma') = (\widetilde{\mathbf{TC}}(\Gamma'))'.$$

Cette dualité est notée ${}_{\gamma_\top^0{}'}\langle .,. \rangle_{\pi_\top{}'}$ *ou* ${}_{\pi_\top{}'}\langle .,. \rangle_{\gamma_\top^0{}'}$.

On a les formules d'intégration par parties, pour $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{H}_0''(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$:

$$(\boldsymbol{u} \mid \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}) - (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}) = {}_{\gamma_\top^0{}'}\langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_\top \rangle_{\pi_\top{}'}; \tag{24}$$

ou bien,

$$(\boldsymbol{u} \mid \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}) - (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}) = -{}_{\gamma_\top{}'}\langle \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}_\top \rangle_{\pi_\top^0{}'}. \tag{25}$$

2.4 Résultats techniques

Tout au long de cette section, E et F désignent deux espaces de Banach de normes respectives $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$; et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 2.29. *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. On appelle norme opératorielle de T, la plus petite constante C qui vérifie*

$$\forall \boldsymbol{v} \in E, \quad \|T(\boldsymbol{v})\|_F \leq C \|\boldsymbol{v}\|_E.$$

Théorème 2.30. *Soit A une application linéaire et continue de E dans F. L'application $f \longmapsto Af$ envoie $C^m(I; E)$ vers $C^m(I; F)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout intervalle I.*

Théorème 2.31. *Pour tous $f \in \mathcal{D}'(]0, T[; E)$ et A application linéaire continue de E dans F, on a l'identité :*

$$\frac{\partial}{\partial t}(Af) = A(\frac{\partial f}{\partial t}). \tag{26}$$

Théorème 2.32. *(de Banach–Schauder, ou de l'application ouverte). Soit T une application linéaire, continue et bijective de E dans F. Alors, la réciproque T^{-1} est continue.*

De façon équivalente : T est une application ouverte, i.e, elle envoie les ouverts de E sur les ouverts de F.

On suppose maintenant que E est un espace de Hilbert.

Théorème 2.33. *Soit A une application linéaire, continue et surjective de E dans F. L'application A est bijective de* $\ker(A)^\perp$ *dans F.*

3 Bonne position des équations d'évolution

Dans cette section, nous nous intéressons, mathématiquement, à l'existence de $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{J}_s$ de chaque espèce (ions et électrons) qui vérifient les équations du modèle de la section 1. Ainsi, pour pouvoir définir le champ électromagnétique d'une manière unique, et donc les courants partiels, nous devons imposer des *conditions aux limites*, ainsi que des *conditions initiales* à l'instant $t = 0$. Au cours de l'étude, nous envisageons trois cas. Dans un premier temps, nous traiterons le problème avec la condition aux limites de conducteur parfait sur toute la frontière. Ensuite, dans le deuxième cas, nous ajouterons les conditions de Silver–Müller homogène sur une partie de la frontière. Le dernier cas se traite comme le deuxième mais avec les conditions non homogène de Silver–Müller. Les démonstrations sont basées sur les théorèmes de Hille–Yosida.

3.1 Cadre du travail

Nous considérons un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, et nous notons Γ sa frontière. Physiquement, le domaine Ω représente le volume de plasma dans le tokamak. On note $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal unitaire sortant de Ω.

Nous supposons dans cette étude, que les fonctions ν_s, Ω_{cs} et ω_{ps}, pour chaque espèce, sont continues de Ω dans $\mathbb{R}$. De plus, nous supposons qu'il existe des réels strictement positifs ν^*, Ω^*, ω^* et ω_* tels que, pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et pour chaque espèce s, ces fonctions vérifient :

$$0 \leq \nu_s(\boldsymbol{x}) \leq \nu^*, \tag{27}$$

$$|\Omega_{cs}(\boldsymbol{x})| \leq \Omega^*, \tag{28}$$

$$0 < \omega_* \leq |\omega_{ps}(\boldsymbol{x})| \leq \omega^*. \tag{29}$$

De plus, nous avons :

$$|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})| = 1, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{30}$$

Pour $s \in \{1, 2\}$ et $\boldsymbol{x} \in \Omega$ fixés, l'application $\boldsymbol{v} \longmapsto \Omega_{cs}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{v} + \nu_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$ définie de l'espace $\mathbb{R}^3$ dans lui même est linéaire. Alors, il existe une matrice $\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\Omega_{cs}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{v} + \nu_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} = \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3.$$

De cette équation, nous définirons de nouvelles matrices qui seront nécessaires pour la suite de ce travail. Nous y énumérons également quelques propriétés.

On note $\|.\|$ la norme opératorielle de l'espace $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.1. *Soit $s \in \{1, 2\}$. Soit λ_s un réel strictement positif et assez petit tel que $\|\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\| < 1$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Alors $\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})$ est inversible pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$, où $\mathbb{I}$ est la matrice identité.*

Démonstration.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbb{S}_n : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ définit par

$$\mathbb{S}_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^k.$$

$(\mathbb{S}_n)_n$ est normalement convergente sur Ω. En effet, les fonctions ν_s, Ω_{cs}, ω_{ps} et $\boldsymbol{b}$ sont bornées uniformément, d'après les inégalités (27), (28), (29) et (30). Donc, il existe $c_1 > 0$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \|\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\|_\infty \leq c_1. \tag{31}$$

Or, $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc toutes les normes sont équivalentes. Il existe $c_2 > 0$ qui vérifie

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \|\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\| \leq c_2 \|\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\|_\infty. \tag{32}$$

De (31) et (32) on déduit l'existence de $c_3 > 0$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \|\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\| \leq c_3.$$

Soit $\rho \in]0,1[$ fixé. On pose $\lambda_s = \frac{\rho}{c_3}$. On a alors

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \|\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\| &\leq |\lambda_s| \, \|\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\| \\ &\leq \frac{\rho}{c_3} c_3 \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Or, $\|(\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^k\| \leq \|\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\|^k$ et donc

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \|(\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^k\| < \rho^k.$$

De plus, ρ^k est le terme générale d'une série géométrique de raison dans $]0,1[$ donc convergente, ce qui entraine la convergence normale de la suite des matrices $(\mathbb{S}_n)_n$ sur Ω. Celle-ci implique en particulier la convergence simple de $(\mathbb{S}_n)_n$. Notons $\mathbb{S}(\boldsymbol{x})$ sa limite.

On passe maintenant à calculer $(\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))\mathbb{S}_n(\boldsymbol{x})$ pour un $\boldsymbol{x}$ fixé. On trouve

$$(\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))\mathbb{S}_n(\boldsymbol{x}) = \mathbb{I} + (-1)^n (\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^{n+1},$$

ce qui tend vers $\mathbb{I}$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Mais d'autre part,

$$(\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))\mathbb{S}_n(\boldsymbol{x}) \longrightarrow (\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))\mathbb{S}(\boldsymbol{x}) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquence, $(\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))\mathbb{S}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{I}$. On conclut alors que $\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})$ est inversible pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et son inverse $(\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^{-1} = \mathbb{S}(\boldsymbol{x})$.

D'après ce qui précède, la matrice $(\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s)^{-1}$ est uniformément bornée sur Ω pour $s \in \{1,2\}$. Soit $\boldsymbol{x} \in \Omega$, nous avons

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\| &= \|\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^k\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \\ &= \frac{1}{1-\rho}, \end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega} \|(\mathbb{I} + \lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\rho}. \tag{33}$$

■

Proposition 3.2. *Il existe $\lambda > 0$ tel que $\|\lambda \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\| \leq \|\lambda_s \mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\|$ pour tout $s \in \{1,2\}$ et $\boldsymbol{x} \in \Omega$.*

Démonstration.

Il suffit de prendre $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

■

Nous notons $\zeta_1 = \sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega} \|(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1(\boldsymbol{x}))^{-1}\|$ et $\zeta_2 = \sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega} \|(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2(\boldsymbol{x}))^{-1}\|$. Ces nouvelles notations sont finies d'après l'équation (33) et la proposition 3.2. Elles seront utilisées par la suite. La proposition 3.1 nous permet d'introduire

Définition 3.3. *Soit la matrice* $\mathbb{D} : \Omega \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} = \omega_{p1}^2(\boldsymbol{x})(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_1(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{v} + \omega_{p2}^2(\boldsymbol{x})(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_2(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{v}$$

pour $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.4. *La matrice* $\mathbb{D}(\boldsymbol{x})$ *est positive pour tout* $\boldsymbol{x} \in \Omega$. *De plus, il existe* $\xi > 0$ *tel que*

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \|\mathbb{D}(\boldsymbol{x})\| \leq \xi.$$

Démonstration.

Soit $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Il suffit de montrer que la matrice $(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^{-1}$, pour $s = 1, 2$, est positive. Soit donc $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$. Nous avons

$$\begin{aligned}(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \lambda\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \\ &= |\boldsymbol{v}|^2 + \lambda(\Omega_{cs}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{v} + \nu_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v} \\ &= |\boldsymbol{v}|^2 + \lambda\nu_s(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{v}|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

car ν_s est positive. D'où $\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})$ est positive. Passons maintenant à son inverse. Prenons $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$. L'endomorphisme $\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x})$ est surjectif, il existe alors $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\boldsymbol{w} = (\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{\eta}$. En conséquent,

$$(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\eta}\cdot(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{\eta} \geq 0,$$

ce qui nous donne la positivité de $(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_s(\boldsymbol{x}))^{-1}$.

