Convexité floue et coeur périphérique d'une économie d'échange

Antoine Billot

▶ **To cite this version:**

Antoine Billot. Convexité floue et coeur périphérique d'une économie d'échange. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1988, 36 p., ref. bib.: 2 p.1/2. hal-01538383

HAL Id: hal-01538383
https://hal.science/hal-01538383

Submitted on 13 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL

INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

n° 110

CONVEXITE FLOUE ET COEUR PERIPHERIQUE D'UNE ECONOMIE D'ECHANGE

Antoine BILLOT

Novembre 1988

Communication présentée au XXème colloque annuel de l'Institut de Mathématiques Economiques

La notion de coopération (**ICHIISHI [1981;1982]**, **SCARF [1967;1971;1973]**, **SHAPLEY [1973]**, **SCHLEICHER [1979]**), qui passe par la formation d'une coalition, donne naissance à ce que l'on appelle parfois des super-joueurs, c'est-à-dire des groupes de joueurs qui vont finalement se comporter comme des joueurs uniques; autrement dit, la rationalité de ces super-joueurs est identique, dans le principe, à celle d'un agent ésseulé en situation de conflit. Ceci signifie, en fait, que les joueurs sont en mesure d'**abdiquer** leur pouvoir intrinsèque de décision au profit d'une **institution** collective provenant d'une coalition à laquelle ils adhèrent. Ce pourquoi, ces **êtres intermédiaires** sont des entités théoriques qui symbolisent toute forme d'union, syndicats, cartels et associations diverses. Même si l'analyse précise d'un syndicat en termes de théorie des jeux fait une large différence entre **coalition simple** et **syndicat** (voir **DREZE & GABSZEWICZ [1971]**), ce dernier résultant d'une appréciation éxogène - on *constate* que le syndicat existe alors qu'on *explique* l'existence de la coalition par le modèle -, cette analyse ne se justifie que par une volonté théorique (et quasiment technique) de *réduire* le nombre des coalitions possibles qui peuvent améliorer leur sort, relativement à une imputation donnée et donc d'accroitre le cardinal du coeur associé au jeu coopératif (voir **ROSENMULLER [1981]** et **CORNWALL [1984]**, chap 5).

La littérature sur les jeux flous coopératifs n'est guère étendue. Elle tourne autour de deux pôles spécifiques que sont les travaux de **AUBIN [1974;1979;1981;1986]**, et ceux de **BUTNARIU [1979;1980;1985;1986;1987]**. Le second a continué dans la voie qu'il avait tracée à partir des jeux non-coopératifs et à l'aide des notions de *conception stratégique* et de *recherche de la règle optimale d'échange d'informations.* Il a essentiellement généralisé le concept de valeur de SHAPLEY à un jeu flou et étudié la stabilité de cette valeur suivant les structures individuelles d'information. **AUBIN**, quant à lui, après avoir signifié l'endroit précis où la théorie des jeux coopératifs posait problème écrit **[1986]** : "*Dès le début, les théoriciens des jeux coopératifs se sont heurtés aux difficultés qui proviennent du caractère fini de l'ensemble des coalitions. La structure de cet ensemble est trop pauvre et les résultats qui le concernent sont, ou bien triviaux, ou bien très difficiles. Plusieurs essais ont été tentés, qui consistaient à accroitre l'ensemble des joueurs par divers procédés, dont l'un, par exemple, consistait à prendre pour ensemble des joueurs l'intervalle [0,1], appelé "continuum de joueurs". Ce procédé utilisé pour la première fois par AUMANN, est celui que les physiciens emploient depuis l'invention du calcul différentiel. Nous défendrons (quant à nous) un procédé qui consiste à garder un nombre fini de joueurs et à prendre un continuum de coalitions que l'on appelera "coalitions floues". Les jeux flous coopératifs sont donc ceux qui prennent en compte le comportement des coalitions floues*".

AUBIN définit ainsi un jeu flou coopératif comme un jeu qui est indépendant du comportement de préférence des agents, mais repose sur une appartenance floue aux coalitions. Indiscutablement, cette approche est, dans l'inspiration, assez voisine de celle que nous allons défendre, même si les concepts modifiés ne sont pas les nôtres. Il ne transfigure le modèle usuel d'un jeu coopératif que pour permettre le recours aux principes de l'analyse convexe qui, à leur tour, permettront la mise en évidence de nouveaux résultats. En revanche, la direction prise par BUTNARIU, direction qui s'est avèrée extrêmement fructueuse en termes de *collaboration non-contraignante*, apparait comme une intéréssante généralisation des concepts centraux de l'analyse coopérative des jeux, mais seulement comme une généralisation.

Les théorèmes classiques de non-vacuité (**SCARF [1967]**, **MUNIER [1973]**, **ISCHIISHI [1981]**, **ROSENMULLER [1981]**, **BORDER [1985]**, **CORNWALL [1984]**) reposent sur une condition usuelle de convexité, tant sur les ensembles fondamentaux (ensembles de stratégies mixtes pour les jeux purs, de consommations pour les économies d'échange) que sur les fonctions individuelles (quasi-concavité des payoffs, convexité des préordres). Cette condition engendre la fameuse structure de jeu équilibré sans laquelle le coeur du jeu est vide. Par définition, le coeur (ou le noyau) d'un jeu (ou d'une économie abstraite d'échange avec ou sans production) est un ensemble d'issues, d'imputations ou d'allocations qui contient les équilibres mais aussi les issues qui peuvent être stabilisées par des menaces disssuasives suffisamment fortes.

La propriété de stabilisation des menaces a été mise en évidence par les économistes avant même qu'une analyse plus formelle, par la théorie des jeux, n'en vienne confirmer l'intuition. Ainsi FISCHER critiquait déjà l'analyse du duopole de COURNOT en remarquant qu'ancun homme d'affaires n'était assez myope pour supposer que son rival ne réagirait pas à ses propres coups[1]....Ce qui fait écrire à plusieurs auteurs que l'idée de *contre*, de *dissuasion par la menace* est formellement traduite par la notion de coeur (**SCHOTTER & SCHOWDIALLER [1980]**). Ceci signifiant aussi qu'une éventuelle trahison fomentée par une coalition usuelle donnée peut

---

[1] " *anymore than a chess player assumes that his opponent will not interfere with his effort to capture a knight.*" cité par **MOULIN [1981]**, p.91.

être **contrée** immédiatement par la réaction des autres joueurs, réaction qui empêche alors que tous les joueurs de cette coalition *traître* retirent un bénéfice de leur appartenance à la coalition et en dissuade donc au moins un d'y participer. Cette notion de menace nous conduit à celle d'arbitrage. Le coeur est finalement l'ensemble des arbitrages acceptables par la société. Une fois proposée une issue, imputation ou allocation du coeur, personne - c'est-à-dire ni les individus, ni les coalitions usuelles ou floues - n'est incité à s'y opposer sous peine d'être abandonné, et de faire moins bien (en payoffs ou en utilité) que ce qui était offert. Cette idée nous mène directement au concept de **structure équilibrée** du jeu (neutralisation par les menaces) qui mathématiquement, fonde le recours aux hypothèses de convexité.

Pour une meilleure compréhension des phénomènes ainsi décrits, il faut considérer que les agents ont la possibilité de *recontracter* les engagements initiaux. Cet argument correspond au fait que les contrats conclus entre les agents au début des échanges pouvaient toujours être annulés par la suite, s'il s'avérait que d'autres contrats, plus avantageux, appa- raissaient. Les contrats sont décrits par les issues, imputations ou allocations. Cette hypothèse de *recontrat* est parfaitement analogue à celle du tâtonnement walrassien. L'un des *miracles* de la théorie des jeux est d'avoir concentré le problème de la non-vacuité du coeur en celui de la convexité du modèle (ensembles et fonctions), cette convexité s'interprétant assez bien, comme nous le verrons plus tard, quand bien même elle serait très restrictive.

En premier lieu, nous allons redéfinir une convexité floue, plus intuitive. Ce sera l'objet de la première partie de ce papier.

ℓ-CONVEXITE ET PREORDRES FLOUS

1. LE CADRE DU MODELE

Nous envisageons un ensemble référentiel X d'objets quelconques. Cet ensemble X sera supposé convexe et donc connexe.

Nous considérons une relation de préférence floue $\mathcal{R}(.,.)$ définie sur l'ensemble de ZADEH [0,1].

L'agent va ordonner les différents éléments de X, étant entendu que $\mathcal{R}(.,.)$ est une relation floue ℓ-transitive et réflexive (e.f.), i.e.:

1) $\forall\ (x,y,z) \in X^3$, si $\mathcal{R}(x,y) \geq \mathcal{R}(y,x)$ et $\mathcal{R}(y,z) \geq \mathcal{R}(z,y)$ alors $\mathcal{R}(x,z) \geq \mathcal{R}(z,x)$.

2) $\forall\ x \in X,\ \mathcal{R}(x,x) \in [0,1]$.

"$\mathcal{R}(x,y) \geq \mathcal{R}(y,x)$" signifie que l'agent considère que les qualités relatives de l'objet x sont supérieures à celles de l'objet y.

