IME

INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

LATEC C.N.R.S. URA 342

DOCUMENT de TRAVAIL

UNIVERSITE DE BOURGOGNE
FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION
4, boulevard Gabriel - 21000 DIJON - Tél. 80 39 54 30 - Fax 80 39 56 48

ISSN : 0292-2002

9205

DES CAPACITES DE CHOIX AUX PROBABILITES DE CHOIX :

UN THEOREME DE CONVERSION

Antoine BILLOT*

Novembre 1992

* *Professeur à l' Université de Bourgogne*

Laboratoire d'Analyse et de Techniques Economiques
Institut de Mathématiques Economiques

DES CAPACITES DE CHOIX AUX PROBABILITES DE CHOIX : UN THEOREME DE CONVERSION *

Antoine BILLOT, IME et Université de Bourgogne

INTRODUCTION

Une partie importante de la théorie des choix discrets concerne les développements du modèle de Luce [1959]. Cette place privilégiée provient sans nul doute de l'extrême élégance de l'Axiome du Choix qui permet d'une part, d'introduire une sorte de *rationalité imparfaite* du comportement en autorisant la construction de probabilités de choix et d'autre part, de décrire un processus de choix qui semble raisonnablement réaliste : en effet, il est suggéré que l'agent faisant face à un ensemble fini d'actions, choisit dans un premier temps un sous-ensemble, puis finalement, à l'intérieur de ce sous-ensemble, une action. Il existe de nombreuses versions de ce modèle (Yellot [1977], Strauss [1980], voir aussi de Palma & Thisse [1989] et McFadden [1980]) mais c'est seulement dans Billot & Thisse [1990] qu'il a été généralisé au cas des probabilités non-additives que l'on appelle aussi *capacités* de Choquet [1953]. Ces dernières ont été préalablement introduites en économie par Gilboa [1987] et Schmeidler [1989]. Les résultats principaux de Billot & Thisse [1990] permettent de mettre en évidence la relation qui existe entre la fonction d'utilité d'un agent et la mesure d'incertitude associée (sans que l'on préjuge de son interprétation) qui satisfait l'Axiome du Choix - ce dernier étant généralisé aux capacités, ce pourquoi l'on parlera de l'AGC, l'Axiome Généralisé du Choix -. On montre ainsi qu'un individu ayant une fonction d'utilité quelconque mais incompatible avec des anticipations probabilistes de choix, peut néanmoins être décrit par une version généralisée du modèle de Luce. La mesure d'incertitude qui apparaît alors - pour ne plus être nécessairement une probabilité - permet toutefois de conserver la procédure de choix décrite ci-dessus ainsi qu'une rationalité plus faible dont on peut dire qu'elle est imparfaite en ce qu'elle n'amène pas l'agent à choisir une action avec certitude mais à décrire sa capacité à choisir n'importe laquelle des actions.

Ce texte est la version provisoire d'un papier à paraître à la RAIRO. Je remercie tout particulièrement Alain Chateauneuf (Paris 1) et Jean-Yves Jaffray (Paris 5) pour les très nombreuses améliorations et suggestions de démonstrations et d'interprétations qu'ils m'ont proposées ainsi que Bernard Walliser (CERAS & ENPC) pour ses commentaires. Je reste, bien sûr, seul responsable des erreurs qui subsisteraient mais je partage avec Jacques-François Thisse (CORE & Paris 1) l'idée centrale qui fonde cette recherche.

En outre, lorsque cette mesure d'incertitude correspond à une capacité particulière appelée *possibilité*, le modèle généralisé propose une solution (dite externe) au paradoxe classique des bus bleu et rouge remarqué par Debreu [1960]. Ce paradoxe - qui est présenté à la section 4 - sert, en quelque sorte, de test final à toutes les variantes du modèle initial, et ici aussi, c'est lui qui finalement autorise un certain nombre de conclusions relatives à la démarche que nous avons adoptée.

La généralisation du théorème de Luce que nous avons effectué dans Billot & Thisse [1990] implique par ailleurs, une modification de son interprétation. Dans le modèle initial, les probabilités de choix que l'on engendrait à partir de l'Axiome du Choix pouvait s'interpréter comme la mesure objective (fréquentiste) de la répartition des choix. Ainsi, il était possible d'associer à toute fonction d'utilité (*à la Luce*) une distribution de probabilités objectives correspondant au comportement observé de l'agent. En revanche, il n'est pas possible d'observer une capacité en ce qu'elle ne correspond jamais à une distribution fréquentielle. C'est la raison pour laquelle, nous proposions d'interpréter la distribution de capacités engendrée par l'AGC comme une mesure des anticipations de choix que l'on pouvait déduire de la fonction d'utilité de l'agent. L'AGC ne décrit donc que des anticipations de choix qui ne permettent pas directement d'induire des fréquences de choix observés - ces dernières ne pouvant être que des probabilités.