Il reste à montrer que $\mathbb{D}$ est uniformément bornée sur Ω. Considérons $\boldsymbol{x} \in \Omega$. D'après ce qu'on a vu précédemment

$$\begin{aligned}\|\mathbb{D}(\boldsymbol{x})\| &\leq \omega_{p1}^2(\boldsymbol{x})\|(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_1(\boldsymbol{x}))^{-1}\| + \omega_{p2}^2(\boldsymbol{x})\|(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_2(\boldsymbol{x}))^{-1}\| \\ &\leq (\omega^*)^2 \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_1(\boldsymbol{x}))^{-1}\| + (\omega^*)^2 \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_2(\boldsymbol{x}))^{-1}\| \\ &\leq (\omega^*)^2\zeta_1 + (\omega^*)^2\zeta_2.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$, on en déduit que

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \|\mathbb{D}(\boldsymbol{x})\| \leq (\omega^*)^2\zeta_1 + (\omega^*)^2\zeta_2.$$

La démonstration se termine en posant $\xi = (\omega^*)^2\zeta_1 + (\omega^*)^2\zeta_2$.

■

Nous rappelons que notre objectif est de résoudre, d'un point de vue mathématique, le modèle avec différentes conditions aux limites. Pour ce faire, nous réécrivons notre modèle, complété par une condition initiale, comme un système d'équations d'évolution du premier ordre et nous considérons le problème homogène suivant

Trouver $\boldsymbol{u}$ *tel que*

$$\left\{\begin{array}{lcll}\boldsymbol{u}'(t) + \mathbb{A}\boldsymbol{u}(t) &=& 0 \quad sur \quad [0,T]; \\ \boldsymbol{u}(0) &=& \boldsymbol{u}_0,\end{array}\right. \tag{34}$$

où $\mathbb{A}$ est un opérateur linéaire donné par la formule

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_1 & 0 & -\varepsilon_0\,\omega_{p1}^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_2 & -\varepsilon_0\,\omega_{p2}^2 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_0} & \frac{1}{\varepsilon_0} & 0 & -c^2\,\mathbf{rot} \\ 0 & 0 & \mathbf{rot} & 0 \end{pmatrix};$$

et

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1(t) \\ \boldsymbol{J}_2(t) \\ \boldsymbol{E}(t) \\ \boldsymbol{B}(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{J}_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial \boldsymbol{J}_2}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}(t) \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale

$$\boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1(0) \\ \boldsymbol{J}_2(0) \\ \boldsymbol{E}(0) \\ \boldsymbol{B}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{1,0} \\ \boldsymbol{J}_{2,0} \\ \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{B}_0 \end{pmatrix}.$$

A l'aide de la théorie des semi-groupes et en particulier les théorèmes de Hille–Yosida, nous prouverons qu'il existe une, et une seule, solution à valeurs dans un espace fonctionnel $\mathbf{X}$. Dans chaque cas, conducteur parfait et Silver–Müller, nous définirons l'opérateur non-borné associé à ce problème (nous ajouterons à $\mathbb{A}$ un indice respectivement 1 et 2).

Maintenant, il sera naturel d'introduire notre espace fonctionnel $\mathbf{X}$. On se place dans $\mathbf{X} = \mathbf{L^2}(\boldsymbol{\Omega})^4$. C'est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w})_{\mathbf{X}} := \left(\frac{1}{\varepsilon_0\,\omega_{p1}^2}\boldsymbol{u_1} \mid \boldsymbol{w_1}\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_0\,\omega_{p2}^2}\boldsymbol{u_2} \mid \boldsymbol{w_2}\right) + (\varepsilon_0\,\boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{w_3}) + \left(c^2\varepsilon_0\,\boldsymbol{u_4} \mid \boldsymbol{w_4}\right),$$

et de la norme $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{X}} := \sqrt{(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u})_{\mathbf{X}}}$ associée. Cette norme est équivalente à la norme canonique de $\mathbf{L^2}(\boldsymbol{\Omega})^4$, d'après les inégalités (27), (28), (29) et l'équation (30). Dans ce qui suit nous comprendrons l'utilité de cette norme.

3.2 Conditions aux limites de conducteur parfait

Dans cette section, nous supposons que le domaine Ω, dans lequel nous résolvons les équations du modèle (1), est entouré d'un conducteur parfait qui impose

$$\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \tag{35}$$

avec la condition initiale

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1(t) \\ \boldsymbol{J}_2(t) \\ \boldsymbol{E}(t) \\ \boldsymbol{B}(t) \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{1,0} \\ \boldsymbol{J}_{2,0} \\ \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{B}_0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Mathématiquement, ces conditions aux limites de conducteur parfait sont suffisantes pour assurer l'existence et l'unicité du champ électromagnétique et du courant partiel des particules de chaque espèce.

L'opérateur non-borné $(D(\mathbb{A}_1), \mathbb{A}_1)$ sur $\mathbf{X}$, associé au problème abstrait (34), est défini dans ce cas par

$$D(\mathbb{A}_1) = \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H_0}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega),$$

et

$$\mathbb{A}_1 : \boldsymbol{u} \in D(\mathbb{A}_1) \longrightarrow \mathbb{A}_1 \boldsymbol{u} \in \mathbf{X} \quad \text{ tel que } \quad \mathbb{A}_1 \boldsymbol{u} = \mathbb{A} \boldsymbol{u}.$$

$D(\mathbb{A}_1)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{X}$, muni de la norme

$$\|\boldsymbol{u}\|_{D(\mathbb{A}_1)} = \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{X}} + \|\mathbb{A}_1 \boldsymbol{u}\|_{\mathbf{X}}.$$

Afin d'appliquer la théorie des semi-groupes, nous prouverons immédiatement quelques propriétés utiles pour montrer l'existence et l'unicité de la solution.

Proposition 3.5. *L'opérateur $\mathbb{A}_1$ est monotone.*

Démonstration.

Soit $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{u_4} \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}_1)$. On a

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_1 \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u})_X &= \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \omega_{p1}^2} \mathbb{M}_1 \boldsymbol{u_1} \mid \boldsymbol{u_1} \right) - (\boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{u_1}) + \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \omega_{p2}^2} \mathbb{M}_2 \boldsymbol{u_2} \mid \boldsymbol{u_2} \right) - (\boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{u_2}) \\ &+ (\boldsymbol{u_1} \mid \boldsymbol{u_3}) + (\boldsymbol{u_2} \mid \boldsymbol{u_3}) - \left(\varepsilon_0 c^2 \, \mathbf{rot} \, \boldsymbol{u_4} \mid \boldsymbol{u_3} \right) + \left(\varepsilon_0 c^2 \, \mathbf{rot} \, \boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{u_4} \right) \end{aligned}$$

Or, pour $s = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \omega_{ps}^2} \mathbb{M}_s \boldsymbol{u}_s \mid \boldsymbol{u}_s \right) &= \left(\frac{\nu_s}{\varepsilon_0 \omega_{ps}^2} \boldsymbol{u}_s \mid \boldsymbol{u}_s \right) + \left(\frac{\Omega_{cs}}{\varepsilon_0 \omega_{ps}^2} \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{u}_s \mid \boldsymbol{u}_s \right) \\ &= \left(\frac{\nu_s}{\varepsilon_0 \omega_{ps}^2} \boldsymbol{u}_s \mid \boldsymbol{u}_s \right). \end{aligned}$$

D'où en particulier

$$(\mathbb{A}_1 \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u})_X = \left(\frac{\nu_1}{\varepsilon_0 \omega_{p1}^2} \boldsymbol{u_1} \mid \boldsymbol{u_1} \right) + \left(\frac{\nu_2}{\varepsilon_0 \omega_{p2}^2} \boldsymbol{u_2} \mid \boldsymbol{u_2} \right) - \varepsilon_0 c^2 [(\boldsymbol{u_3} \mid \mathbf{rot} \, \boldsymbol{u_4}) - (\mathbf{rot} \, \boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{u_4})].$$

En utilisant le fait que $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, on déduit d'après le théorème 2.26 que

$$(\mathbb{A}_1 \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u})_X = \left(\frac{\nu_1}{\varepsilon_0 \omega_{p1}^2} \boldsymbol{u_1} \mid \boldsymbol{u_1} \right) + \left(\frac{\nu_2}{\varepsilon_0 \omega_{p2}^2} \boldsymbol{u_2} \mid \boldsymbol{u_2} \right) \geq 0.$$

D'où le résultat. ■

Proposition 3.6. *L'opérateur $\mathbb{I} + \lambda \mathbb{A}_1$ est surjectif, i.e $R(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{A}_1) = \mathbf{X}$.*

Démonstration.