Nous postulons, afin d'engendrer un sous-ensemble flou préordonné par $\mathcal{R}(.,.)$, noté $\mathcal{X}$, que si $\forall\ (x,y) \in X^2$, $\mathcal{R}(x,y) \geq \mathcal{R}(y,x)$, alors $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. La préférence locale de l'agent n'entre pas en contradiction avec sa préférence globale. Il n'est pas d'agent localement *irrationnel* qui aurait ensuite à dominer cette irrationalité de façon globale.

Si $\mathcal{R}(.,.)$ est ℓ-transitive et réflexive (e.f.), alors $\mathcal{R}(.,.)$ est un préordre flou. Nous savons aussi, que si le référentiel X est convexe et donc connexe, sous l'hypothèse de continuité des préférences floues (i.e. les ensembles $\mathcal{X}^+ = \{x \in X;\ \alpha(x) \geq \alpha(x')\}$ et

$\mathcal{X}^- = \{x \in X;\ \mathcal{x}(x) \leq \mathcal{x}(x')\}$ sont des ensembles fermés flous) alors $\mathcal{x}(.)$ est une fonction continue sur X. Nous supposerons donc, ici, cette hypothèse de continuité satisfaite.

2. LES PROPRIETES DE BASE

Propriété 1: $[\forall\ \alpha \in\ ]0,1[:\ \mathcal{x}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0]$

Aucune combinaison convexe de x et y n'appartient à $\mathcal{X}$.

Propriété 2: $[\exists\ \alpha \in\ ]0,1[:\ \mathcal{x}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0]$

Il existe une combinaison convexe de x et de y qui n'appartient pas pas à $\mathcal{X}$.

Propriété 3: $[\mathcal{x}(x) \neq 0]$

L'objet x appartient à $\mathcal{X}$.

Nous appellerons par convention:

X(1), l'ensemble des objets de X qui satisfont la propriété 1 et ceci pour tout y appartenant à X;

$$X(1) = \{x \in X;\ \forall\ y \in X,\ \forall\ \alpha \in\ ]0,1[\ /\ \mathcal{x}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0\}.$$

X(2), l'ensemble des objets de X qui satisfont la propriété 2 et ceci pour tout y appartenant à X;

$$X(2) = \{x \in X;\ \forall\ y \in X,\ \exists\ \alpha \in\ ]0,1[\ /\ \mathcal{x}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0\}.$$

X(3), l'ensemble des objets de X qui satisfont la propriété 3. De fait, cela correspond[2] à la définition du support exclusif de $\mathcal{X}$;

$$X(3) = \mathrm{supp}\mathcal{X}.$$

3. LES PROPOSITIONS SIMPLES

Pour $x \in X$,

a) il est assez évident que:

$$\text{si } [\forall\ \alpha \in\ ]0,1[\text{ et } \forall\ y \in X,\ \mathcal{X}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0]$$
$$\Rightarrow$$
$$[\exists\ \alpha \in\ ]0,1[;\ \forall\ y \in X,\ \mathcal{X}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0].$$

Aussi pouvons-nous conclure:

$$\underline{X(2) \subseteq X(1)}.$$

b) Il est tout aussi évident que:[3]

$$\text{si } [\text{il n'existe pas un } \alpha \in\ ]0,1[;\ \forall\ y \in X,\ \mathcal{X}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0]$$
$$\Rightarrow$$
$$[\forall\ \alpha \in\ ]0,1[,\ \forall\ y \in X,\ \mathcal{X}(\alpha x + (1-\alpha)y) \neq 0].$$

Alors, le complémentaire de X(2) dans X et X(1) sont des ensembles dijoints. En notant $X(2)^c$ le complémentaire de X(2) dans X, nous pouvons écrire:

$$\underline{X(2)^c \cap X(1) = \emptyset}.$$

---

2 On prendra garde de ne pas *systématiquement* assimiler le support exclusif de $\mathcal{X}$ à l'ensemble X lui-même. Rien n'empêche un élément de X d'être gratifié d'un niveau d'appartenance nul à $\mathcal{X}$.

3 On remarquera que les deux propositions simples a) et b) permettent déjà d'écrire que X(2) et X(1) sont le même ensemble, résultat qui n'apparait explicitement que dans la proposition complexe e).

c) $X(3)^c \subseteq X(1)$.

Démonstration: Si $[\forall\ \alpha \in\ ]0,1[,\ \forall\ y \in X,\ \mathcal{X}(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0]$ pour un x donné, $x \in X$, puisque $\mathcal{X}(.)$ est une fonction continue sur X, alors: $\lim_{\alpha \to 1^-} [\mathcal{X}(\alpha x + (1-\alpha)y)] = 0$, i.e. $\mathcal{X}(x) = 0$: $x \notin X(3)$.

Donc si $x \in X(1) \Rightarrow x \notin X(3)$; en langage ensembliste, cela signifie: $X(1) \supseteq X(3)^c$, c'est-à-dire, $\text{supp}\mathcal{X}^c \subseteq X(1)$.

□

d) $X(2) \subseteq X(3)^c$.

Démonstration: Si $\mathcal{X}(x) = 0$, cela signifie puisque $\mathcal{X}(.)$ est continue sur X, que: $\lim_{\alpha \to 1^-} [\mathcal{X}(\alpha x + (1-\alpha)y)] = 0$. Autrement dit, $\exists\ \alpha \in\ ]0,1[$ tel que $\forall\ y \in X,\ \mathcal{X}(\alpha x + (1-\alpha)y)] = 0$. En langage ensembliste, cela devient, $x \in X(3)^c \Rightarrow x \in X(2)$; $X(2) \subseteq X(3)^c$.

□

e) $X(2) = X(1) = X(3)^c$.

Démonstration: La proposition d) nous affirme $X(2) \subseteq X(3)^c$, cependant que la proposition c) nous dit, $X(3)^c \subseteq X(1)$. Ceci s'écrivant alors: $X(2) \subseteq X(3)^c \subseteq X(1)$.

Nous savons aussi que $X(1) \supseteq X(2)$ et $X(2)^c \cap X(1) = \emptyset$. Si l'ensemble $X(1) \supseteq X(2)$, alors, $X(2)^c \supseteq X(1)^c \Rightarrow X(2) \cap X(1)^c = \emptyset$. Mais nous savons aussi que $X(2)^c \cap X(1) = \emptyset$ (par b), c'est-à-dire $X(2)^c \cup X(1) = X$ et $X(2) \cup X(1)^c = X$; donc $X(2)^c \cup X(1) = X(2) \cup X(1)^c$. Comme par ailleurs, nous venons de montrer que $X(2) \cap X(1)^c = \emptyset$ et que par définition $X(2) \cap X(2)^c = \emptyset$, nous pouvons conclure: $X(2) = X(1)$. Si $X(2) = X(1)$ et $X(2) \subseteq X(3)^c \subseteq X(1)$, alors nous avons clairement établi: $X(2) = X(1) = X(3)^c$ ou $X(2)^c = X(1)^c = X(3) = \text{supp}\mathcal{X}$.

□

(Pour toutes ces démonstrations en langage ensembliste, voir

QUINE [1972], chap 18, 19 et 20.)

Qu'avons nous montré? Si $X(2)^c = X(1)^c = \mathrm{supp}\mathcal{X}$, cela signifie que si un objet x appartient au support du sef $\mathcal{X}$, sef issu du préordre $\mathcal{R}(.,.)$, alors $[\forall\ \alpha \in\ ]0,1[,\ \forall\ y \in X,\ \varkappa(\alpha x + (1-\alpha)y) \neq 0]$. Aussi, dès lors que deux objets x et y ont un degré d'appartenance supérieur à 0 au sef $\mathcal{X}$, toutes leurs combinaisons convexes ont **également** un degré d'appartenance supérieur à 0, dans $\mathcal{X}$.

La convexité usuelle nous dit: si x et y appartiennent à l'ensemble usuel X, si X est convexe, alors toutes les combinaisons convexes de x et y appartiennent à X. Intuitivement, la notion de convexité floue signifie: **si deux éléments du référentiel appartiennent au support exclusif du sef, alors toute combinaison convexe de ces deux éléments y appartient aussi**. La proposition complexe e) induit ainsi que pour n'importe quel support exclusif avec une fonction d'appartenance continue, celui-ci est *convexe* au sens où nous l'entendons ici.

Définition : Un sous-ensemble flou $\mathcal{X}$ du référentiel convexe X et **ℓ-convexe** si et seulement si:
$\forall\ (x,y) \in (\mathrm{supp}\mathcal{X})^2,\ \forall\ \alpha \in\ ]0,1[,\ (\alpha x + (1-\alpha)y) \in \mathrm{supp}\mathcal{X}$.

Une autre manière de présenter cette ℓ-convexité est de considérer comme équivalentes les deux propositions suivantes:

$$[\forall\ \alpha \in\ ]0,1[,\ \varkappa(\alpha x + (1-\alpha)y) > 0] \Leftrightarrow [\varkappa(x) > 0 \text{ et } \varkappa(y) > 0].$$

En démontrant précédemment que l'ensemble complémentaire de X(2) dans X est en fait le support exclusif du sef $\mathcal{X}$, nous établissons le lemme suivant.