Fort de cette interprétation en deux étapes (anticipations, réalisations) nous proposons une méthode permettant de déduire les fréquences objectives de choix des anticipations de choix. En d'autres termes, nous autorisons les agents à former des anticipations non-probabilistes mais nous essayons de déduire de ces anticipations leur comportement effectif sous la forme de probabilités objectives.

Cette démarche n'est pas sans rappeler celle de Wakker [1990]. Dans ce papier, Wakker démontre l'équivalence entre un modèle d'utilité anticipée à la Quiggin [1982] et Yaari [1987] et un modèle d'utilité espérée avec capacité de Choquet à la Schmeidler-Gilboa, sous la contrainte de dominance stochastique du premier ordre. Ce résultat de Wakker suggère ainsi que toute démarche fonctionnant à partir de capacités peut éventuellement s'exprimer au moyen d'une *distorsion* fonctionnelle de probabilités. Ici, nous allons chercher à montrer - c'est l'énoncé symétrique - que toute mesure de croyance, non-additive, monotone d'ordre infini (ce que l'on note aussi ∞-monotone) et respectant l'AGC peut être *convertie* en une distribution de probabilités.

Afin d'arriver à cette conversion d'une distribution de capacités non-additives et ∞-monotones issue de l'AGC en une distribution de probabilités de choix, nous utilisons certains des résultats les plus classiques de Dempster [1967] et Shafer [1976] ainsi que leurs extensions par Chateauneuf & Jaffray [1989]. Ces résultats concernent essentiellement les inverses de Möbius des fonctions de croyance à la Shafer. Ce dernier s'était concentré, dans ses travaux, sur les fonctions qui sont ∞-monotones. En ce qui concerne les capacités qui sont définies par l'AGC, on ne leur impose, dans Billot & Thisse [1990], cette propriété de monotonie qu'à l'ordre un ! Même si certains auteurs (voir Shapley [1971] et Bixby & al [1985]) ont montré que beaucoup de propriétés valides pour les capacités ∞-monotones restent valables à un ordre inférieur, il faut attendre le papier de Chateauneuf & Jaffray [1989] pour avoir des résultats spécifiques aux capacités monotones d'ordre fini. Ces résultats nous permettent ici de proposer une interprétation du concept d'*utilité basique* ainsi qu'un lemme de conversion restreinte à une famille particulière de fonctions d'utilité monotones d'ordre quelconque. Le théorème de conversion, quant à lui, n'est valable que pour les fonctions d'utilité ∞-monotones.

Notre approche est organisée de façon à permettre l'émergence du théorème de conversion. Les sections sont donc constituées en étapes. Dans la première section, nous présentons les inverses de Möbius d'une fonction d'utilité et d'une capacité quelconques. Dans la deuxième section, nous donnons deux nouvelles formulations du théorème généralisé exprimées au moyen des inverses de Möbius des capacités et de la fonction d'utilité. Dans la troisième section, nous démontrons le théorème de conversion. Dans la dernière section, nous donnons quelques résultats complémentaires et *nous proposons un exemple qui permet de retrouver, grâce à notre méthode de conversion, le résultat intuitif qui est à l'origine du paradoxe de Luce.*

SECTION PREMIERE : LE CADRE GENERAL

L'outil principal que nous allons utiliser ici est ce que l'on appelle l'*inverse de Möbius* d'une fonction réelle. Nous en présentons d'abord l'expression neutre, puis nous particularisons et proposons des interprétations de l'inverse de Möbius d'une fonction d'utilité et d'une capacité de Choquet.

I.1. Inverse de Möbius

Si l'on envisage un ensemble fini quelconque A, son ensemble des parties 2^A, et une fonction quelconque $f(.)$ de 2^A vers R, il existe une fonction $m(.)$ de 2^A vers R, telle que $\forall S \in 2^A$:

$$m(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{\#(S-T)} f(T). \tag{1}$$

"$\#(S-T)$" désigne le cardinal de l'ensemble $(S-T)$.

D'après Shafer [1976], (voir aussi Chateauneuf & Jaffray [1989]), (1) est équivalent à :

$$f(S) = \sum_{T \subset S} m(T). \tag{2}$$

(Voir la démonstration en Annexe 1.)

On appelle $m(.)$, l'*inverse de Möbius* de la fonction $f(.)$.