Soit $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_1} \\ \boldsymbol{f_2} \\ \boldsymbol{f_3} \\ \boldsymbol{f_4} \end{pmatrix} \in \mathbf{X}$, et cherchons $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{u_4} \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}_1)$, tel que $\boldsymbol{u} + \lambda \mathbb{A}_1 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$. Cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u_1} + \lambda \mathbb{M}_1 \boldsymbol{u_1} - \lambda \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \boldsymbol{u_3} &= \boldsymbol{f_1} && (37)\\
\boldsymbol{u_2} + \lambda \mathbb{M}_2 \boldsymbol{u_2} - \lambda \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \boldsymbol{u_3} &= \boldsymbol{f_2} && (38)\\
\boldsymbol{u_3} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \boldsymbol{u_1} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \boldsymbol{u_2} - \lambda c^2 \, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_4} &= \boldsymbol{f_3} && (39)\\
\boldsymbol{u_4} + \lambda \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_3} &= \boldsymbol{f_4} && (40)
\end{aligned}$$

De l'équation (37), (38) et (40) on déduit que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u_1} &= (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1)^{-1} (\boldsymbol{f_1} + \lambda \varepsilon_0 \, \omega_{p1}^2 \, \boldsymbol{u_3}),\\
\boldsymbol{u_2} &= (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2)^{-1} (\boldsymbol{f_2} + \lambda \varepsilon_0 \, \omega_{p2}^2 \, \boldsymbol{u_3}),\\
\boldsymbol{u_4} &= \boldsymbol{f_4} - \lambda \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_3}.
\end{aligned}$$

En injectant ces trois expressions dans l'équation (39) on trouve

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u_3} + \lambda^2 c^2 \, \mathbf{rot}\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_3} + \lambda^2 \mathbb{D} \boldsymbol{u_3} &= \boldsymbol{f_3} + \lambda c^2 \, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{f_4} - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1)^{-1} \boldsymbol{f_1}\\
&\quad - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2)^{-1} \boldsymbol{f_2}. \qquad (41)
\end{aligned}$$

Nous considérons maintenant la formulation variationnelle suivante.

Trouver $\boldsymbol{u_3} \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot}; \Omega)$ *tel que pour tout* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot}; \Omega)$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{v}) + \lambda^2 c^2 \, (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_3} \mid \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}) + \lambda^2 \, (\mathbb{D} \boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{f_3} \mid \boldsymbol{v}) + \lambda c^2 \, (\boldsymbol{f_4} \mid \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v})\\
&\quad - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \left((\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1)^{-1} \boldsymbol{f_1} \mid \boldsymbol{v} \right)\\
&\quad - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \left((\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2)^{-1} \boldsymbol{f_2} \mid \boldsymbol{v} \right).
\end{aligned}$$

On note $a(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{v})$ le premier membre et $L(\boldsymbol{v})$ le second membre. Le problème variationnel s'écrit alors :

Trouver $\boldsymbol{u_3} \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot}; \Omega)$ *tel que pour tout* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot}; \Omega)$

$$a(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}). \qquad (42)$$

Nous prouverons l'existence d'une unique solution au problème (42) en utilisant le théorème de Lax–Milgram. Vérifions alors que les hypothèses de ce théorème sont vérifiées.

La forme a est bilinéaire et continue. En effet, $\forall (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H_0}(\mathbf{rot}; \Omega)$

$$\begin{aligned}
|a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})| &\leq \|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} + \lambda^2 c^2 \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2} \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} + \lambda^2 \xi \|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2}\\
&= (1 + \lambda^2 \xi) \|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} + \lambda^2 c^2 \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2} \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2}\\
&\leq (1 + \lambda^2 \xi + \lambda^2 c^2) \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)}\\
&\leq C \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)}. \qquad (43)
\end{aligned}$$

a est coercitive : $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot};\Omega)$

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) &= \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{L}^2} + \lambda^2 c^2 \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{L}^2} + \lambda^2\,(\mathbb{D}\boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{u_3}) \\ &\geq \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{L}^2} + \lambda^2 c^2 \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &\geq \min(1,\lambda^2 c^2)\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{H(rot};\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où, il existe $\alpha = \min(1,\lambda^2 c^2) > 0$ tel que

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{H(rot};\Omega)}. \tag{44}$$

L est une forme linéaire et continue. En effet $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$:

$$\begin{aligned} |L(\boldsymbol{v})| &\leq \|\boldsymbol{f_3}\|_{\mathrm{L}^2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} + \lambda c^2 \|\boldsymbol{f_4}\|_{\mathrm{L}^2}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\quad + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\|(\mathbb{I}+\lambda\mathbb{M}_1)^{-1}\boldsymbol{f_1}\|_{\mathrm{L}^2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\|(\mathbb{I}+\lambda\mathbb{M}_2)^{-1}\boldsymbol{f_2}\|_{\mathrm{L}^2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leq [\|\boldsymbol{f_3}\|_{\mathrm{L}^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\zeta_1\|\boldsymbol{f_1}\|_{\mathrm{L}^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\zeta_2\|\boldsymbol{f_2}\|_{\mathrm{L}^2}]\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} + \lambda c^2\|\boldsymbol{f_4}\|_{\mathrm{L}^2}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leq C\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H(rot};\Omega)}. \end{aligned} \tag{45}$$

Comme $\mathbf{H_0}(\mathbf{rot};\Omega)$ est un espace de Hilbert, le théorème de Lax–Milgram nous permet de conclure que le problème variationnel (42) admet une, et une seule, solution $\boldsymbol{u_3} \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot};\Omega)$.

Dans le reste de la démonstration, nous interprétons la formulation variationnelle du problème (42).

Interprétation :

Soit $\boldsymbol{u_3}$ la solution du problème (42). Alors on a

$$a(\boldsymbol{u_3},\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}), \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot};\Omega).$$

Ce qui entraîne

$$a(\boldsymbol{u_3},\boldsymbol{v}) = L(v), \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega).$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_3} + \lambda^2 c^2\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3} + \lambda^2\mathbb{D}\boldsymbol{u_3} &= \boldsymbol{f_3} + \lambda c^2\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f_4} - \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I}+\lambda\mathbb{M}_1)^{-1}\boldsymbol{f_1} \\ &\quad - \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I}+\lambda\mathbb{M}_2)^{-1}\boldsymbol{f_2} \end{aligned} \tag{46}$$

dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega)$.
Posons maintenant

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_1} &= (\mathbb{I}+\lambda\mathbb{M}_1)^{-1}(\boldsymbol{f_1} + \lambda\varepsilon_0\,\omega_{p1}^2\,\boldsymbol{u_3}), \\ \boldsymbol{u_2} &= (\mathbb{I}+\lambda\mathbb{M}_2)^{-1}(\boldsymbol{f_2} + \lambda\varepsilon_0\,\omega_{p2}^2\,\boldsymbol{u_3}), \\ \boldsymbol{u_4} &= \boldsymbol{f_4} - \lambda\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ et $\boldsymbol{u_4}$ appartiennent à $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Ils satisfont respectivement les équations (37), (38) et (40). On va alors montrer qu'ils vérifient l'équation (39).

On a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u_3} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u_1} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u_2} - \lambda c^2\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_4} &= \boldsymbol{u_3} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_1)^{-1}(\boldsymbol{f_1} + \lambda\varepsilon_0\omega_{p1}^2\boldsymbol{u_3}) \\
&\quad + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_2)^{-1}(\boldsymbol{f_2} + \lambda\varepsilon_0\omega_{p2}^2\boldsymbol{u_3}) - \lambda c^2\ \mathbf{rot}(\boldsymbol{f_4} - \lambda\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3}) \\
&= \boldsymbol{u_3} + \lambda^2[\omega_{p1}^2\,(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_1)^{-1} + \omega_{p2}^2\,(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_2)^{-1}]\boldsymbol{u_3} \\
&\quad + \lambda^2 c^2\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_1)^{-1}\boldsymbol{f_1} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_2)^{-1}\boldsymbol{f_2} \\
&\quad - \lambda c^2\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f_4} \\
&\overset{(46)}{=} \boldsymbol{f_3} + \lambda c^2\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f_4} - \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_1)^{-1}\boldsymbol{f_1} - \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_2)^{-1}\boldsymbol{f_2} \\
&\quad + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_1)^{-1}\boldsymbol{f_1} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{M}_2)^{-1}\boldsymbol{f_2} - \lambda c^2\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f_4} \\
&= \boldsymbol{f_3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_4} = (\lambda c^2)^{-1}[\boldsymbol{u_3} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u_1} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{f_3}] \in \mathrm{L}^2(\Omega).$$

On conclut aisément que $\boldsymbol{u_4} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$. Ainsi, il existe $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{u_4} \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}_1)$, tel que $\boldsymbol{u} + \lambda\mathbb{A}_1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ ce qui achève la démonstration.