LEMME 1: Soit un référentiel convexe X et $\mathcal{X}$ un sef quelconque de X. Si $\varkappa(.)$, la fonction d'appartenance de $\mathcal{X}$ est continue, alors le sef $\mathcal{X}$ est ℓ-convexe.

Remarquons ici, que cette notion intuitive de la convexité floue est très différente de la convexité usitée en littérature floue (**LIU [1977]**, **WEISS [1976]**, **KAUFMANN [1973]**, **PREVOT [1977]**, **ZIMMERMANN [1985]**, **PONSARD [1980]** et **CHANG [1968]**), cette dernière étant simplement issue des propriétés d'épigraphes (voir **MOULIN, FOGELMAN & SOULIE [1979]**).

En effet, si nous envisageons une fonction f(.) définie sur un espace E, vers $\mathbb{R}$, on appelle **épigraphe** de f(.), noté épi(f), l'ensemble $\{(x,\lambda) \in E\times\mathbb{R};\ f(x) \leq \lambda\}$. On sait qu'un épigraphe de fonction f(.) est convexe si la fonction est convexe. En revanche, l'ensemble complémentaire (non exclusif) $\overline{\mathrm{epi}(f)}_\lambda$, défini comme suit, $\overline{\mathrm{epi}(f)}_\lambda = \{(x,\lambda) \in E\times\mathbb{R};\ f(x) \geq \lambda\}$, est convexe si et seulement si, pour E convexe, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \mathrm{Min}\ \{f(x),f(y)\}$, c'est-à-dire si f(.) est quasi-concave. En d'autres termes, un sous-ensemble flou $\mathcal{X}$ est convexe (au sens de la littérature) si la fonction d'appartenance $\mathscr{x}(.)$ est quasi-concave; c'est ici, que l'on retrouve les préordres initiaux.

Dans notre démarche, la fonction d'appartenance de $\mathcal{X}$ est directement issue des préordres. Aussi, le sef élaboré à partir des préférences individuelles n'est convexe que si la fonction d'appartenance est quasi-concave. Or, cette fonction d'appartenance est la fonction d'utilité floue. Ceci induisant alors que l'ensemble X, sous- ensemble flou préordonné par $\mathcal{R}(.,.)$ n'est convexe que si la fonction $\mathscr{x}(.)$ est quasi-concave, c'est-à-dire si les préordres sont convexes. Et nous retrouvons ainsi la liaison qui unit la convexité des ensembles fondamentaux (qui joueront le rôle des référentiels) et celle des préordres associés, liaison qui est à la base de la non-vacuité du noyau usuel dans l'approche coopérative des jeux.

Notre but est simple. Nous nous contenterons de la ℓ-convexité, immédiatement acquise si $\mathscr{x}(.)$ est continue, i.e. si le référentiel X est connexe et le préordre de choix continu, pour exhiber un noyau et des conditions de non-vacuité libres de toute contrainte de convexité sur les préordres, puisque le sef $\mathfrak{X}$ est ℓ-convexe même si le préordre de choix n'est pas convexe. Toutefois, il est clair que notre noyau flou - nous l'appellerons Noyau Périphérique (N.P.) - n'est identique, en toute généralité, ni au noyau usuel non plus qu'au Noyau Flou de AUBIN. Pour définir ce Noyau Périphérique, nous avons besoin de deux références: d'une part un planificateur intéressé à la non-vacuité du coeur périphérique (i.e.N.P.) et d'autre part, les ε-coeurs de la littérature non floue (**WEBER [1979]**, **WOODERS [1983]**).

NON-VACUITE DU COEUR PERIPHERIQUE

1. ε-COEURS, PLANIFICATEUR LUDIQUE ET COALITIONS

Avant que d'entrer plus avant dans la technique et ses développements formels, nous devons préciser, suivant une analyse plus intuitive, ce que va signifier cette notion de **noyau périphérique**. Si le noyau usuel (on le nommera **noyau intra-muros** pour souligner qu'il est toujours inclus dans le noyau périphérique) est vide, c'est-à-dire si le jeu est équilibré, que se passe-t-il *pratiquement*? L'économie ignore-t-elle la décision que la société va choisir, celle-ci lui échappe-t-elle? Ce qui nous intéresse, c'est d'apprendre ce qui *pratiquement* va se passer, étant entendu que la société doit - malgré tout - choisir une allocation, une issue s'il s'agit d'un jeu pur (encore que les joueurs puissent cesser de jouer, ce qui n'est pas le cas des agents économiques). Dans le cadre de notre approche, en absence de convexité des préordres individuels, le coeur intra-muros est vide. En d'autres termes, nous allons essayer d'exhiber des solutions satisfaisantes dans le cas où les préordres imprécis des agents ne sont plus nécessairement convexes.

1.1. LES ε-COEURS

Si le jeu n'est pas équilibré - i.e. si les préordres ne sont pas convexes - le coeur intra-muros est vide. Dans l'analyse des économies d'échange, l'introduction du concept de **noyaux-approchés** a permis l'élaboration de nouvelles conditions garantissant la non-vacuité de ce noyau-approché (voir **WOODERS & ZAME [1984]**). L'une des formulations possibles de cette notion de noyau-approché correspond à celle de ε-coeur (ε-core dans la littérature anglo-saxonne, coeur et noyau signifiant ici la même chose), introduite par **SHAPLEY** et **SHUBIK** dans leur article de **[1969]**; dans la même lignée, en utilisant une extension du principe de structure équilibrée[4] à la SCARF [1967], **WEBER [1979]** a montré qu'un certain nombre de jeux avec continuum de joueurs à la AUMANN possédaient des noyaux non-vides à un ε (très petit) près. L'analyse des noyaux-approchés pour jeux avec continuum de joueurs sans structure équilibrée a été faite par **WOODERS [1983]** à l'aide d'une hypothèse de réplication identique à celle formulée par AUBIN [1986]. Les travaux qui viennent d'être cités ainsi que ceux de AUBIN (dans le cas des coalitions floues) montrent une évidente liaison entre "*extension du nombre des joueurs*" - par hypothèse ou par réplication - et "*condition de jeu équilibré*". Autrement dit, on peut envisager des solutions équilibrées pour un jeu coopératif - sans convexité des préordres - si l'on étend le cardinal de la société vers l'infini. Toutefois, le noyau d'une telle économie (ou d'un tel jeu) est approché à un ε près, ce qui signifie que les agents, dans une coalition, subissent une sorte de *myopie* (mesurée par ε) qui les rend indifférents entre deux allocations, à un ε près, en termes d'utilité: ils acceptent de perdre un ε d'utilité pour ne pas bloquer une allocation ou une issue. On en déduit un noyau-approché, noté ε-coeur. L'une des interprétations de cette *myopie*, proposée

---

4 ou **balancedness**, cf **BONDAVERA [1963]** et **SHAPLEY [1973]**, issue de la convexité des préordres dans un jeu sans paiements latéraux et sans transfert d'utilité, ce qui correspond bien au cas d'une économie d'échange où les utilités individuelles sont ordinales.

par SHAPLEY & SHUBIK [1969], explique "ε" comme un coût d'organisation prélevé à ses membres par la coalition.

Cependant, ce type de noyaux-approchés se fonde sur la convexification de la société (réplication ou continuum direct à la AUMANN) et remplace, en quelque sorte, la convexité des préordres individuels par la convexité de l'ensemble des joueurs. Que se passe-t-il si l'on ne réplique pas une économie avec un nombre **fini** de joueurs? La réponse que nous allons proposer à cette question reposera uniquement sur la ℓ-convexité du sous-ensemble flou associé au préordre flou individuel du joueur ou de l'échangiste, et sur un planificateur ludique.

1.2. LE PLANIFICATEUR LUDIQUE

Chez WALRAS, il est un individu - le commissaire-priseur - dont la satisfaction grandit avec la réduction des excédents, qu'ils soient d'offre ou de demande.

Ici, le **planificateur ludique** est un frère jumeau du commissaire-priseur walrassien. Sa satisfaction croit avec la réduction de l'*écart* entre le noyau périphérique et le noyau intra-muros, sous la contrainte que le noyau périphérique reste toujours non-vide. Le dernier noyau périphérique (i.e. celui qui maximise l'utilité du planificateur ludique sous contrainte de non-vacuité) est de la même famille que le **Least-Core** de **OWEN [1982]**, établi par régression sur les ε-coeurs d'une économie répliquée.