I.2. Utilité basique

Considérons maintenant que A est un ensemble fini d'actions, et $f(.)$, une fonction d'utilité $u(.)$ définie de 2^A vers R^+, avec $u(\varnothing) = 0$ et $u(.)$ 1-monotone : $u(S) \leq u(T)$ pour tout $S, T \in 2^A$ tels que $S \subset T$.

Nous appelons *utilité basique associée*, notée $u_b(.)$, l'inverse de Möbius de $u(.)$.

$$\text{(1) devient : } \forall S \in 2^A : u_b(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{\#(S-T)} u(T) \tag{3}$$

et

$$\text{(2) : } u(S) = \sum_{T \subset S} u_b(T). \tag{4}$$

I.3. Propriétés de l'utilité basique

Les propriétés principales de la fonction d'utilité basique sont[1] :

$$P1 : \forall a \in A, u_b(a) = u(a).$$
$$P2 : u_b(\varnothing) = 0.$$
$$P3 : \forall a, b \in A, u_b(a \cup b) = u(a \cup b) - [u(a) + u(b)].$$
$$P4 : \sum_{\{a\} \subset T \subset S} u_b(T) \geq 0 ; \forall S \in 2^A, \forall a \in S.$$

I.4. Interprétation de la fonction d'utilité basique

La fonction d'utilité basique peut être interprétée à partir de ses propriétés. On constate d'abord que l'utilité basique d'une action singletonne est égale à son utilité *normale*. D'autre part, on sait que l'utilité basique de l'ensemble vide est - elle-aussi - égale à son utilité normale, c'est à dire zéro. Mais ce qui est particulièrement intéressant concerne la troisième propriété.

En effet, la propriété *P3* signifie que les règles de combinaison d'utilités basiques à partir du niveau d'utilité basique d'une combinaison d'éléments (ou de sous-ensembles) ne sont pas identiques à celles qui régissent la fonction d'utilité normale. Plus encore, cette propriété nous apprend que l'utilité basique de l'union de deux actions singletonnes *vient mesurer l'écart entre l'utilité normale quelconque de cette union et l'utilité probabiliste - à la Luce - de cette union.* Ainsi, cette propriété permet de suggérer que l'utilité basique est en première lecture *une mesure de déviance de l'utilité normale à l'utilité probabiliste de Luce* (dans le cas d'une union d'actions singletonnes). En effet, si $u(.)$ est supermodulaire (voir Billot & Thisse [1990], 3.A.a.), alors $u_b(a \cup b) \geq 0$. A l'inverse, si $u(.)$ est submodulaire, alors $u_b(a \cup b) \leq 0$. Le seul cas où $u_b(a \cup b) = 0$ correspond à celui d'une utilité normale modulaire, c'est à dire additive-probabiliste à la Luce.

Cependant, ces remarques ne permettent pas de saisir directement ce que mesure l'utilité basique de n'importe quel sous-ensemble de A. Laissons-nous influencer par les travaux de Koopmans [1964] et Kreps [1979], sur l'influence de la flexibilité des choix sur la satisfaction des agents[2]. Kreps [1979] écrit : "*Suppose that the individual prefers a menu containing only steak to one containing only chicken. But he strictly prefers a menu with both steak and chicken to either of the first two, because it gives him greater flexibility*". Ce type de comportement traduit ce que Koopmans appelle une "préférence pour la flexibilité".

Ici, l'équation *P3*, $u(a \cup b) = [u(a) + u(b)] + u_b(a \cup b)$, explique que l'utilité globale induite par l'action $a \cup b$ est formée d'une part des utilités normales associées à chacun des singletons et d'autre part d'une sorte de préférence contingente qui ne s'explique que par l'union elle-même - c'est-à-dire la flexibilité des choix induite par le cardinal des choix (ici, 2) - et que l'on interprête comme la mesure de la préférence pour la flexibilité propre de l'union. L'interprétation que l'on peut proposer alors est la suivante :

1 u(a) signifie en fait u({a}).

2 Cette suggestion est dûe à Alain Chateuneuf et Jean-Yves Jaffray.

- $u(S)$ correspond à l'utilité de choisir un quelconque sous-ensemble de S, sans que l'on ait besoin de savoir lequel : il s'agit donc de l'*utilité de choisir dans S*, (i.e. la satisfaction provenant de ce que le *lieu* du choix est précisément S).

- $u_b(S)$ correspond à la *mesure de la préférence pour la flexibilité propre de l'ensemble S*, (i.e. l'influence de la composition globale de S sur l'utilité de S, à l'exclusion des combinaisons qui y sont incluses de fait)[3].