■

On peut alors annoncer le résultat suivant :

Théorème 3.7. *Supposons* $\boldsymbol{u}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{1,0} \\ \boldsymbol{J}_{2,0} \\ \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{B}_0 \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}_1)$*, c'est à dire*

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_{1,0}, \boldsymbol{J}_{2,0} \in \mathbf{L^2}(\Omega), \\ \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega), \\ \boldsymbol{E}_0 \wedge \boldsymbol{n} = 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma, \\ \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Alors, il existe une unique solution $\boldsymbol{u}$ *du problème d'évolution (34) ayant la régularité*

$$\boldsymbol{u} \in C^1([0,T];\mathbf{X}) \cap C([0,T];D(\mathbb{A}_1)).$$

C'est à dire

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2 &\in C^1([0,T];\mathbf{L^2}(\Omega)), \\
\boldsymbol{E} &\in C^1([0,T];\mathbf{L^2}(\Omega)) \cap C([0,T];\mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega)), \\
\boldsymbol{B} &\in C^1([0,T];\mathbf{L^2}(\Omega)) \cap C([0,T];\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)).
\end{aligned}$$

Démonstration.

Dans la proposition 3.5, on a montré que l'opérateur $\mathbb{A}_1$ est monotone. Puis, on a prouvé qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $R(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{A}_1) = \mathbf{X}$, proposition 3.6. Les hypothèses de la proposition 2.4 sont vérifiées. On conclut donc que l'opérateur $\mathbb{A}_1$ est maximal monotone. Le reste de la démonstration découle du théorème 2.5 de Hille–Yosida.

■

3.3 Conditions aux limites de Silver–Müller

Dans cette section, nous divisons la frontière Γ en deux parties : $\Gamma = \overline{\Gamma_A} \cup \overline{\Gamma_P}$ avec $\Gamma_A \cap \Gamma_P = \emptyset$. Comme précédemment, nous imposerons sur Γ des conditions aux limites. Sur la partie Γ_P, nous mettons une condition de conducteur parfait et sur Γ_A nous imposons une condition aux limites

$$\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{B}_\top = \boldsymbol{g}, \quad \text{sur } \Gamma_A, \quad \boldsymbol{g} \text{ donnée}, \tag{47}$$

ou bien, de façon analogue,

$$\boldsymbol{E}_\top - c\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{g}, \quad \text{sur } \Gamma_A, \quad \boldsymbol{g} \text{ donnée}. \tag{48}$$

Physiquement, Γ_P est une partie physique (matérielle), tandis que Γ_A est une partie artificielle de la frontière. Lorsque $\boldsymbol{g} = 0$, on a une condition d'onde sortante : les ondes électromagnétiques sortantes sont absorbées au passage de la frontière artificielle, cette condition s'appelle condition aux limites *absorbante*. D'autre part, si $\boldsymbol{g} \neq 0$, on a une condition *d'onde entrante*, où $\boldsymbol{g}$ représente le champ émis par une source extérieure. Les conditions (47) et (48) sont appelées *conditions de Silver–Müller*.

Mathématiquement, nous cherchons $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \boldsymbol{J}_2 \\ \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ qui vérifie l'équation

$$\boldsymbol{u}'(t) + \mathbb{A}_2 \boldsymbol{u}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \tag{49}$$

avec la condition initiale $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{1,0} \\ \boldsymbol{J}_{2,0} \\ \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{B}_0 \end{pmatrix}$, et les conditions aux limites de Silver–Müller

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_P, \\ \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{B}_\top = \boldsymbol{g} & \text{sur } \Gamma_A. \end{cases} \tag{50}$$

Ainsi, on a deux problèmes à résoudre : un avec condition aux limites homogène $\boldsymbol{g} = 0$ et l'autre avec condition aux limites non homogène $\boldsymbol{g} \neq 0$.

Ici, nous avons supposé que $\Gamma = \overline{\Gamma_A} \cup \overline{\Gamma_P}$. Ainsi, les notations qu'on a vu dans la section §2 sont changées. Nous avons pris $\Gamma_A = \Gamma'$ et donc $\Gamma_P = \Gamma''$. Les applications $\gamma_{\top'}$, $\pi_{\top'}$, $\gamma^0_{\top'}$ et $\pi^0_{\top'}$ sont notées respectivement γ_A, π_A, γ^0_A et π^0_A. Pour les espaces, $\mathbf{H}''_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ est désigné $\mathbf{H}^P_0(\mathbf{rot}; \Omega)$.

On introduit l'espace $\mathcal{H}$ défini par

$$\mathcal{H} = \quad \{(\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}) \in \mathbf{H}^P_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) : \quad \boldsymbol{w_1} \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{w_2}_\top = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_A\}.$$

$\mathcal{H}$ est un sous espace fermé de $\mathbf{H}^P_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, donc c'est un espace de Hilbert. Comme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le nouvel espace $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathcal{H}$ est alors hilbertien. On peut montrer que c'est un sous espace vectoriel de $\mathbf{X}$.

Dans cette sous-section, l'opérateur non-borné sur $\mathbf{X}$ associé au problème d'évolution (34) est $(\mathbb{A}_2, D(\mathbb{A}_2))$. Il est défini par

$$D(\mathbb{A}_2) = \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathcal{H},$$

et

$$\mathbb{A}_2 : D(\mathbb{A}_2) \longrightarrow \mathbf{X} : \boldsymbol{u} \longmapsto \mathbb{A}_2\boldsymbol{u} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}.$$

On munit le sous espace vectoriel $D(\mathbb{A}_2)$ de la norme

$$\|\boldsymbol{u}\|_{D(\mathbb{A}_2)} = \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{X}} + \|\mathbb{A}_2\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{X}}.$$

Nous traiterons ci-dessous l'existence et l'unicité de la solution dans les deux cas de Silver–Müller. Pour la démonstration, cas homogène, nous allons essayer de faire la même chose qu'au §3.2, *i.e.* montrer que $\mathbb{A}_2$ est monotone puis prouver la surjectivité de l'opérateur $\mathbb{I} + \lambda\mathbb{A}_2$. Enfin, à l'aide de la proposition 2.4 et du théorème 2.5, nous pourrons conclure. Dans le cas non homogène, la condition $\boldsymbol{g}(t) \neq 0$ sur Γ_A pour $t \in [0, T]$ nous permet de reformuler le problème posé et d'utiliser les résultats du cas homogène pour trouver le résultat cherché.

3.3.1 Condition aux limites absorbante (Silver–Müller homogène)

On rappelle que $\boldsymbol{g} = 0$ dans ce cas.

Proposition 3.8. *L'opérateur $\mathbb{A}_2$ est monotone.*

Démonstration.

Choisissons un $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{u_4} \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}_2)$. D'après la démonstration de la proposition 3.5 on a

$$(\mathbb{A}_2\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u})_X = \left(\frac{\nu_1}{\varepsilon_0\omega_{p1}^2}\boldsymbol{u_1} \mid \boldsymbol{u_1}\right) + \left(\frac{\nu_2}{\varepsilon_0\omega_{p2}^2}\boldsymbol{u_2} \mid \boldsymbol{u_2}\right) - \varepsilon_0 c^2 \left[(\boldsymbol{u_3} \mid \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_4}) - (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{u_4})\right].$$

Comme $(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_4}) \in \mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, le théorème 2.28 nous donne

$$(\boldsymbol{u_3} \mid \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_4}) - (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{u_4}) = {}_{\gamma_A^0}\langle \boldsymbol{u_3} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u_{4\top}} \rangle_{\pi_A}.$$

Maintenant, nous allons utiliser la condition aux limites $\boldsymbol{u_3} \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{u_{4\top}} = 0$ sur Γ_A. Cette condition implique que $\boldsymbol{u_3} \wedge \boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{u_{4\top}}$ appartiennent à $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) \cap \mathbf{TC}(\Gamma_A)$, qui est inclus dans $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_A)$ d'après la proposition 2.20. Nous avons alors

$$\begin{aligned} {}_{\gamma_A^0}\langle \boldsymbol{u_3} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u_{4\top}} \rangle_{\pi_A} &= (-c\boldsymbol{u_{4\top}} \mid \boldsymbol{u_{4\top}})_{|\Gamma_A} \\ &= -c\|\boldsymbol{u_{4\top}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$(\mathbb{A}_2\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u})_X = \left(\frac{\nu_1}{\varepsilon_0\omega_{p1}^2}\boldsymbol{u_1} \mid \boldsymbol{u_1}\right) + \left(\frac{\nu_2}{\varepsilon_0\omega_{p2}^2}\boldsymbol{u_2} \mid \boldsymbol{u_2}\right) + \varepsilon_0 c^3 \|\boldsymbol{u_{4\top}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma)}.$$

Par conséquent $(\mathbb{A}_2\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u})_X \geq 0$, ce qui nous donne la monotonie de l'opérateur $\mathbb{A}_2$. ■

Proposition 3.9. *L'opérateur $\mathbb{I} + \lambda\mathbb{A}_2$ est surjectif, i.e $R(\mathbb{I} + \lambda\mathbb{A}_2) = \mathbf{X}$.*

Avant de passer à la démonstration, nous avons besoin d'introduire quelques espaces vectoriels qui seront utiles dans cette démonstration.

Proposition 3.10. *L'espace* $\widetilde{\mathbf{V}}$ *défini par*

$$\widetilde{\mathbf{V}} = \{\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) : \boldsymbol{w}_\top \in \mathbf{L^2}(\Gamma)\},$$

muni de la norme

$$\|\boldsymbol{w}\|^2_{\widetilde{\mathbf{V}}} = \|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{w}_\top\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma)},$$

est un espace de Hilbert.