1.3. LES COALITIONS

Que signifie dans un contexte d'échange, "participer à une coalition"? Cela veut dire *adhèrer* (gratuitement, sauf pour les ε-coeurs) à une institution intermédiaire qui peut permettre à n'importe quel individu y appartenant, de réaliser des échanges plus profitables que ceux proposés par la société. Que AUBIN utilise cette notion de coalition floue pour convexifier l'ensemble des coalitions et ainsi réduire celui des allocations ou imputations non-bloquées (i.e. le noyau intra-muros) ne change rien au fait que son argument est par essence technique, quand bien même une signification intuitive s'y rattache aisément. Une coalition économique (i.e. liée à un cadre d'échange avec ou sans production) est fondée sur l'intérêt et le seul intérêt des individus. Or cet intérêt est défini à partir d'une rationalité économique qui entraine l'individu à rechercher le maximum de satisfaction dans un environnement donné, y compris lorsque cette satisfaction résulte d'une approche floue des préférences. Sauf à endogénéiser les appartenances des agents aux coalitions mais qui n'est éffectué ni par AUBIN, ni par BUTNARIU, rien ne permet d'expliquer économiquement pourquoi un agent appartiendrait à différents niveaux, aux coalitions en présence. En revanche, l'agent peut s'estimer représenté *plus ou moins* efficacement par les coalitions et cette notion, classique, est d'ailleurs à l'origine des structures équilibrées (*balanced*); elle signifie que l'agent attribue à chaque coalition auquel il participe une **fraction de représentativité**. La différence entre les deux approches correspond à l'évidence suivante: j'appartiens complétement à mon entreprise ou à mon université ainsi qu'à mon immeuble, mais je suis assistant <u>et</u> locataire, Professeur <u>et</u> propriétaire, aussi pour me décrire parfaitement dois-je signifier qu'une partie de moi est expliquée par mon université et une autre par mon immeuble, ce qui ne remet pas en cause le fait que j'appartienne totalement à mon université et que j'habite totalement dans mon immeuble. En revanche, un système de coalitions floues signifierait "*j'appartiens à l'université* X *à 0,4*" ou "*je suis un habitant de l'immeuble* Y *à 0,5*". Les entités économiques (celles qui réfèrent à des institutions susceptibles d'éffectuer des réallocations) ne peuvent constituer des sous-ensembles flous.

Autrement dit, il ne faut pas confondre une coalition qui peut redistribuer à l'intérieur (marché interne comme en Théorie du Travail) et une coalition issue directement des choix individuels dont la fonction est d'engendrer une décision collective, non de procéder à des allocations internes qui exigent une solidarité d'intérêts peu compatible avec la coexistence d'agents impliqués différemment. Cette conception nous a amené à rejeter l'hypothèse de coalition floue. A ces arguments théoriques vient s'ajouter un argument technique. Nous avons vu que l'hypothèse faite par AUBIN menait à une restriction du noyau intra-muros mais ceci sous une évidente condition de convexité des préordres individuels puisqu'il fallait, au préalable, que ce noyau intra-muros ne fût point vide. Or, notre but n'est pas de restreindre le noyau mais au contraire de le remplir dans des situations où usuellement il est vide. Notre démarche nous pousse alors à ne rien ajouter qui puisse diminuer le cardinal du noyau.

2. LE CONCEPT DE NOYAU PERIPHERIQUE

Nous allons rappeler les différents hypothèses qui régissent notre modèle afin qu'il ne subsiste aucune ambiguité entre l'approche de AUBIN et celle que nous proposons maintenant.

2.1. LE MODELE

1) Nous considérons l'ensemble des joueurs (ou des agents économiques), noté S. Le cardinal de S, $|S|$, est un nombre fini, n: $|S|=n$.

2) On appelle **coalition d'agents** n'importe quel sous-ensemble usuel de S. Nous en déduisons qu'il n'existe que 2^n coalitions possibles.

N'importe quelle coalition est *a priori* possible. Néanmoins, il est assez intuitif de supposer que certaines des 2^n coalitions possibles ne seront pas actives puisque - ainsi que nous l'avons rappelé précédemment - il est nécessaire qu'une communauté d'intérêts réunissent les agents sous forme de groupe solidaire appelé **coalition**. C'est la raison pour laquelle l'ensemble des coalitions actives, noté CA, sera un souss-ensemble usuel de P(S), l'ensemble des parties de S. On appelle CA une **structure de coalitions**, avec $CA \subseteq P(S)$. (Ainsi, $\emptyset \in P(S)$ mais trivialement $\emptyset \notin CA$.)

3) A n'importe quelle coalition active C, $C \in CA$, correspond une famille de coefficients (α^i_c), pour chaque agent i appartenant à C. α^i_c symbolise la *fraction* de l'individu i que ce dernier estime *représentée* par la coalition C (tout en appartenant à C au niveau usuel 1). Ainsi, un membre de la famille X, assistant à l'université Y, adhérent du syndicat Z, possèdera trois coefficients α_x, α_y et α_z, à l'aide desquels il s'estimera **parfaitement** décrit. En d'autres termes, pour cet agent i: $\alpha^i_x + \alpha^i_y + \alpha^i_z = 1$.

4) Par ailleurs, chaque coalition active C, $C \in CA$, représente chacun de ses membres et ceci sans discrimination. Qu'il soit assistant, Maitre de conférence ou Professeur, l'agent est représenté par l'université Y (à laquelle participent les trois grades) de façon identique: $\forall\, C \in CA,\ \forall\, (i,j) \in C^2,\ i \neq j;\ \alpha^i_c = \alpha^j_c$.

4bis) La satisfaction **simultanée** des hypothèses 3) et 4) induit ce que l'on appelle une **structure équilibrée**.

5) Pour n'importe quel sous-ensemble C de S - et donc en particulier pour les éléments de CA - on désignera par $\mathbb{R}^C$ l'ensemble des vecteurs de composantes u_i, où u_i désigne le niveau d'utilité ressenti par l'agent i (pour une allocation donnée), $i \in C$. De cette définition, on peut déduire[5] que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^S$.

6) Par construction, nous ferons appel à un opérateur π, tel qu'à partir d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^S$, $u = (u_i)_{i \in S}$, π associe les seules composantes liées aux membres d'une coalition C, qui

---

[5] Cette écriture est une convention qui évite de distinguer la coalition de son cardinal, lorsque l'on définit l'espace référentiel des vecteurs d'utilité interne.

forment alors un vecteur de $\mathbb{R}^C$:

$$\pi: \mathbb{R}^S \longrightarrow \mathbb{R}^C$$
$$(u_i)_{i\in S} \longrightarrow \pi(u) = (u_i)_{i\in C}.$$

Par définition, on appelle les vecteurs de $\mathbb{R}^C$, des **C-imputations**. Ce qui constitue alors un jeu coopératif avec n agents (ou joueurs), est la donnée, pour n'importe quelle coalition non-vide de S, d'une partie non-vide de $\mathbb{R}^C$, notée V(C) avec:

$$V(C) - \mathbb{R}^C \subset V(C) \qquad (1)$$

Que signifie tout cela?

Représentons-nous la société S comme une collection de n individus. Envisageons maintenant un vecteur u de $\mathbb{R}^C$: celui-ci attribue une utilité u_i à chaque membre de C. L'agent i cherche alors à maximiser son utilité u_i (fut-elle floue). Or, la règle du jeu permet la réalisation d'alliances diverses. Le problème du joueur comme de l'agent échangiste est d'entrer dans la coalition qui lui garantit le plus haut niveau d'utilité. Pour ce faire, l'agent i passe en revue toutes les coalitions de CA et compare ce qu'elles lui proposent. V(C) est précisément la traduction mathématique de cette imputation que la coalition C peut garantir à chacun de ses membres. Ceci signifiant que si la coalition C se forme effectivement, et si ses *adhérents* décident d'une imputation $(u_i)_{i\in C} \in \mathbb{R}^C$, alors plus personne (c'est-à-dire aucun membre de l'anti-coalition S - C) ne pourra aller à l'encontre et menacer cette imputation. En d'autres termes, il y a pour la coalition C une manière de jouer telle qu'au terme du jeu, chaque adhérent i de C se retrouve avec un niveau de satisfaction au moins égal au u_i de $(u_i)_{i\in C}$. Ceci explique pourquoi la coalition C se moque éperdument de ce qui arrive aux autres agents que les siens (postulat d'égoïsme reporté sur les super-joueurs que sont toutes les coalitions), ce qui est exprimé par l'équation (1).

2.2. L'ECONOMIE D'ECHANGE

On considère une économie d'échange du même type que celle envisagée par AUBIN. Nous mettons en situation des agents (en nombre fini $n = |S|$) ayant à se partager des dotations initiales $\vec{D}$, constituées de l biens répartis entre les n individus (i.e. $\vec{D} \in \mathbb{R}_+^l$), sous deux hypothèses, de détention initiale des dotations (H1) et d'égoïsme (H2).

On appelle une allocation, n'importe quel vecteur x de $\mathbb{R}_+^{ln}$. Si l'allocation x est telle que:

$$\sum_{i:1}^{n} x_i = \vec{D},$$

on dit alors que l'allocation x est **réalisable**.

2.2.1. LA SPECIFICATION DES AGENTS

C'est à cet endroit que nous retrouvons les préférences imprécises. Chaque agent i, $i \in S$, est doté d'un préordre flou de préférence, $\mathcal{R}_i(.,.)$, ℓ-transitif et réflexif (e.f.). Nous supposerons que ce préordre flou est continu et que chaque ensemble X_i de consommations est convexe (et donc connexe), $X_i \subset \mathbb{R}_+^l$, ce qui nous assure l'existence d'une fonction d'utilité floue continue sur X_i et prenant ses valeurs dans $[0,1]$. Nous noterons cette fonction d'utilité floue $fu_i(.)$.