Si l'on observe le comportement de $u_b(.)$ pour trois, quatre ou n éléments, on s'aperçoit finalement qu'il n'est pas possible de déduire a priori la réaction de l'individu en termes de préférence pour la flexibilité, face à des sous-ensembles qui évoluent. Reprenons l'exemple célèbre du paradoxe de l'âne de Buridan : l'âne aime le son autant que l'avoine, les utilités normales associées à chacun des deux picotins sont donc clairement positives. En revanche, si on lui donne le choix entre le son et l'avoine, il n'arrive pas à trancher et l'histoire conclut qu'il décède de faim faute d'avoir su choisir. Ainsi, je peux savoir que l'âne de Buridan ne valorise pas la flexibilité propre du couple {son, avoine}. Mais qu'advient-il si l'on ajoute une troisième alternative : l'orge ? Il n'est pas ici possible de déduire *fonctionnellement* sa préférence (son aversion ou son indifférence) pour la flexibilité propre du triplet {son, avoine, orge}. La seule chose que l'on l'on sache, c'est que l'utilité de choisir dans l'ensemble {son, avoine, orge} est formée de deux sortes différentes de satisfaction :

$$u(son, avoine, orge) = u(son) + u(avoine) + u(orge) + f(son, avoine, orge),$$

où la fonction $f(.)$ d'utilité pour la flexibilité totale s'exprime comme suit :

$$f(son, avoine, orge) = u_b(son \cup avoine) + u_b(avoine \cup orge) + u_b(son \cup orge) + u_b(son \cup avoine \cup orge).$$

On peut alors remarquer que $f(.)$ est bien la fonction d'utilité pour la flexibilité, celle-ci étant composée des niveaux de préférence pour la flexibilité propre des différents sous-ensembles.

Par ailleurs, on voit aussi que *P1* et *P2* se comprennent immédiatement puisque la seule flexibilité induite par le fait de choisir dans $\{a\}$ se résume naturellement par le fait de choisir a ; à l'identique, la flexibilité induite par le choix est nulle si l'ensemble proposé est vide.

La propriété *P3* permet aussi d'envisager des utilités basiques ***négatives*** lorsque $u(.)$ est submodulaire. On définit alors des ***désutilités*** basiques à partir d'utilités normales toujours positives. On sait que la valeur des utilités singletonnes est toujours positive d'après *P1*, ce qui est cohérent avec le fait que la désutilité basique ne peut provenir que d'une combinaison d'actions puisqu'elle exprime une préférence ou une aversion pour la flexibilité, ce dernier concept n'ayant de sens "pratique" qu'en présence d'un couple d'actions au moins. La possibilité d'une mesure négative de la préférence pour la flexibilité introduit la possibilité d'un comportement d'aversion pour la flexibilité.

---

3 On ne peut mathématiquement pas écrire : $u_b(a \cup b \cup c) = u(a \cup b \cup c) - [u(a) + u(b) + u(c)]$, forme qui seule permettrait d'interpréter $u_b(.)$ en tant que *fonction* d'utilité *traduisant une préférence pour la flexibilité*. En revanche, il est possible d'écrire $u(a \cup b \cup c) = [u(a) + u(b) + u(c)] + \{[u_b(a \cup b) + u_b(b \cup c) + u(a \cup c)] + u_b(a \cup b \cup c)\}$, ce qui nous permet d'identifier la contribution de la flexibilité des choix à l'utilité globale du triplet $\{a, b, c\}$ comme la somme des utilités pour la flexibilité propre du triplet et de ses sous-ensembles non-singletons. En d'autres termes, si l'on note $f(.)$ la fonction d'utilité pour la flexibilité, on a : $f(a \cup b \cup c) = \sum_{\substack{S \subseteq \{a \cup b \cup c\} \\ \#S > 1}} u_b(T)$. L'utilité basique ne correspond donc pas à la fonction d'utilité pour la flexibilité, mais elle permet de définir une mesure de préférence pour la flexibilité *propre* d'un sous-ensemble donné.

Il est facile de comprendre pourquoi l'utilité positive directe d'une combinaison d'actions peut parfois correspondre à une mesure négative (ou nulle) de la préférence pour la flexibilité issue de la même combinaison. Ainsi, l'âne de Buridan ne valorise pas du tout la flexibilité propre du couple {avoine, son} et même, il a une aversion pour elle dès lors qu'au sein du paradoxe, elle l'empêche de décentraliser sa décision en action. On pourrait en conclure que la fonction d'utilité normale de l'âne de Buridan est submodulaire.

Il semblerait possible alors de proposer une interprétation en termes d'aversion, de préférence ou d'indifférence pour la flexibilité à partir des propriétés de n'importe quelle fonction d'utilité définie sur 2^A.