Démonstration.

L'espace $\widetilde{\mathbf{V}}$ est préhilbertien. Soit $(\boldsymbol{w}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\widetilde{\mathbf{V}}$. Alors, $(\boldsymbol{w}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$. Comme $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ est complet, cette suite converge. Notons $\boldsymbol{w}$ sa limite. Pour conclure que $\boldsymbol{w} \in \widetilde{\mathbf{V}}$, nous allons montrer que $\boldsymbol{w}_\top \in \mathbf{L^2}(\Gamma)$. D'une part, l'application $\pi_\top$ est continue de $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ dans $\mathbf{TC}(\Gamma) \subset \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Donc, la suite $(\pi_\top(\boldsymbol{w}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi_\top(\boldsymbol{w}) \in \mathbf{TC}(\Gamma)$. Ce qui implique que

$$(\boldsymbol{w}_{k\top} \mid \boldsymbol{\varphi}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \langle \boldsymbol{w}_\top \mid \boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}; \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

D'autre part, $(\boldsymbol{w}_{k\top})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L^2}(\Gamma)$. Soit $\boldsymbol{\lambda}$ sa limite. Alors,

$$(\boldsymbol{w}_{k\top} \mid \boldsymbol{\varphi}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\varphi})\,; \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L^2}(\Gamma).$$

Comme $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset \mathbf{L^2}(\Gamma)$, cela nous donne

$$\langle \boldsymbol{w}_\top \mid \boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = (\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\varphi})\,; \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

et par densité de $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $\mathbf{L^2}(\Gamma)$, on en déduit que $\boldsymbol{w}_\top = \boldsymbol{\lambda}$ dans $\mathbf{L^2}(\Gamma)$. L'espace $\widetilde{\mathbf{V}}$ est complet. Par conséquent, $\widetilde{\mathbf{V}}$ est un espace de Hilbert.

■

Corollaire. *L'espace* $\mathbf{V}$ *défini par*

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \{\boldsymbol{w} \in \widetilde{\mathbf{V}} : \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{n} = 0 \ \textit{sur}\ \Gamma_P\}\\ &= \{\boldsymbol{v} \in \widetilde{\mathbf{V}} : \boldsymbol{v}_\top = 0 \ \textit{sur}\ \Gamma_P\},\end{aligned}$$

muni de la même norme que $\widetilde{\mathbf{V}}$*, est un espace de Hilbert.*

Démonstration.

$\mathbf{V}$ est sous espace vectoriel de $\widetilde{\mathbf{V}}$. De plus, il est fermé dans $\widetilde{\mathbf{V}}$. La preuve est la suivante. Nous savons que l'application γ_P est continue de $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ dans $\mathbf{TT}(\Gamma_P)$. Or, pour tout $\boldsymbol{w} \in \widetilde{\mathbf{V}}$

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)} \leq \|\boldsymbol{w}\|_{\widetilde{\mathbf{V}}}.$$

Par conséquent, l'application $\gamma_{P|\widetilde{\mathbf{V}}}$ est une application continue de $\widetilde{\mathbf{V}}$ dans $\mathbf{TT}(\Gamma_P)$ et $\mathbf{V} = \ker(\gamma_{P|\widetilde{\mathbf{V}}})$. Donc, $\mathbf{V}$ est complet. C'est un espace de Hilbert.

■

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 3.9.

Démonstration.

La démonstration est analogue à celle que nous avons faite dans le cas d'un conducteur parfait.

Prenons un $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_1} \\ \boldsymbol{f_2} \\ \boldsymbol{f_3} \\ \boldsymbol{f_4} \end{pmatrix} \in \mathbf{X}$, et cherchons $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{u_4} \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}_2)$, qui satisfait $\boldsymbol{u} + \lambda \mathbb{A}_2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$. De cette équation, on déduit les équations $(6-7-8-9)$. Et de celle-ci, on tire l'équation (41).

Nous introduisons la formulation variationnelle suivante :

Trouver $\boldsymbol{u_3} \in \mathbf{V}$ *tel que pour tout* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$

$$\widetilde{a}(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{v}) = \widetilde{L}(\boldsymbol{v}), \tag{51}$$

où : $\forall (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$

$$\widetilde{a}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v}) + \lambda^2 c^2 \, (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w} \mid \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}) + \lambda^2 \, (\mathbb{D}\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v}) + \lambda c \, (\boldsymbol{w}_\top \mid \boldsymbol{v}_\top)_{|\Gamma_A},$$

$$\widetilde{L}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f_3} \mid \boldsymbol{v}) + \lambda c^2 \, (\boldsymbol{f_4} \mid \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}) - \tfrac{\lambda}{\varepsilon_0} \left((\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1)^{-1} \boldsymbol{f_1} \mid \boldsymbol{v} \right) - \tfrac{\lambda}{\varepsilon_0} \left((\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2)^{-1} \boldsymbol{f_2} \mid \boldsymbol{v} \right).$$

Si on rappelle les expressions des applications a et L qui sont introduites dans la démonstration de la proposition 3.6, on remarque qu'on peut même les définir respectivement sur $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$. Les majorations et les minorations obtenues pour a et L sont encore valables sur ces espaces. Dès lors, puisque $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, on réécrit $\widetilde{a}$ et $\widetilde{L}$ comme suit :

- $\widetilde{a}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) + \lambda c \, (\boldsymbol{w}_\top \mid \boldsymbol{v}_\top)_{|\Gamma_A}$; $\quad \forall (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$
- $\widetilde{L}(\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v})$; $\quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$

Nous allons étudier tout de suite les propriétés des applications $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \longmapsto \widetilde{a}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ et $\boldsymbol{v} \longmapsto \widetilde{L}(\boldsymbol{v})$. $\widetilde{a}$ est la somme de deux formes bilinéaires donc elle est bilinéaire. De même, $\widetilde{L}$ est une forme linéaire.

La continuité de ces deux applications est facile à avoir, si on prend en compte les résultats de continuité de a et L. En effet, soit $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} |\widetilde{a}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})| &\leq |a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})| + \lambda c \|\boldsymbol{w}_\top\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma)} \|\boldsymbol{v}_\top\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma)} \\ &\overset{(43)}{\leq} C \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)} + \lambda c \|\boldsymbol{w}_\top\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma)} \|\boldsymbol{v}_\top\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma)} \\ &\leq (C + \lambda c) \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\widetilde{L}(\boldsymbol{v})| &= |L(\boldsymbol{v})| \\ &\overset{(45)}{\leq} C \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)} \\ &\leq C \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}. \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à montrer la coercivité de $\widetilde{a}$. Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{a}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \lambda c \|\boldsymbol{v}_\top\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma)} \\ &\overset{(44)}{\geq} \alpha \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)} + \lambda c \|\boldsymbol{v}_\top\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma)} \\ &\geq \min(\alpha, \lambda c) \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{V}}. \end{aligned}$$

Nous concluons alors que la formulation variationnelle (51) est bien posée par le théorème de Lax–Milgram.

Interprétation

Soit $\boldsymbol{u_3}$ la solution de la formulation variationnelle (51). Alors, elle vérifie

$$\widetilde{a}(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{v}) = \widetilde{L}(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}.$$

Nous avons donc,

$$\widetilde{a}(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{v}) = \widetilde{L}(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega).$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_3} + \lambda^2 c^2 \,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3} + \lambda^2 \mathbb{D}\boldsymbol{u_3} &= \boldsymbol{f_3} + \lambda c^2 \,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f_4} - \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1)^{-1}\boldsymbol{f_1} \\ &\quad - \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2)^{-1}\boldsymbol{f_2} \end{aligned}$$

dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega)$. Ceci se réécrit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_3} + \lambda c^2 \,\mathbf{rot}(\lambda \,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3} - \boldsymbol{f_4}) + \lambda^2 \mathbb{D}\boldsymbol{u_3} &= \boldsymbol{f_3} - \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1)^{-1}\boldsymbol{f_1} \\ &\quad - \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2)^{-1}\boldsymbol{f_2} \end{aligned} \tag{52}$$

dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega)$.
Comme dans la section §3.2, nous posons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_4} &= \boldsymbol{f_4} - \lambda \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3}, \\ \boldsymbol{u_2} &= (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2)^{-1}(\boldsymbol{f_2} + \lambda \varepsilon_0\, \omega_{p2}^2\, \boldsymbol{u_3}), \\ \boldsymbol{u_1} &= (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1)^{-1}(\boldsymbol{f_1} + \lambda \varepsilon_0\, \omega_{p1}^2\, \boldsymbol{u_3}). \end{aligned}$$

Comme auparavant, on vérifie que $\boldsymbol{u_4}$, $\boldsymbol{u_2}$ et $\boldsymbol{u_1}$ sont dans $\mathbf{L^2}(\Omega)$. Ensuite, on prouve que les équations (37), (38) et (39) sont satisfaites. À l'aide de l'équation (52), on conclut que $\boldsymbol{u_4} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$. Finalement, pour terminer la démonstration, il faut montrer que la condition de Silver–Müller homogène $\boldsymbol{u_3} \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{u_4}_{\top} = 0$ sur Γ_A est satisfaite.