Nous dirons qu'une coalition C de CA bloque totalement l'allocation $x \in \mathbb{R}_+^{ln}$, s'il existe une allocation réalisable $y \in \mathbb{R}_+^{ln}$, telle que:

1) $\vec{D} = \sum_{i \in S} y_i$.
2) $\pi_c[fu_i(y)] \gg \pi_c[fu_i(x)]$ ("$\gg$" signifie *par composante*).

On notera PR(C) l'ensemble des redistributions internes possibles: i.e.

$$PR(C) = \{y \in \mathbb{R}_+^{ln};\ \forall\ i \in C,\ y_i \in \mathbb{R}_+^l \text{ et } \sum_{i \in C} y_i = \sum_{i \in C} d_i\}.$$

On notera FU(C) l'ensemble des utilités floues que la coalition C peut simultanément assurer à ses membres: i.e.

$$FU(C) = \{[fu_i(y_i)];\ y \in PR(C)\}.$$

2.2.2. LE COMPORTEMENT DES AGENTS

L'ensemble PR(S) est l'ensemble de toutes les allocations réalisables. Par construction, $PR(S) \subseteq \prod_{i \in S} X_i$. Nous supposerons que PR(S) est convexe et compact. Chaque agent, membre de la société, va engendrer un sous-ensemble flou $\mathcal{PR}_i(S)$, à l'aide de son préordre flou de préférence, ℓ-transitif et réflexif (e.f.) en ordonnant les allocations de PR(S) de la façon suivante: $\forall\ (x,y) \in [PR(S)]^2$, si l'agent i estime que les qualités relatives de l'allocation x (restreinte par <u>H1</u> à x_i) sont supérieures à celles de y, alors il écrira $prs_i(x_i) > prs_i(y_i)$, où $prs_i(.)$ est la fonction d'appartenance du sef $\mathcal{PR}_i(S)$ inclus dans le référentiel PR(S). Puisque $\forall\ i \in S$, $\mathcal{R}_i(.,.)$ est un préordre flou continu et PR(S) est connexe, alors la fonction d'appartenance $prs_i(.)$ est continue[6]. Nous pouvons ainsi établir directement le résultat suivant:

LEMME 4: $\forall\ i \in S$, $\mathcal{PR}_i(S)$ est ℓ-convexe.

Démonstration: Elle est évidente puisque $prs_i(.)$ est continue et

---

[6] Il est clair que si $\prod_{i \in S} X_i = PR(S)$ (ce qui est à la fois plus intuitif et moins général), alors $prs_i(.)$ et $fu_i(.)$ sont identiques.

qu'il suffit d'appliquer le lemme 3.

□

2.2.3. LA DEFINITION DU NOYAU PERIPHERIQUE

> "The reader will find that it will pay well to absorb these definitions at the outset to avoid the temptation to treat them as empty formalism. It is important to be in a balanced frame of mind for this section!"
>
> Werner HILDENBRAND et Alan KIRMAN
> Introduction to Equilibrium Analysis

En redéfinissant une fonction d'utilité floue $prs_i(.)$ sur PR(S), chaque agent restreint sa satisfaction aux allocations réalisables. Les possibilités de blocage sont - jusqu'à présent - d'un seul type. Si une allocation x est toujours moins satisfaisante, à l'intérieur d'une coalition donnée, qu'une imputation interne réalisable, cette allocation x sera totalement bloquée. Une allocation x appartiendra donc au noyau intra-muros si aucune coalition ne la bloque. On pourrait ainsi définir le noyau intra-muros (NIM)[7] comme suit:

$$NIM = \{x \in PR(S);\ \forall\ C \in CA,\ \exists\ i \in C,\ \forall\ y \in PR(C),\ prs_i(x_i) \geq prs_i(y_i)\}.$$

Nous savons que NIM est un ensemble usuel, c'est-à-dire que:

$$\forall\ x \in NIM;\ nim(x) = 1.$$

Mais le noyau intra-muros ne décrit que les allocations qui sont totalement non-bloquées, ce qui correspond à cette appartenance unitaire. Envisageons maintenant des allocations qui *a priori*

---

7 Par définition; $\forall\ y \in PR(C),\ \exists\ y' \in PR(S)$ telle que:

$$\pi_c[prs_i(y'_i)] = [prc_i(y_i)]_{i \in C}.$$

Par convention, on notera les composantes $prs_i(y_i)$.

sont bloquées, mais à un niveau *plus ou moins* fort de satisfaction Si une allocation x' réalisable est bloquée, elle n'appartient **pas** au coeur intra-muros: i.e.

$$nim(x') = 0 \Leftrightarrow \exists\ C \in CA;\ \forall\ i \in C,\ \exists\ y \in PR(C) : prs_i(x_i) < prs_i(y_i).$$

Dès que l'un des membres de chaque coalition préfère une allocation externe réalisable, cette allocation appartient à NIM.

Néanmoins, en introduisant des comparaisons interpersonnelles ordinales d'utilité par le biais d'un planificateur, il est des allocations rejetées qui induisent un niveau de satisfaction très proche mais inférieur au niveau d'utilité correspondant à un élément de NIM. Pour synthétiser ce type d'informations, l'outil le plus apte est l'intersection et/ou l'union des différents sous-ensembles flous $\mathcal{PR}_i(S)$. En effet, prendre l'intersection des $\mathcal{PR}_i(S)$, cela équivaut à conférer à une allocation rejetée **le niveau minimum** des niveaux maximums de satisfaction qu'elle engendre chez les membres des coalitions de la structure CA.

<u>H4</u>: On peut effectuer des comparaisons interpersonnelles ordinales d'utilité.

<u>H5</u>: $\forall\ i \in C,\ \forall\ C \in CA,\ fu_i(d_i) > 0.$

Nous pouvons maintenant définir un sef, le Noyau Périphérique, incluant le NIM, comme suit:

Définition : On appelle **Noyau périphérique** le sous-ensemble flou de PR(S) suivant:

$$\mathcal{NP} = \{x \in PR(S),\ np(.) \in \underline{M} = [0,1];\ np(x) = \underset{C \in CA}{\text{Min}}\ [\underset{i \in C}{\text{Max}}\ prs_i(x_i)]\}.$$

Notre problème est alors d'une étonnante simplicité. En effet, tout élément de $\mathcal{PR}_i(S)$ appartient à $\mathcal{NP}$ ($\forall\ i\ \in\ S$).

THEOREME I: Quelle que soit la nature (convexe ou non) des préférences floues des agents appartenant à S, l'économie d'échange est ℓ-équilibrée.

Démonstration: α) Envisageons d'abord une structure équilibrée de coalitions, notée E, ainsi qu'une allocation $\vec{a}$ vérifiant $\pi(\vec{a}) \in V(C)$. Plaçons-nous dans la situation où pour toute coalition C de E, il existe des paniers de biens $y^c \in PR(C)$ tels que, $\forall$ i $\in$ C:

$$prs_i(y_i^c) \geq a_i .$$

Les deux conditions définissent en quelque sorte le "*noyau de la coalition* C", autrement dit les allocations réalisables qui augmentant la satisfaction interne minimale garantie des agents de la coalition C, notée $\vec{a}$. Il nous reste à montrer qu'à partir de ces conditions, on peut engendrer une solution qui appartienne au noyau périphérique de l'économie.

Comme la structure E est équilibrée, cela signifie que nous pouvons associer à chaque coalition C de E, un coefficient $\alpha_c > 0$, de telle sorte que: $\forall$ i $\in$ S, $\sum_{C \in Ei} \alpha_c = 1$, où Ei désigne l'ensemble des C de E qui contiennent l'agent i. Définissons une allocation z par l'équation: $\forall$ i $\in$ S, $\sum_{C \in Ei} \alpha_c . y_i^C = z_i$, ce qui signifie que z_i est une combinaison convexe des y_i^C, C $\in$ Ei. Comme les X_i, sont convexes et contiennent les y_i^C, ils contiennent les z_i. Si les X_i sont convexes et donc connexes, et les préordres flous individuels $\mathcal{R}_i(.,.)$ continus (i.e. $fu_i(.)$ continue sur X_i), alors par construction le sous-ensemble flou des $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^l$ tels que $fu_i(x_i) \geq a_i$ est ℓ-convexe.

Si nous appelons $\mathcal{X}^a$ ce sous-ensemble flou de X_i, alors si deux allocations y appartiennent, toute combinaison convexe de ces deux allocations y appartiendra aussi. Par définition, $\mathcal{X}^a(y_i^C) > 0$. Aussi, $z_i = \sum_{C \in Ei} \alpha_c . y_i^c$ est tel que $\mathcal{X}^a(z_i) > 0$.

Finalement, nous obtenons en toute généralité que si $fu_i(y_i^c)$ est supérieur à a_i, par construction, alors $fu_i(z_i)$ est aussi supérieur à a_i et donc, il nous reste à démontrer que z appartient bien à PR(S) pour assurer l'équilibre de l'économie d'échange.

β) En faisant porter la sommation du second membre sur tous les couples (i,C) de S×E, on obtient:

$$\sum_S z_i = \sum_{C\in E} \sum_{i\in C} \alpha_c . y_i^c = \sum_{C\in E} \alpha_c . \left[\sum_{i\in C} y_i^c \right] = \sum_{C\in E} \alpha_c . \left[\sum_{i\in C} d_i \right]$$

$$= \sum_{C\in E} \sum_{i\in C} \alpha_c . d_i = \sum_{i\in S} \sum_{C\in Ei} \alpha_c . d_i = \sum_{i\in S} d_i . \left[\sum_{C\in Ei} \alpha_c \right] = \sum_{i\in S} d_i ,$$

ce qui prouve bien que $z \in PR(S)$.