- Si $u(.)$ est submodulaire, alors *l'agent éprouve de l'aversion pour la flexibilité.*
- Si $u(.)$ est modulaire, alors *l'agent est indifférent à la flexibilité.*
- Si $u(.)$ est supermodulaire, alors *l'agent manifeste une préférence pour la flexibilité*[4].

Nous pouvons remarquer finalement que la fonction d'utilité proposée par Luce, qui est additive et probabiliste, traduit une indifférence pour la flexibilité qui correspond alors à des niveaux nuls d'utilité pour la flexibilité propre de n'importe quelle union d'actions. L'absence de préférence pour la flexibilité sera à l'origine du paradoxe remarqué par Debreu [1960].

I.5. Capacité de Choquet

On appelle *capacité* (normalisée) *de Choquet*, une application de 2^A vers $[0,1]$, notée $c(.)$ telle que :

$C1$: $c(\emptyset)=0$

$C2$: $c(A)=1$

$C3$: $\forall S,T \in 2^A , S \subset T \Rightarrow c(S) \leq c(T).$

On peut remarquer que seule la condition $C2$ est absente de la définition de notre fonction d'utilité.

Une probabilité est un cas particulier de capacité pour laquelle :

$$\forall S,T \in 2^A ; S \cap T = \emptyset \Rightarrow c(S \cup T) = c(S) + c(T). \qquad (5)$$

Une capacité de choix est donc une mesure de croyance plus faible qu'une probabilité puisqu'elle ne nécessite que la 1-monotonie ($C3$) et des contraintes de normalisation ($C2$ et $C1$). Elle permet également de décrire des individus qui - modélisant leurs anticipations de façon non-probabiliste - cherchent toutefois à exprimer la plausibilité du choix a priori d'une action quelconque. Elle sert donc à décrire une rationalité cognitive plus faible que celle, usuelle, qui correspond à la modélisation des croyances au moyen des probabilités (voir Billot [1991]).

4 Il peut être intéressant ici de mettre en parallèle cette interprétation et celle que nous suggérions dans Billot & Thisse [1990] en termes d'utilité marginale discrète. En effet, il semblerait que l'aversion pour la flexibilité (resp. la préférence) corresponde à une utilité marginale discrète décroissante (resp. croissante), c'est-à-dire une fonction d'utilité discrètement concave (resp. convexe). On peut alors suggérer que lorsqu'une fonction d'utilité est définie sur l'ensemble des parties d'un ensemble initial fini de choix, il y aurait une sorte de transposition (discrète) du concept de risque vers celui de flexibilité.

I.6. Inverse de Möbius d'une capacité

L'inverse de Möbius d'une capacité $c(.)$ est appelée "*probabilité basique*", notée $P^b(.)$ (Shafer [1976]).

***Proposition 1** : (Chateauneuf et Jaffray [1989]). $c(.)$ est une capacité si et seulement si son inverse de Möbius $P^b(.)$ satisfait :*

- $P^b(\varnothing) = 0$
- $\sum_{S \in 2^A} P^b(S) = 1$
- $\sum_{\{a\} \subset S \subset T} P^b(S) \geq 0, \forall T \in 2^A, \forall a \in T.$ (6)

Démonstration : Avec (3) et (4), les deux égalités s'obtiennent pour $c(\varnothing) = 0$ et $c(A) = 1$. Pour la dernière égalité, il est facile de remarquer que *C3* l'implique aussitôt pour les paires $A_1 = A - \{a\}$ et $A_2 = A$.

Q.E.D.

Cette distribution de probabilités basiques peut être interprétée de façon symétrique au concept d'utilité basique, En effet, deux des trois composantes de l'équation (6) sont identiques aux propriétés *P2* et *P4* de l'utilité basique. Il s'agit, en fait, d'une identité induite par la démarche rigoureusement parallèle que nous avons menée d'abord sur la fonction d'utilité et ensuite sur le capacité de choix. Il est à signaler que la propriété *P4* est à l'origine du théorème de conversion lorsqu'elle est restreinte aux capacités ∞-monotones afin que ses composantes, $P^b(S)$, soient positives, une à une.

SECTION DEUXIEME : LE MODELE GENERALISE DE LUCE

II.1. Axiome Généralisé du Choix

Dans Billot & Thisse [1990], nous généralisions le résultat principal aux capacités de choix. Le comportement de choix est décrit comme suit : tout individu confronté à un sous-ensemble d'actions S quelconque inclus dans A, choisit d'abord un sous-ensemble W puis, à l'intérieur de W un sous-ensemble T. Cette procédure de choix est traduite par l'Axiome Généralisé du Choix :

$$\forall T \subseteq W \subseteq S \subseteq A,\ c_S(T) = c_S(W) \times c_W(T), \tag{7}$$

où $c_S(T)$ définit la capacité de choisir T dans S.