On a

$$\widetilde{a}(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{v}) = \widetilde{L}(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}, \tag{53}$$

Or si $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ alors $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n} = 0$ sur Γ_P ce qui est équivalant à $\boldsymbol{v}_{\top} = 0$ sur Γ_P. En appliquant la formule d'intégration par partie à $(\boldsymbol{v}, \lambda \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3} - \boldsymbol{f_4}) \in \mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, théorème 2.28, l'équation (53) se réécrit comme

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{v}) \quad &+ \quad \lambda c^2 [(\mathbf{rot}(\lambda \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3} - \boldsymbol{f_4}) \mid \boldsymbol{v}) + {}_{\gamma_A}\langle (\lambda \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3} - \boldsymbol{f_4}) \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_{\top} \rangle_{\pi_A^0}] \\ &\quad + \lambda^2 \,(\mathbb{D}\boldsymbol{u_3} \mid \boldsymbol{v}) + \lambda c \,(\boldsymbol{u_3}_{\top} \mid \boldsymbol{v}_{\top})_{|\Gamma_A} \\ &= \quad (\boldsymbol{f_3} \mid \boldsymbol{v}) - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \left((\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1)^{-1}\boldsymbol{f_1} \mid \boldsymbol{v}\right) - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \left((\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2)^{-1}\boldsymbol{f_2} \mid \boldsymbol{v}\right), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Celle-ci entraine d'après l'équation (52)

$$\lambda c \,(\boldsymbol{u_3}_{\top} \mid \boldsymbol{v}_{\top})_{|\Gamma_A} + \lambda c^2 \,{}_{\gamma_A}\langle (\lambda \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u_3} - \boldsymbol{f_4}) \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_{\top} \rangle_{\pi_A^0} = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}.$$

On rappelle que $\boldsymbol{u_4} = \boldsymbol{f_4} - \lambda \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u_3} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$. Donc,

$$\lambda c \, (\boldsymbol{u_{3\top}} \mid \boldsymbol{v}_\top)_{|\Gamma_A} - \lambda c^2 {}_{\gamma_A}\langle \boldsymbol{u_4} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_\top \rangle_{\pi^0_A} = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}. \tag{54}$$

Soit $\boldsymbol{\omega} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$. Par définition, $\boldsymbol{\omega}$ prolongé par 0 sur Γ_P est un élément de $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ainsi, il existe $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tel que $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v}_{|\Gamma}$. Donc, $\boldsymbol{v} = 0$ sur Γ_P et $\boldsymbol{v}_{|\Gamma} \in \mathbf{L^2}(\Gamma)$, ce qui nous donne $\boldsymbol{v}_\top = 0$ sur Γ_P et $\boldsymbol{v}_\top \in \mathbf{L^2}(\Gamma)$. On en déduit alors que $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$, en particulier $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^P_0(\mathbf{rot}; \Omega)$. Grâce encore aux formules d'intégration par parties du théorème 2.28 et 2.25 appliquées à $\boldsymbol{u_4}$ et $\boldsymbol{v}$, il en résulte que

$${}_{\gamma_A}\langle \boldsymbol{u_4} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_\top \rangle_{\pi^0_A} = \langle \boldsymbol{u_4} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)}.$$

Pour un $\boldsymbol{v}$ fixé, l'équation (54) se réécrit

$$(\boldsymbol{u_{3\top}} \mid \boldsymbol{v}_\top)_{|\Gamma_A} - c \langle \boldsymbol{u_4} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)} = 0.$$

Or, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\top + (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{n}$ et donc $(\boldsymbol{u_{3\top}} \mid \boldsymbol{v}_\top)_{|\Gamma_A} = (\boldsymbol{u_{3\top}} \mid \boldsymbol{v})_{|\Gamma_A}$. En particulier

$$(\boldsymbol{u_{3\top}} \mid \boldsymbol{v})_{|\Gamma_A} - c \langle \boldsymbol{u_4} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)} = 0. \tag{55}$$

On rappelle que $\boldsymbol{v}_{|\Gamma} = \boldsymbol{\omega}$. L'équation (55) donne

$$(\boldsymbol{u_{3\top}} \mid \boldsymbol{\omega})_{|\Gamma_A} - c \langle \boldsymbol{u_4} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\omega} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)} = 0.$$

Comme $\boldsymbol{\omega}$ est arbitraire, on trouve $\boldsymbol{u_{3\top}} - c\boldsymbol{u_4} \wedge \boldsymbol{n} = 0$ dans $\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$, ce qui est équivalent à $\boldsymbol{u_3} \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{u_{4\top}} = 0$ dans $\widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$. Par conséquent, $(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_4}) \in \mathcal{H}$.

La démonstration est terminée.

■

Á l'aide des résultats de l'étude précèdent, nous démontrerons dans la suite un résultat important. Les hypothèses et les conclusions sont résumés ci-dessous.

Théorème 3.11. *Supposons* $\boldsymbol{u}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{1,0} \\ \boldsymbol{J}_{2,0} \\ \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{B}_0 \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}_2)$*, c'est à dire*

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_{1,0}, \boldsymbol{J}_{2,0} \in \mathbf{L^2}(\Omega), \\ \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \\ \boldsymbol{E}_0 \wedge \boldsymbol{n} = 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma_P, \\ \boldsymbol{E}_0 \wedge \boldsymbol{n} + \lambda c \boldsymbol{B}_{0\top} = 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma_A. \end{cases}$$

Alors, il existe une et une seule $\boldsymbol{u} \in D(\mathbb{A}_2)$ *solution du problème d'évolution (34) du régularité*

$$\boldsymbol{u} \in C^1([0,T]; \mathbf{X}) \cap C([0,T]; D(\mathbb{A}_2)),$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2 &\in C^1([0,T]; \mathbf{L^2}(\Omega)), \\ \boldsymbol{E} &\in C^1([0,T]; \mathbf{L^2}(\Omega)) \cap C([0,T]; \mathbf{H}^P_0(\mathbf{rot}; \Omega)), \\ \boldsymbol{B} &\in C^1([0,T]; \mathbf{L^2}(\Omega)) \cap C([0,T]; \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)). \end{aligned}$$

Démonstration.

La démonstration est analogue à celle du théorème 3.7. Elle découle de la proposition 2.4 et du théorème de Hille–Yosida 2.5 avec l'aide des propositions 3.8 et 3.9.

■

3.3.2 Condition aux limites d'onde entrante (Silver–Müller non homogène)

Dans cette sous-section, nous supposons que $\boldsymbol{g} \neq 0$. Bien entendu, nous devons fournir une hypothèse sur la régularité de $\boldsymbol{g}$. Soit

$$\boldsymbol{g} \in \mathbf{W}^{2,1}(0,T;\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)+\mathbf{TC}(\Gamma_A)). \tag{56}$$

Pour que le problème puisse avoir une solution, il est naturellement nécessaire que $\boldsymbol{g}$ soit la trace sur le bord Γ_A d'une fonction définie sur Ω. La détermination de cette fonction se fait en deux étapes. Dans la première étape, on va construire un relèvement. Et à la deuxième étape, on appliquera ce relèvement à la fonction $\boldsymbol{g}$.

1^{RE} ÉTAPE. On introduit l'application Z définie par

$$\begin{aligned} Z : \mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega)\times\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) &\to \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)+\mathbf{TC}(\Gamma_A)\\ (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &\mapsto \gamma_\top(\boldsymbol{v})+c\pi_\top(\boldsymbol{w}). \end{aligned}$$

Z est une application linéaire continue. Soit $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega)\times\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|Z(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\|_{\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)+\mathbf{TC}(\Gamma_A)} &= \inf_{\substack{\boldsymbol{v_1}\in\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)\\ \boldsymbol{w_1}\in\mathbf{TC}(\Gamma_A)}} \{\|\boldsymbol{v_1}\|_{\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)}+\|\boldsymbol{w_1}\|_{\mathbf{TC}(\Gamma_A)} : \boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{w_1}=Z(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\}\\ &\leq \|\gamma_\top(\boldsymbol{v})\|_{\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)}+\|\pi_\top(\boldsymbol{w})\|_{\mathbf{TC}(\Gamma_A)}\\ &\leq C(\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)}+\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)}). \end{aligned}$$

On va établir maintenant la surjectivité de Z. Soit $\boldsymbol{h} \in \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)+\mathbf{TC}(\Gamma_A)$. Il existe $\widetilde{\boldsymbol{h}_1} \in \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)$ et $\widetilde{\boldsymbol{h}_2} \in \mathbf{TC}(\Gamma_A)$ tel que

$$\widetilde{\boldsymbol{h}_1}+c\widetilde{\boldsymbol{h}_2}=\boldsymbol{h}, \quad \text{sur } \Gamma_A.$$

On sait que l'application γ_A^0 est surjective de $\mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega)$ sur $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)$. Alors, il existe $\boldsymbol{h}_1 \in \mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega)$ tel que

$$\boldsymbol{h}_1\wedge\boldsymbol{n}=\widetilde{\boldsymbol{h}_1}.$$

De même, l'application π_A est surjective de $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ sur l'espace $\mathbf{TC}(\Gamma_A)$. Ainsi, il existe $\boldsymbol{h}_2 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ tel que

$$\boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{h}_2\wedge\boldsymbol{n})=\widetilde{\boldsymbol{h}_2} \quad \text{sur } \Gamma_A.$$

Autrement dit, il existe $(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2) \in \mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega)\times\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ qui vérifie

$$\boldsymbol{h}_1\wedge\boldsymbol{n}+c\boldsymbol{h}_{2\top}=\boldsymbol{h},$$

donc Z est surjective. D'après le théorème 2.33, Z est bijective de $\ker(Z)^\perp$ dans $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)+\mathbf{TC}(\Gamma_A)$. Alors, il existe une application linéaire

$$R : \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)+\mathbf{TC}(\Gamma_A) \to \mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega)\times\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$$

qui vérifie

$$Z(R(\boldsymbol{h}))=\boldsymbol{h}, \quad \forall\boldsymbol{h}\in\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A)+\mathbf{TC}(\Gamma_A).$$

En appliquant le théorème 2.32 de Banach–Schauder, on trouve la continuité de R. L'application R s'appelle relèvement.