γ) Comme, $\forall C\in E$, $y^c \in PR(S)$ - par extension - et que $z \in PR(S)$, comme PR(S) est convexe et que chaque $\mathcal{PR}_i(S)$ est f-convexe, il suffit de reprendre, point par point l'étape α) pour obtenir:

$$\forall\ i \in S,\ prs_i(z_i) > 0.$$

En observant la définition de $\mathcal{NP}$, on a alors immédiatement:

$$np(z) > 0 \Rightarrow \mathcal{NP} \neq \emptyset.$$

□

Remarque: Traditionnellement (**SCARF [1967]**, **HILDENBRAND & KIRMAN [1976]**) on procède, dans ce type de démonstration, par extension d'une coalition *vers* la société. Toutefois, la référence au niveau garanti d'utilité individuelle est, elle aussi classique (voir **CORNWALL [1984]**, **ROSENMULLER [1981]**).

Quoiqu'il en soit, nous avons établi qu'une économie d'échange est toujours f-équilibrée, y compris lorsque les préférences floues des agents sont non-convexes. Néanmoins, il faut pour cela qu'il existe au moins une allocation de $\prod_{i\in S} X_i$ telle que les membres des coalitions aient un niveau d'utilité floue supérieure à 0. Cette contrainte s'exprime par l'hypothèse (H5) qui n'est guère restrictive. Elle signifie seulement qu'indépendamment de toute coalition ou structure de coalitions, les agents attribuent aux dotations initiales un niveau non-nul d'utilité. (Un autre moyen est de définir les sefs de cette section deuxième sur un ensemble d'appartenance $\underline{M}$ =]0,1], ce qui exclut toutes les incomparabilités.)

THEOREME Ibis : Sous H1, H2, H4 et H5 avec PR(S) convexe et $\forall i\in S$ X_i convexe et $\mathcal{R}_i(.,.)$ continu, le Noyau Périphérique de l'économie est non-vide.

L'apport fondamental de ce résultat est de débarrasser la non-vacuité du noyau de cette condition de convexité des préordres individuels. Mais l'endroit où nous sommes arrivés n'est pas encore pleinement satisfaisant en cela que ce noyau périphérique est trop étendu. Il contient toutes les allocations de PR(S) qui satisfont la condition H5 (si on leur applique la contrainte d'utilité non-nulle) et il y a lieu de penser qu'elles sont nombreuses. De plus, d'un strict point de vue pratique, il est possible de **comparer** les allocations du noyau périphérique au moyen de la fonction $np(.)$.

Ce que nous avons obtenu correspond au fait que si le noyau intra-muros est vide, il existe des allocations "*approximativement équilibrantes*" qui permettent de résoudre le problème de l'échange, dans l'économie considérée. Pour obtenir une solution ℓ-équilibrée dans une économie d'échange, il est juste nécéssaire qu'il existe à l'intérieur de chaque coalition, une allocation interne considérée par tout agent membre de la coalition, comme lui confèrant une utilité non-nulle. Il nous a semblé naturel de l'assimiler aux dotations individuelles mais n'importe quelle allocation eût fait l'affaire. Au cours du premier chapitre de la précédente partie, nous avons longuement analysé le cas où un panier est soit *intrinsèquement sans intêret* soit *incomparable avec n'importe quel autre panier.* Pour obtenir avec certitude une solution ℓ-équilibrée, il suffit simplement qu'il existe au moins, au sein de chaque coalition pour chaque membre de cette coalition, une allocation interne qui ne soit pas *intrinsèquement sans intêret*.

Maintenant que nous avons obtenu un sef non-vide qui contient toutes les solutions ℓ-équilibrantes, il est nécéssaire de choisir celles des solutions ℓ-équilibrantes qui se rapprochent le plus du noyau intra-muros puisque la définition de $\mathcal{NP}$ induit pour chaque allocation de $\mathcal{NP}$ un niveau d'appartenance issu de la satisfaction de l'agent le moins satisfait des agents les plus satisfaits.

La fonction d'appartenance de $\mathcal{NP}$ est définie sur $\underline{M}$ = [0,1] (avec, du reste, une possible discontinuité). Compte-tenu de l'hypothèse (H4), il est possible qu'un planificateur compare les différents éléments de $\mathcal{NP}$. L'instrument essentiel dont notre planificateur va se servir est celui des α-coupures. Auparavant, nous allons démontrer deux résultats assez intuitifs qui viendront conforter notre définition du noyau périphérique. Ils cherchent à montrer d'une part, que si le noyau intra-muros existe, il est inclus dans le support du noyau périphérique et d'autre part que le degré d'appartenance des allocations du noyau intra-muros est toujours **supérieur** à celui des allocations qui n'appartiennent qu'au noyau périphérique, sous une condition peu restrictive de limitation des satisfactions à l'intérieur des coalitions.

LEMME 2: Si $\mathcal{NP} \neq \emptyset$ et NIM $\neq \emptyset$, alors: NIM $\subset$ supp$\mathcal{NP}$.

Démonstration: Si NIM $\neq \emptyset$, cela signifie, $\exists$ x $\in$ PR(S); x $\in$ NIM. Cela veut également dire:

$$\forall\ C \in CA,\ \exists\ i \in C,\ \forall\ y \in PR(C):\ prs_i(x_i) \geq prs_i(y_i).$$

Nous pouvons alors écrire:

$$\forall\ y \in PR(C):\ \underset{i\in C}{\text{Max}}\ prs_i(x_i) \geq \underset{i\in C}{\text{Min}}\ prs_i(y_i).$$

Comme $\mathcal{NP}$ est non-vide, cela certifie que (<u>H5</u>) est vérifiée et donc que $\forall\ i \in S,\ fu(d_i) > 0 \Leftrightarrow prs_i(d_i) > 0$. On peut donc en déduire: $\underset{i\in C}{\text{Max}}\ prs_i(x_i) \geq \underset{i\in C}{\text{Min}}\ prs_i(d_i) > 0$ et ceci $\forall\ C \in CA$. Cela implique donc: $\underset{C\in CA}{\text{Min}}\ \underset{i\in C}{\text{Max}}\ prs_i(x_i) > 0$.

Ceci signifie alors: $np(x) > 0 \Rightarrow x \in supp\mathcal{NP}$.

□

Nous ajoutons ici une hypothèse assez intuitive qui signifie qu'il n'existe pas de réallocation interne, quelle que soit la coalition, telle que le maximum de satisfaction qu'elle engendre dans la coalition donnée, **puisse être supérieur** au maximum des satisfactions engendrées par une allocation quelconque du Noyau Intra-Muros.

PSI (Postulat de Satisfaction Interne): $\forall\ C\in CA,\ \forall\ y\in PR(C), \forall\ x\in NIM,$

$$\underset{i\in C}{\text{Max}}\ prs_i(y) \leq \underset{i\in C}{\text{Max}}\ prs_i(x)$$

LEMME 3: Soit une allocation $x \in NIM \neq \emptyset$. Alors, sous PSI, $\forall\ x' \in \mathcal{NP}'$ (où $\mathcal{NP}'$ est tel que $supp\mathcal{NP}' = supp\mathcal{NP} - NIM$), : $np(x') < np(x)$.

Démonstration: Si $x' \in \mathcal{NP}'$: $\exists\ C' \in CA;\ \forall\ i \in C',\ \exists\ y' \in PR(C')$ tel que $prs_i(x') < prs_i(y')$. Aussi,

$$\underset{C'}{\text{Max}}\ prs\ (x'_i) < \underset{C'}{\text{Max}}\ prs\ (y'_i).$$

Par ailleurs, si $x' \in \mathcal{NP}' \Rightarrow \forall\ C \in CA - C':\ \forall\ y \in PR(C)$,

$$\exists\ i \in C;\ prs_i(y) \leq prs_i(x')$$
$$\text{et}\ \forall\ j \in C - \{i\};\ prs_i(y) > prs_i(x')$$

Ceci entraine alors: $\forall\ C \in CA - C'$, $\underset{C}{\text{Max}}\ prs_i(x') \geq \underset{C}{\text{Min}}\ prs_i(y)$.

On obtient ainsi:

1) $\exists\ C' \in CA$, $\exists\ y' \in PR(C')$; $\underset{C'}{\text{Max}}\ prs_i(x') < \underset{C'}{\text{Max}}\ prs_i(y')$

2) $\forall\ C \in CA - C'$, $\forall\ y \in PR(C)$: $\underset{C}{\text{Max}}\ prs_i(x') \geq \underset{C}{\text{Min}}\ prs_i(y)$.