Pour tout $c_A(S) > 0$, $\forall S \neq \varnothing$, $S \in 2^A$, le théorème généralisé que l'on obtient est le suivant[5] :

5 Cette restriction aux seules capacités positives est valable pour tous les résultats présentés dans cet article.

Théorème Généralisé de Luce : *(Billot & Thisse [1990]).*
L'Axiome Généralisé du Choix est satisfait si et seulement si il existe une capacité positive $u(.)$ *définie sur* 2^A *telle que :*

$$c_S(T) = \frac{u(T)}{u(S)} \text{ pour tout } T \subseteq S \subseteq A. \tag{8}$$

De plus, cette capacité $u(.)$ *est unique si normalisée.*

(Voir la démonstration en Annexe 2.)

Ce théorème est très important en ceci qu'il autorise plusieurs commentaires de nature différente. D'une part, il généralise doublement le théorème initial de Luce, en l'étendant des singletons vers les sous-ensembles puis des probabilités vers les capacités. D'autre part, il introduit une liberté nouvelle en permettant - par équivalence - à n'importe quel type de fonction d'utilité de définir une mesure de croyance (i.e. une anticipation) sous la forme minimale d'une capacité, et enfin, il permet de résoudre le paradoxe signalé par Debreu - et traité en section 4 - tout en conservant l'indépendance par rapport aux choix extérieurs. Par ailleurs, les définitions sur la fonction d'utilité que nous donnions au paragraphe I.4., nous permettent d'interpréter (8) comme suit[6] : *la capacité de choisir dans le sous-ensemble T sachant que l'on est dans* $S \supseteq T$ *est égale au rapport entre l'utilité de choisir dans T et l'utilité de choisir dans S.*

II.2. Première proposition

La proposition de Shafer établissant l'équivalence entre (1) et (2) permet alors de déduire la proposition associée suivante :

Proposition A :
L'Axiome Généralisé du Choix est satisfait si et seulement si il existe une fonction d'utilité basique $u_b(.)$, *qui est l'inverse de Möbius d'une capacité positive* $u(.)$ *définie sur* 2^A *telle que :*

$$c_S(T) = \frac{\sum_{W \subset T} u_b(W)}{\sum_{X \subset S} u_b(X)} \text{ pour tout } T \subseteq S \subseteq A. \tag{9}$$

La démonstration est évidente à partir du théorème 1 et de l'équation (4).

Corollaire : La proposition A peut s'écrire pour $\#(T) = 1$:

$$c_S(a) = \frac{u_b(a)}{\sum_{T \subset S} u_b(T)} = \frac{u(a)}{\sum_{T \subset S} u_b(T)}. \tag{10}$$

6 Ceci représente une certaine modification de l'interprétation que nous proposions dans Billot & Thisse [1990].

II.3. Deuxième proposition

L'équation (10) n'est pas sans rappeler la forme préliminaire suggérée par Luce [1959]. Aussi peut-on maintenant écrire une deuxième proposition liée à l'existence d'une distribution de probabilités basiques.

Proposition B :

L'Axiome Généralisé du Choix est satisfait si et seulement si il existe une distribution de probabilités basiques $P^b(.)$ qui est l'inverse de Möbius d'une capacité positive $c(.)$, telle que :

$$P_S^b(T) = \frac{u_b(T)}{u(S)}, \forall T \subseteq S \subseteq A. \tag{11}$$

Démonstration : $c_S(.)$, d'après la proposition 1, peut être associée à une probabilité basique $P_S^b(.)$ telle que :

$$c_S(T) = \sum_{W \subset T} P_S^b(W).$$

Cette mesure $P_S^b(.)$ peut aussi, d'après Shafer, s'exprimer comme suit :

$$P_S^b(T) = \sum_{W \subset T} (-1)^{\#(T-W)} c_S(W)$$

Si $c_S(.)$ satisfait l'AGC :

$$c_S(W) = \frac{u(W)}{u(S)}, \forall W \subseteq S.$$

Aussi :

$$P_S^b(T) = \sum_{W \subset T} (-1)^{\#(T-W)} . \frac{u(W)}{u(S)} = \frac{1}{u(S)} \cdot \sum_{W \subset T} (-1)^{\#(T-W)} . u(W) = \frac{u_b(T)}{u(S)}.$$

Q.E.D.

On peut donc montrer que l'inverse de Möbius de la capacité de choix se définit à partir de l'inverse de Möbius de la fonction d'utilité qui sert à la définir.