2^{E} ÉTAPE. On rappelle que $\boldsymbol{g}(t) \in \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A)$. D'après ce qui précède, il existe $(\boldsymbol{g}_3(t), \boldsymbol{g}_4(t)) \in \mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ tel que

$$(\boldsymbol{g}_3(t), \boldsymbol{g}_4(t)) = R(\boldsymbol{g}(t)),$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{g}_3(t) \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{g}_{4\top}(t) = \boldsymbol{g}(t) \quad \text{ sur } \Gamma_A, \quad \forall t \in [0,T].$$

Comme R est continue, la régularité de $(\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4)$ découle alors du théorème 2.30. Soit

$$(\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4) \in \mathbf{W}^{2,1}(0,T;\mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)). \tag{57}$$

Ces résultats nous permettent, en utilisant le théorème de Hille–Yosida et le théorème 3.11, de démontrer que le problème $(49-50)$ admet une unique solution. Les hypothèses et les conclusions sont résumés ci-dessous.

Théorème 3.12. *Supposons que* $\boldsymbol{u}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{1,0} \\ \boldsymbol{J}_{2,0} \\ \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{B}_0 \end{pmatrix}$ *vérifie les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_{1,0}, \boldsymbol{J}_{2,0} \in \mathbf{L^2}(\Omega), \\ \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega), \\ \boldsymbol{E}_0 \wedge \boldsymbol{n} = 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma_P, \\ \boldsymbol{E}_0 \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{B}_{0\top} = \boldsymbol{g}(0) \quad \textit{sur} \quad \Gamma_A. \end{cases}$$

Alors, il existe une, et une seule, solution $\boldsymbol{u}$ *du problème* $(49-50)$ *telle que ses composantes ayant la régularité*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2 &\in C^1([0,T];\mathbf{L^2}(\Omega)), \\ \boldsymbol{E} &\in C^1([0,T];\mathbf{L^2}(\Omega)) \cap C([0,T];\mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega)), \\ \boldsymbol{B} &\in C^1([0,T];\mathbf{L^2}(\Omega)) \cap C([0,T];\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)). \end{aligned}$$

Démonstration.

Nous introduisons ci-dessous des nouvelles inconnues

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_1{}^* &= \boldsymbol{J}_1, \\ \boldsymbol{J}_2{}^* &= \boldsymbol{J}_2, \\ \boldsymbol{E}^* &= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{g}_3, \\ \boldsymbol{B}^* &= \boldsymbol{B} - \boldsymbol{g}_4. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous pouvons reformuler comme suit le problème ci-dessus. Nous cherchons $\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1{}^* \\ \boldsymbol{J}_2{}^* \\ \boldsymbol{E}^* \\ \boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{*'}(t) + \mathbb{A}_2\boldsymbol{u}^*(t) &= \boldsymbol{f}(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ \boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_P, \\ \boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{n} + c\boldsymbol{B}^*_\top &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_A, \end{aligned}$$

où

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0\,\omega_{p1}^2\,\boldsymbol{g}_3 \\ \varepsilon_0\,\omega_{p2}^2\,\boldsymbol{g}_3 \\ -\boldsymbol{g}_3' + c^2\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{g}_3 \\ -\boldsymbol{g}_4' + c^2\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{g}_4 \end{pmatrix}$$

et avec la condition initiale $\boldsymbol{u}^*(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{1,0} \\ \boldsymbol{J}_{2,0} \\ \boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{g}_3(0) \\ \boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{g}_4(0) \end{pmatrix}$. Nommons ce problème $(\mathcal{P})$.

Par conséquent, nous retrouvons les conditions de Silver–Müller homogène. Il est clair que $\boldsymbol{u}^*(0) \in D(\mathbb{A}_2)$. Grâce à la régularité (57) de $(\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4)$, on déduit que $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{1,1}(0,T;\mathbf{X})$. Toutes les hypothèses du théorème 2.6 de Hille–Yosida sont vérifiées, le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution $\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1}^* \\ \boldsymbol{u_2}^* \\ \boldsymbol{u_3}^* \\ \boldsymbol{u_4}^* \end{pmatrix}$ de régularité

$$\boldsymbol{u}^* \in C^1([0,T];\mathbf{X}) \cap C([0,T];D(\mathbb{A}_2)).$$

De là, on conclut l'existence de $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1^* \\ \boldsymbol{J}_2^* \\ \boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{B}^* + \boldsymbol{g}_4 \end{pmatrix}$ solution de l'équation (49) qui vérifie les conditions aux limites (50). Pour avoir l'unicité, on suppose qu'il existe une autre solution $\widetilde{\boldsymbol{u}}$. Alors, $\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}$ est solution de l'équation (49) avec une donnée initiale nulle. Ce qui nous donne l'unicité.

■

4 Vérification des autres équations du modèle

Ici, nous voulons montrer, mathématiquement, que les équations (10) et (11), les contraintes, sont bien vérifiées. Aussi, nous intéresserons d'un point de vue mathématique à l'établissement de la condition naturelle (18) dans le cas du conducteur parfait et le cas Silver–Müller.

Nous posons

$$\rho := \sum_{s=1}^{2} \rho_s\,, \quad \boldsymbol{J} := \sum_{s=1}^{2} \boldsymbol{J}_s.$$

4.1 Conditions de divergence

Théorème 4.1. *Supposons qu'on a*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(0), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B}_0 = 0 \\ \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}(t) = 0, \quad t \in [0,T], \end{cases}$$

alors, pour tout $t \in [0,T]$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t) \quad \textit{et} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B}(t) = 0.$$

Démonstration.

Soit $t \in [0,T]$ fixé. On commence d'abord par montrer que $\operatorname{div} \boldsymbol{B}(t) = 0$. On sait que $\boldsymbol{B}(t)$ vérifie

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t} = -\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\,.$$

En appliquant la fonction divergence, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(t)) &= -\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{58}$$

Or, au sens de distribution, on a

$$\operatorname{div}(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(t)) = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{B}(t));$$

alors de l'équation (58) on déduit que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{B}(t)) = 0.$$

Il existe donc une fonction c définie sur Ω indépendante du temps telle que $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(t) = c$ pour tout $t \in [0,T]$. Or $\operatorname{div}\boldsymbol{B}_0 = 0$, par conséquent $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(t) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

Maintenant, on va montrer que $\operatorname{div}\boldsymbol{E}(t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(t)$. On revient encore à utiliser les équations de notre modèle. On a

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}(t)}{\partial t} = c^2\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}(t) - \frac{1}{\varepsilon_0}\,\boldsymbol{J}(t),$$

et donc

$$\operatorname{div}(\frac{\partial \boldsymbol{E}(t)}{\partial t}) = c^2\,\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}(t) - \frac{1}{\varepsilon_0}\,\operatorname{div}\boldsymbol{J}(t). \tag{59}$$

Or, $\operatorname{div}(\frac{\partial \boldsymbol{E}(t)}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{E}(t))$ et $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}(t) = 0$, au sens de distribution. L'équation (59) donne

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{E}(t)) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\operatorname{div}\boldsymbol{J}(t).$$

En utilisant l'hypothèse $\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{J}(t) = 0$, il résulte que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{E}(t)) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{\partial \rho(t)}{\partial t}.$$

Alors, il existe une fonction d définie sur Ω et indépendante du temps telle que $\operatorname{div}\boldsymbol{E}(t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(t) + d$. La condition initiale $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(0)$ donne $d = 0$. Enfin, on a $\operatorname{div}\boldsymbol{E}(t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.

4.2 Conditions aux limites

4.2.1 Conducteur parfait

Théorème 4.2. *Supposons qu'on a* $\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} = 0$
alors,

$$\boldsymbol{B}(t) \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} = 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Démonstration.