On peut établir alors:

$$\underset{CA}{\text{Min}}\ \underset{C}{\text{Max}}\ prs_i(x') < \underset{CA}{\text{Max}} \left[\underset{C'}{\text{Max}}\ prs_i(y'),\ \underset{C}{\text{Min}}\ prs_i(y)\right],$$

ou encore,

$$np(x') < \underset{CA}{\text{Max}} \left[\underset{C'}{\text{Max}}\ prs_i(y'),\ \underset{C}{\text{Min}}\ prs_i(y)\right].$$

β) Montrons maintenant que $\forall\ x \in NIM$:

$$np(x) \geq \underset{CA}{\text{Max}} \left[\underset{C'}{\text{Max}}\ prs_i(y'),\ \underset{C}{\text{Min}}\ prs_i(y)\right].$$

Supposons qu'il existe une allocation x appartenant à NIM telle que:

$$np(x) < \underset{CA}{\text{Max}} \left[\underset{C'}{\text{Max}}\ prs_i(y'),\ \underset{C}{\text{Min}}\ prs_i(y)\right].$$

Cela signifie que:

$$\underset{CA}{\text{Min}}\ \underset{C,C'}{\text{Max}}\ prs_i(x) < \underset{CA}{\text{Max}} \left[\underset{C'}{\text{Max}}\ prs_i(y'),\ \underset{C}{\text{Min}}\ prs_i(y)\right].$$

Nous pouvons en déduire deux situations alternatives:

1) $\exists\ C \in CA - C'$; $\underset{C}{\text{Max}}\ prs_i(x) < \underset{C}{\text{Min}}\ prs_i(y)$

$$\Rightarrow$$

$$\forall\ i \in C:\ prs_i(x) < prs_i(y).$$

Ceci nous permet d'écrire:

$$\exists\ C \in CA;\ \forall\ i \in C,\ \exists\ y \in PR(C)\ /\ prs_i(x) < prs_i(y).$$

Aussi, la coalition C (il peut y en avoir plusieurs) bloque-t-elle l'allocation x. On en déduit que $x \notin NIM$, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. (On remarquera que PSI empêchait déjà cette équation.)

2) $\underset{C'}{\mathrm{Max}}\ prs_i(x) < \underset{C'}{\mathrm{Max}}\ prs_i(y')$. Ce cas est trivialement interdit par PSI.

Les deux cas règlés, nous pouvons écrire:

$$\forall\ x \in NIM,\ np(x) \geq \underset{CA}{\mathrm{Max}} \left[\underset{C'}{\mathrm{Max}}\ prs_i(y'),\ \underset{C}{\mathrm{Min}}\ prs_i(y)\right].$$

Ainsi nous pouvons conclure, $\forall\ x \in NIM$, $\forall\ x' \in \mathcal{NP}'$:

$$np(x) \geq \underset{CA}{\mathrm{Max}} \left[\underset{C'}{\mathrm{Max}}\ prs_i(y'),\ \underset{C}{\mathrm{Min}}\ prs_i(y)\right] > np(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$np(x) > np(x').$$

□

3. LES NOYAUX α-APPROCHES[8]

Les théorèmes I et Ibis du paragraphe précédent nous amènent à envisager comme *approximativement équilibrantes* toutes les solu-

---

8 On ne confondra pas cette notion avec celle d'α-coeur, liée à l'introduction d'effets externes (utilité de la coalition fonction de celles des autres coalitions). Voir **ROSENTHAL [1971]**.

tions qui appartiennent à $\mathcal{NP}'$, c'est-à-dire toutes les allocations qui demeurent dans le noyau périphérique lorsque le noyau intra-muros est vide. Toutefois, même lorsque ce dernier est non-vide, la fonction d'appartenance - reflétant l'utilité des agents les moins satisfaits - permet, là aussi, de distinguer entre toutes les allocations de NIM (grâce à (H4)), celle des solutions qui en équilibrant le jeu, sont socialement *plus préférables*.

En fin de procédure, les agents ayant manifesté leurs préférences et choisi les coalitions auxquelles ils vont participer, le planificateur ludique dispose du noyau périphérique, c'est à dire d'une fonction d'appartenance traduisant l'utilité sociale sur les allocations *approximativement équilibrantes*. Le lemme 3 du paragraphe précédent va encourager le planificateur ludique à rechercher l'allocation socialement la plus satisfaisante en cela que l'utilité sociale (assimilée au niveau de préférence de l'agent systématiquement le moins satisfait des agents les plus satisfaits) grandit quand, d'une part, on se rapproche du noyau intra-muros (lorsqu'il existe) et d'autre part, quand on hierarchise les allocations du noyau périphérique. Cette utilité sociale, conceptuellement identique à la fonction d'appartenance *np*(.) du noyau périphérique, doit être, dans ce qui va suivre, une fonction continue, définie sur [0,1], ce qui revient à supposer que le noyau périphérique est ℓ-convexe.

Rappelons ce qu'est une α-coupure:
$\forall$ $\mathcal{A}$ un sef d'un référentiel X quelconque, on appelle A_α une α-coupure du sef $\mathcal{A}$ de niveau α, $\alpha \in]0,1]$, l'ensemble suivant:

$$A_\alpha = \{x \in X;\ a(x) \geq \alpha\}.$$

Définition : On appelle **noyau α-approché**, noté NP_α, toute α-coupure du noyau périphérique.

On remarquera que plus α est grand, plus le cardinal de l'ensemble usuel obtenu est petit: i.e. soient $(\alpha,\alpha') \in]0,1]^2$ avec $\alpha > \alpha'$, alors $|NP_\alpha| < |NP_{\alpha'}|$.

Le problème du planificateur ludique est alors simple. Il va rechercher le niveau α^* tel que $\forall\ \alpha > \alpha^*$, $|NP_\alpha| = 0$ avec $|NP_{\alpha^*}| \neq 0$. C'est-à-dire la **dernière** α-coupure du noyau périphérique qui est non-vide[9].

Définition : On appelle **Noyau Ultime**, noté NU, le noyau α^*-approché.

Nous pouvons alors engendrer certains résultats assez intuitifs.

LEMME 4: Si NIM $\neq \emptyset$, sous PSI $\Rightarrow$ NU $\subseteq$ NIM.

Démonstration: Elle se fonde sur le lemme 3. Si NIM $\neq \emptyset$, on sait que pour x' $\in$ NIM, $\forall$ x $\in \mathcal{NP}'$: $np(x) > np(x')$; aussi pour $\bar{\alpha}$ défini par $\bar{\alpha} = \underset{x \in \mathcal{NP}'}{\mathrm{Max}}\ np(x)$, il est clair que $\forall\ \alpha > \bar{\alpha}$: $|NP_\alpha| \leq |NIM|$. Si ceci est vrai pour tout $\alpha > \bar{\alpha}$, c'est également vrai pour α^*, qui, par définition, est supérieur à $\bar{\alpha}$, puisque NIM $\neq \emptyset$. On peut donc établir que $|NP_{\alpha^*}| \leq |NIM|$ i.e. NU $\subseteq$ NIM.

□

LEMME 5: Si NIM $= \emptyset \Rightarrow$ NU $= NP_{\alpha^*}$ où $\alpha^* = \underset{x \in \mathcal{NP}'}{\mathrm{Max}}\ np(x)$.

Démonstration: Si NIM $= \emptyset \Rightarrow \mathcal{NP}' = \mathcal{NP}$. Aussi, par définition, le maximum des α, tel que $|NP_\alpha| \neq \emptyset$ avec $\forall\ \beta > \alpha$, $|NP_\beta| = \emptyset$, est

---

9 Pour que α^* existe, il est nécessaire que $np(.)$ soit définie continue sur un compact, ce qui est le cas de PR(S) par hypothèse.

forcément défini par $\alpha^* = \underset{x \in \mathcal{NP}}{\mathrm{Max}}\ np(x)$. Ceci induit alors: $NU = NP_{\alpha^*}$.

□

LEMME 6: Si $\mathrm{supp}\mathcal{NP} \neq \emptyset \Rightarrow NU \neq \emptyset$.

Démonstration: Si $\mathrm{supp}\mathcal{NP} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ x \in PR(S)$; $np(x) > 0$ et donc $\exists\ \alpha$, $\alpha = np(x) \Rightarrow NU \neq \emptyset$.

□

Le lemme 4 signifie que le noyau ultime est inclus ou égal au noyau intra-muros lorsque les préordres individuels sont convexes. Le lemme 5, quant à lui, exprime le fait que la borne supérieure de la fonction d'appartenance $np(.)$ définit le noyau ultime si le noyau intra-muros est non vide. Le lemme 6, enfin, nous assure de la non-vacuité du noyau ultime dès que le support du noyau périphérique est non vide.

Nous pouvons maintenant conclure par le théorème suivant qui résume toute notre démarche dans ce chapitre:

THEOREME II: Les conditions sous lesquelles le Noyau Ultime d'une économie d'échange est non-vide, sont:

1) l'ensemble des allocations réalisables est un compact convexe
2) le Noyau Périphérique est non vide (cf TH I et Ibis)
3) le Noyau Périphérique est ℓ-convexe
4) PSI est satisfaite.