Il convient de définir la probabilité basique, en ayant à l'esprit la définition de la capacité que nous donnions au paragraphe II.1., à la suite du théorème généralisé : *la probabilité basique de choisir T sachant que l'on est dans S ⊇ T est égale au rapport entre la mesure de la préférence pour la flexibilité propre de T et l'utilité de choisir dans S*. Sachant que certaines utilités basiques peuvent être négatives, il s'en suit que certaines probabilités basiques peuvent être négatives.

SECTION TROISIEME : LE THEOREME DE CONVERSION ET SON INTERPRETATION

III.1. Théorème de Conversion

Le résultat que nous allons donner ne concerne que les capacités ∞-monotones. Pour être tout à fait précis, la condition de monotonie à l'ordre infini est une *condition suffisante*. Il semble que la *condition nécessaire* soit extrêmement difficile à mettre en évidence. Cette restriction peut sembler très contraignante mais *pratiquement*, elle l'est beaucoup moins : à chaque capacité $c_S(.)$, il est possible d'associer une capacité duale $c_S^d(.)$ à partir de la relation selon laquelle : $\forall T \subseteq S$, $c_S(T) + c_S^d(S - T) = 1$. Cette relation de dualité - dont la masse-unité probabiliste est un cas particulier (voir Billot [1991]) - permet ainsi d'étendre les résultats concernant certaines capacités à leurs capacités duales. Par exemple, à chaque mesure de nécessité (capacité ∞-monotone), on peut faire correspondre une possibilité (capacité monotone d'ordre 1). Il est alors *équivalent* de réfléchir sur la nécessité d'une action ou sur la possibilité des actions complémentaires.

Notre objectif est de déduire une distribution de probabilités, que l'on peut alors interprêter comme une distribution de fréquences du choix, des anticipations exprimées sous la forme de capacités . L'agent que l'on envisage, émet des anticipations de choix non-probabilistes qu'il va pondérer au moyen des masses de Möbius qui affectent les sous-ensembles T de $S \subseteq A$ qui contiennent a. On peut aisément comprendre qu'il soit nécessaire de pondérer les anticipations de choix pour que celles-ci conduisent à des fréquences observées, dès lors que les capacités sont non-additives. Si l'on observe le système de pondération proposé, on s'aperçoit qu'il met en rapport la mesure de la préférence pour la flexibilité et la *contribution pure* des actions à l'utilité globale. Prenons un exemple avec deux éléments $\{a,b\}$. Le poids qui affecte $c_{(a\cup b)}(a)$, afin que l'on puisse déduire la probabilité du choix de a, est égal à $\{\frac{u_b(a\cup b)}{u(a)+u(b)}+\frac{u_b(a)}{u(a)}\}$. Ce qui apparaît au numérateur ($u_b(a\cup b)$, $u_b(a)$) concerne systématiquement la préférence pour la flexibilité propre du sous-ensemble dans lequel on se place ; ce qui apparaît au dénominateur concerne la *contribution pure* des actions formant le sous-ensemble dans lequel on se place ($u(a)+u(b)$, $u(a)$), c'est-à-dire l'utilité globale du sous-ensemble diminuée de la mesure de la préférence pour la flexibilité (dont on a dit qu'elle était finalement contingente).

L'une des interprétations possibles de ce système de pondération consiste à analyser l'allocation des différentes masses de Möbius en tant que *correction* du comportement par rapport à l'influence que la flexibilité des choix exerce sur l'utilité normale des combinaisons d'actions. Seuls les agents neutres vis à vis de cette flexibilité (i.e. dont la fonction d'utilité est modulaire) peuvent directement déduire la distribution de probabilités associées à l'Axiome du Choix en identifiant les réalisations aux anticipations (voir remarque 3). Les autres agents, quant à eux, doivent "corriger" leurs anticipations pour obtenir une distribution réaliste de probabilités de choix.

Théorème de conversion :

La mesure $P_S^{AGC}(.)$ définie par : $\forall a \in S, \forall S \subseteq A, S \neq \emptyset$,

$$P_S^{AGC}(a) = c_S(a) \times \sum_{T\subseteq S;\, a\in T} \frac{u_b(T)}{\sum_{x\in T} u_b(x)} \quad avec \quad P_S^{AGC}(S) = \sum_{x\in S} P_S^{AGC}(x), \tag{12}$$

est une mesure de probabilité si $c_S(.)$ est une capacité positive satisfaisant l'AGC et $c_A(.)$ monotone d'ordre infini.

Démonstration : en premier lieu, il est clair que l'expression (12) est partout définie puisque pour tout $S \neq \varnothing$, $c_A(S) > 0$ et donc $\forall x, u_b(x) = u(x) > 0$. En second lieu, la démonstration elle-même comporte trois étapes :

1• $\forall a \in S, P_S^{AGC}(a) \geq 0$.