Soit $t \in [0,T]$. On a $\boldsymbol{E}(t) \in \mathbf{H_0}(\mathbf{rot};\Omega)$. Alors $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. D'après la proposition 2.13 , $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) = 0$, au sens de distribution, qui est dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En conséquence, $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \in \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega)$. Maintenant, on veut montrer que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{n} = 0$. D'après la deuxième formule d'intégration par partie, théorème 2.25, on a

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \mid \mathbf{grad}\,g_1) + (\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \mid g_1) \quad = \quad \langle \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{n}, g_1\rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \quad \forall g_1 \in \mathrm{H}^1(\Omega).$$

Ce qui donne

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \mid \mathbf{grad}\,g_1) \quad = \quad \langle \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{n}, g_1\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \quad \forall g_1 \in \mathrm{H}^1(\Omega). \tag{60}$$

On considère $g_1 \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et on pose $\boldsymbol{g}_2 = \mathbf{grad}\,g_1$. Alors $\boldsymbol{g}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et la proposition 2.13 montre que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{g}_2 = 0$; qui appartient à $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Donc $\boldsymbol{g}_2 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$. On revient encore aux formules des intégrations par parties, théorème 2.26, on obtient

$$(\boldsymbol{E}(t) \mid \mathbf{rot}\,\boldsymbol{g}_2) - (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \mid \boldsymbol{g}_2) = 0.$$

Il en résulte que

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \mid \boldsymbol{g}_2) = 0,$$

et donc,

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \mid \mathbf{grad}\,g_1) = 0. \tag{61}$$

En injectant l'équation (61) dans (60), on trouve

$$\langle \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{n}, g_1\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0. \tag{62}$$

On sait que l'application trace $\gamma : u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \longmapsto u_{|\Gamma} \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est continue et surjective, alors pour $g \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ il existe $g_1 \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que $g = g_{1|\Gamma}$.

L'équation (62) se réécrit

$$\langle \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{n}, g\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0.$$

Celle-ci implique, puisque g est quelconque, que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{n} = 0$ dans $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On déduit que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t) \in \mathbf{H_0}(\operatorname{div};\Omega)$.

On rappelle qu'on veut montrer que $\boldsymbol{B}(t)\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma} = 0$. Pour cela on va utiliser l'équation

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t} \quad = \quad -\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\,. \tag{63}$$

D'après le théorème 3.7, on a $\boldsymbol{B} \in C^1([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$ et du théorème 4.1, on a $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(t) = 0$ donc $\boldsymbol{B}(t) \in \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega)$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{B} \in C^1([0,T];\mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega)). \tag{64}$$

Or, d'après le théorème 2.16 l'application γ_n est continue de $\mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega)$ dans $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Le théorème 2.30 et (64) impliquent que

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma} \in C^1([0,T];\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma})\in C([0,T];\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)). \tag{65}$$

On applique maintenant (26) à γ_n et $\boldsymbol{B}$; on déduit que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})=\frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n} \tag{66}$$

dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}'(]0,T[;\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$. L'équation (65) et (66) donnent alors

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma}\in C([0,T];\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

D'autre part, appliquant la trace normale γ_n à (63) de deux côtés, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n} &= -\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{n}\\ &= 0\end{aligned}$$

dans $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On obtient donc, d'après (66),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}(t)\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma})=0.$$

Comme $\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma}=0$, on conclut que $\boldsymbol{B}(t)\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma}=0$. Or t est quelconque, alors cette condition aux limites est bien vérifiée pour tout $t\in[0,T]$.

■

4.2.2 Silver–Müller

Théorème 4.3. *Supposons qu'on a* $\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma_P}=0$
alors,

$$\boldsymbol{B}(t)\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma_P}=0,\quad \forall t\in[0,T].$$

Démonstration.

Soit $t\in[0,T]$. Alors $\boldsymbol{E}(t)\in\mathbf{H}_0^P(\mathbf{rot};\Omega)$. D'après la démonstration précédente, nous avons $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\in\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ et l'équation

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\mid\mathbf{grad}\,g_1) = \langle\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{n},g_1\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},\quad \forall g_1\in\mathrm{H}^1(\Omega). \tag{67}$$

Prenons maintenant $g_1\in\mathrm{H}^1(\Omega)$ et notons $\boldsymbol{g}_2$ son gradient. Ainsi, $\boldsymbol{g}_2\in\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$. Appliquons-nous la formule d'intégration par partie (24) à $(\boldsymbol{E}(t),\boldsymbol{g}_2)$, nous trouvons

$$(\boldsymbol{E}(t)\mid\mathbf{rot}\,\boldsymbol{g}_2)-(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\mid\boldsymbol{g}_2)={}_{\gamma_A^0}\langle\boldsymbol{E}(t)\wedge\boldsymbol{n},\boldsymbol{g}_{2\top}\rangle_{\pi_A},$$

ce qui implique

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\mid\boldsymbol{g}_2)=-{}_{\gamma_A^0}\langle\boldsymbol{E}(t)\wedge\boldsymbol{n},\boldsymbol{g}_{2\top}\rangle_{\pi_A}.$$

Ainsi, nous obtenons la relation

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\mid\mathbf{grad}\,g_1)=-{}_{\gamma_A^0}\langle\boldsymbol{E}(t)\wedge\boldsymbol{n},(\mathbf{grad}\,g_1)_\top\rangle_{\pi_A}. \tag{68}$$

Les équations (67) et (68) nous permettent d'écrire

$$\langle\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{n},g_1\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}=-{}_{\gamma_A^0}\langle\boldsymbol{E}(t)\wedge\boldsymbol{n},(\mathbf{grad}\,g_1)_\top\rangle_{\pi_A},\quad\forall g_1\in\mathrm{H}^1(\Omega). \tag{69}$$

Soit $g \in \widetilde{\mathrm{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_P)$. Alors, g prolongé par 0 sur Γ_A appartient à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_P)$. Donc, il existe $g_1 \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que $g = g_{1|\Gamma}$, ce qui nous donne $g_{1|\Gamma_A} = 0$. Dans ce cas

$$\langle \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E}(t) \cdot \boldsymbol{n}, g_1 \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E}(t) \cdot \boldsymbol{n}, g_1 \rangle_{\widetilde{\mathrm{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_P)}. \tag{70}$$

L'équation (69) se réécrit, à l'aide de l'équation (70),

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E}(t) \cdot \boldsymbol{n}, g_1 \rangle_{\widetilde{\mathrm{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_P)} &= -\gamma_A^0 \langle \boldsymbol{E}(t) \wedge \boldsymbol{n}, (\mathbf{grad}\, g_1)_\top \rangle_{\pi_A} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Or, $g_{1|\Gamma} = g$ donc

$$\langle \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E}(t) \cdot \boldsymbol{n}, g \rangle_{\widetilde{\mathrm{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_P)} = 0.$$

g est arbitraire, nous trouvons alors $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{E}(t) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ dans $\widetilde{\mathrm{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_P)$. Dans les deux cas de Silver–Müller, homogène et non homogène, nous avons montré que $\boldsymbol{B} \in C^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$; et comme nous avons toujours $\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0$, donc

$$\boldsymbol{B} \in C^1(0, T; \mathbf{H}(\mathrm{div}; \Omega)). \tag{71}$$

Or, γ_n est continue de $\mathbf{H}(\mathrm{div}; \Omega))$ dans $\widetilde{\mathrm{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_P)$. Pour le prouver, il suffit d'utiliser la formule d'intégration par partie. Donc, à l'aide du théorème 2.30 et l'équation (71), nous obtenons

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma_P} \in C^1(0, T; \widetilde{\mathrm{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_P)).$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma_P}) \in C(0, T; \widetilde{\mathrm{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_P)),$$

et de l'équation (66) nous déduisons

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma_P} \in C(0, T; \widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_P)).$$

En résonnant maintenant comme la démonstration précédente et en utilisant l'équation de Maxwell Ampère (63), nous prouvons que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}(t) \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma_P}) = 0.$$

Il existe une fonction c définie sur Ω et indépendante du temps tel que $\boldsymbol{B}(t) \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma_P} = c$. La condition initiale $\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma_P}$ implique que $c = 0$. Comme t est arbitraire, nous déduisons que

$$\boldsymbol{B}(t) \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma_P} = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

D'où le résultat cherché.

■

Références

[1] F. Assous, P. Ciarlet, S. Labrunie. *Mathematical foundations of computational electromagnetism.* à paraître (2017).
Prépublication HAL n° 01596575, en ligne :
`https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01596575/document`.

[2] A. Back, T. Hattori, S. Labrunie, J.R. Roche, P. Bertrand. Electromagnetic wave propagation and absorption in magnetised plasmas : variational formulations and domain decomposition. *ESAIM : M2AN* **49** (2015), 1239–1260.

[3] A. Buffa & P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to Maxwell's equations Part I : An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **24**, 9–30 (2001).

[4] A. Buffa & P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part II : Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **24**, 31–48 (2001).

[5] R. Dautray & J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, Paris (1987).

[6] R.J. Goldston & P.H. Rutherford. *Introduction to plasma physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol (1995).

[7] M. Sesques. *Conditions aux limites artificielles pour le système de Maxwell*. Thèse, Université de Bordeaux 1 (1990).