Si l'on analyse le dernier résultat de ce chapitre, on constate essentiellement la disparition de l'hypothèse de convexité des préordres individuels et la présence d'une condition de comparaison interpersonnelle ordinale d'utilité, équivalente à celle d'existence d'un planificateur ludique. On peut également constater que l'introduction d'une approche en noyau α-approché n'est pas ici - comme c'est le cas dans toute la littérature usuelle citée précédemment - liée au concept d'économie répliquée et/ou à celui de continuum d'agents. Notre ensemble d'agents est fini et c'est cela qui explique la nécéssité de l'hypothèse de comparaison interpersonnelle d'utilité. Il reste alors à discuter la contrainte imposée par chacune des deux conditions afin de définir - si cela est possible - celle des deux qui est la moins restrictive.

Notre propos était double. Il fallait, d'une part, lever l'hypothèse de convexité - que nous estimons très forte[10] - et d'autre part, ne pas affecter les structures de coalitions, soit par réplication, soit par l'introduction de coalitions floues. Nous sommes parvenus à notre but, grâce à la propriété de ℓ-convexité des sous-ensembles flous dont la fonction d'appartenance est continue, moyennant l'introduction des notions d'intersection et d'union floues qui engendrait alors le principe des comparaisons ordinales. Là encore, notre démarche technique rejoint notre ambition théorique. Nous voulions étudier les solutions pratiques d'un jeu sans solution usuelle. L'idée qui est implicite dans notre schéma est celle de collaboration, de coopération totale (même dans les coalitions constituées), et elle se trouve formalisée par la fonction d'appartenance du noyau périphérique, issue des intersections entre les différents $\mathcal{PR}_i(S)$ des i agents les plus satisfaits de chaque coalition.

En effet, par définition, le noyau périphérique contient toutes les allocations socialement réalisables pour lesquelles l'agent le moins satisfait des agents les plus satisfaits de la société a une utilité floue positive. Néanmoins, il faut que, dans une coalition donnée des coalitions non-bloquantes, l'agent le plus

---

10 La convexité des préordres de préférence traduit des goûts *dépolarisés*. On préfère ainsi *un peu de chaque bien* à *une polarisation* sur un bien. Un agent ayant des préférences convexes préfèrera un panier formé d'une chaussure et d'une chaussette à un panier formé d'une paire de chaussures sans chaussette!

satisfait la préfère à toute réallocation interne possible. Ensuite, il faut que l'agent le plus satisfait des agents de la coalition bloquante ne la préfère pas à toutes les réallocations internes. Autrement dit, une allocation socialement réalisable n'appartient au noyau intra-muros qu'à condition, qu'il n'existe pas au moins une réallocation interne dans au moins une coalition qui lui soit préférée par tous les membres de cette coalition. Pour le noyau périphérique, on retrouve bien ces deux étapes. Toute allocation socialement réalisable passe d'abord dans chaque coalition. S'en suivra alors - au plus n - degrés possibles d'appartenance, issus des agents les plus satisfaits. Enfin, on confèrera à l'allocation considérée, le niveau de satisfaction du plus insatisfait des agents *présélectionnés*. Ces différentes notions se trouvent ramenées, au moyen de l'algèbre des sous-ensembles flous (**ZIMMERMANN [1985]**), au concept d'union des différents $\mathcal{PR}_i(S)$, et ceci dans chaque coalition, c'est-à-dire à l'union des ensembles d'allocations réalisables préordonnées par les préférences imprécises des agents de chaque coalition, puis au concept d'intersection des ensembles d'allocations réalisables préordonnées par les préférences imprécises des agents les plus satisfaits. L'un des *miracles* auxquels nous assistons est de voir l'émergence d'une solution équilibrée (par l'intermédiaire d'un planificateur ludique) correspondre à une concertation généralisée des agents, par dessus les coalitions dont la simple vertu devient alors de définir une structure équilibrée. En d'autres termes, si nous nous plaçons dans des conditions usuelles (préordres convexes), le planificateur ludique engendrera une solution **parfaitement équilibrée** qui, de plus, se trouvera, dans la plupart des cas, à un niveau socialement supérieur à celui de certaines allocations équilibrées du noyau que nous n'aurions pu distinguer dans le cas usuel.

AUBIN J.P. [1974]. "Coeur et Valeur des Jeux Flous", *Compte-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **279**, 891-894.

AUBIN J.P. [1976]. "Fuzzy Core and Equilibrium in Games Defined in Strategic Form", in *Directions in Large Scale Systems*, Y.C. Ho & S.K. Miller, Plenum Press.

AUBIN J.P. [1979]. *Mathematical Methods in Economics and Game Theory*. Amsterdam, North-Holland.

AUBIN J.P. [1981]. "Locally Lipschitz Cooperative Games", *Journal of Mathematical Economics*, **8**, 241-262.

AUBIN J.P. [1986]. *L'Analyse Non-Linéaire et ses Motivations Economiques*. Masson, Paris.

BONDAVERA O.N. [1963]. "Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games", *Problemy Kiberneteki*, **10**, 119-139.

BORDER K.C. [1982]. "The Core of a Coalitional Production Economy", Social Science Working Paper n°461, California Institute of Technology.

BUTNARIU D. [1979]. "Solution Concepts for *n*-Persons Fuzzy Games" in *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, M.M. Gupta, R.K. Ragade & R.R. Yager Eds, 339-359.

BUTNARIU D. [1980]. "Stability and Shapley Value for *n*-Persons Fuzzy Games", *Fuzzy Sets and Systems*, **7**, 63-72.

BUTNARIU D. [1982]. "Fixed Points for Fuzzy Mappings", *Fuzzy Sets and Systems*, **7**, 191-207.

BUTNARIU D. [1985]. "Non-Atomic Fuzzy Measures and Games",*Fuzzy Sets ans Systems*, **17**, 39-52.

BUTNARIU D. [1986]. "Fuzzy Measurability and Integrability", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **117**, 385-410.

BUTNARIU D. [1987]. "Values and Cores of Fuzzy Games with Infinitely Many Players", *International Journal of Game Theory*, **16**, 43-68.

CHANG C.L. [1968]. "Fuzzy Topological Spaces", *Journal of Mathematical analysis and Applications*, **24**, 182-190.

CORNWALL R.R. [1984]. *Introduction to the Use of General Equilibrium Analysis*. Amsterdam, North-Holland.

HILDENBRAND W. & KIRMAN A. [1976]. *Introduction to Equilibrium Analysis*. Amsterdam, North-Holland.

ICHIISHI T. [1981]. "A Social Coalitional Equilibrium Existence Theorem", *Econometrica*, **49**, 369-377.

ICHIISHI T. [1982]. "Non-Cooperation and Cooperation", in *Games, Economic Dynamics and Time Series Analysis*, M. Deistler, E. Furst & G. Schwodiauer Eds, Vienne, Physica-Verlag.

KAUFMANN A. [1973]-[1980]. *Introduction à la Théorie des Sous-Ensembles Flous*. Tomes I et IV, Masson, Paris.

LIU Y.M. [1977]. "A Note on Compactness in Fuzzy Unit Interval", *Kexue Tongbao*, **25**, 33-35.

LIU Y.M. [1985]. "Some Properties of Fuzzy Convex Sets", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **111**, 119-129.

MOULIN H. , FOGELMAN-SOULIE F. [1979]. *La Convexité dans les Mathématiques de la Décision.* Hermann, Paris.

MUNIER B. [1973]. *Jeux et Marchés.* Presses Universitaires de France, Paris.

PONSARD C. [1980]. "Fuzzy Economic Spaces", First World Regional Science Congress, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, June 15-25.

PREVOT M. [1977]. *Sous-Ensembles Flous: Une Approche Théorique.* Sirey, Collection de l'Institut de Mathématiques Economiques, Paris.

ROSENMULLER J. [1981]. *The Theory of Games and Markets*. North Holland, Amsterdam.

ROSENTHAL R.W. [1971]. "External Economies and Cores", *Journal of Economic Theory*, **3**, 182-188.

SCARF H. [1967]. "The Core of an n-Person Game", *Econometrica*, **35**, 50-69.

SCARF H. [1971]. "On the Existence of a Cooperative Solution for a General Class of n-person games", *Journal of Economic Theory*, **3**, 169-181.

SCARF H. [1973]. *The Computation of Economic Equilibria*. New Haven, Yale University Press.

SCHLEICHER H. [1979]. Ed, *Jeux, Information et Groupes*. Economica, Paris.

SCHOTTER A. & SCHWÖDIAUER G. [1980]. "Economics and the Theory of Games: A Survey", *Journal of Economic Literature*, **18**, 479-527.

SHAPLEY L.S. [1973]. "On Balanced Games without Side Payments", in *Mathematical Programming*, T.C. Hu & S.M. Robinson Eds, Academic Press, New York, 261-290.

SHAPLEY L.S. & SHUBIK M. [1969]. "On Market Games", *Journal of Economic Theory*, **1**, 9-25

WEBER S. [1979]. "On ε-Cores of Balanced Games", *International Journal of Game Theory*, **8**, 241-250.

WEISS M.D. [1975]. "Fixed Points, Separation and Induced Topologies for Fuzzy Sets", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **50**, 142-150.

WOODERS M.H. [1983]. "The Epsilon Core of a Large Replica Game", *Journal of Mathematical Economics*, **11**, 277-300.

WOODERS M.H. & ZAME W.R. [1984]. "Approximate Cores of Larges Games", *Econometrica*, **52**, 1327-1350.