En effet, $c_S(a) \geq 0$ et $c_A(.)$ est supposée monotone d'ordre infini. Aussi, $\forall T \neq \varnothing$, $u_b(T) \geq 0$. Comme l'on sait d'autre part que $\forall x$, $u_b(x) > 0$, on a $P_S^{AGC}(a) \geq 0$.

2• $P_S^{AGC}(\varnothing) = 0$.

En effet, $c_S(\varnothing) = 0$.

3• $P_S^{AGC}(S) = 1$.

$$P_S^{AGC}(S) = \sum_{a \in S} c_S(a) \cdot \sum_{\{a\} \subseteq T \subseteq S} \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u_b(x)}$$

$$= \frac{1}{u(S)} \cdot \sum_{a \in S} u(a) \cdot \sum_{\{a\} \subseteq T \subseteq S} \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u_b(x)}$$

$$= \frac{1}{u(S)} \cdot \sum_{T \subseteq S} \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u_b(x)} \cdot \sum_{a \in T} u(a)$$

$$= \frac{1}{u(S)} \cdot \sum_{T \subseteq S} u_b(T) = \frac{u(S)}{u(S)} = 1.$$

Q.E.D.

III.2. Remarques

- 1. Il n'est fait appel formellement qu'à la seule utilité basique des actions. On remarquera toutefois que puisque $\forall a \in A$, $u_b(a) = u(a)$, implicitement, on se réfère à l'utilité normale des actions singletonnes.

- 2. Un tel résultat - l'équivalence - pouvait être *aisément obtenu en prenant pour formule :* $P_S^{AGC}(a) = c_S(a).\, H$ où $H = u(S)/ \sum_{x \in S} u(x)$. La déformation eût alors été purement linéaire et *n'aurait pas nécessité l'introduction des inverses de Möbius.* Il est facile, pourtant, de voir que dans le cas de cette déformation simple, l'individu est amené à envisager que [$u(a) + u(b) = u(a \cup b)$] et ceci en définissant $P_S^{AGC}(a \cup b)$ pour calculer $P_S^{AGC}(S)$. Or, par définition, les anticipations des individus envisagés ne sont pas - en toute généralité - des probabilités (voir remarque 3 ci-dessous), ce qui signifie donc que [$u(a \cup b) \neq u(a) + u(b)$]. Il y a donc une contradiction théorique qui ruine la pertinence de cette déformation simple.

Le problème se résume donc à la définition d'une mesure de $P_S^{AGC}(a \cup b)$ sous la contrainte que [$u(a \cup b) \neq u(a) + u(b)$]. D'après (12):

$$P_S^{AGC}(a \cup b) = c_S(a). \sum_{T \subseteq S;\, a \in T} \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u(x)} + c_S(b). \sum_{T \subseteq S;\, b \in T} \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u(x)}.$$

Il est aisé de voir qu'aucune factorisation ne peut intervenir - outre en $1/u(S)$ - puisqu'il est évident que l'ensemble des sous-ensembles de S *comprenant a* n'est pas le même que l'ensemble des sous-ensembles de S *comprenant b*, ne serait-ce que parce que $\{a\}$ est différent de $\{b\}$. L'absence de factorisation induit l'absence de nécessité de [$u(a) + u(b) = u(a \cup b)$]. Il y a ainsi cohérence théorique entre (12) et le postulat "$c_S(.)$ non-probabiliste".

- 3. On peut remarquer aussi que dans le cas particulier où $c_S(.)$ est une *probabilité*, alors le théorème de conversion signifie que $P_S^{AGC}(.)$ est rigoureusement identique à $c_S(.)$. En effet, si $c_S(.) = P_S(.)$, alors, la propriété *P1* puis le théorème généralisé de Luce 1 (voir Annexe 2) nous permettent d'écrire : $\sum_{x \in T} u_b(x) = \sum_{x \in T} u(x) = u(T)$. L'équation (12) devient alors :

$$\forall a \in S, \forall S \subseteq A,\ \ P_S^{AGC}(a) = P_S(a). \sum_{T \subseteq S;\, a \in T} \frac{u_b(T)}{u(T)}.$$

D'après la proposition B - équation (11) -, $u_b(T)/u(T) = P_T^b(T)$.

Donc : $P_S^{AGC}(a) = P_S(a) \times \sum_{T \subseteq S;\, a \in T} P_T^b(T)$.

Or, si $P_S(.)$ est une probabilité, $P_T(.)$, $\forall T \subseteq A$, l'est aussi d'après le théorème 1, ce qui signifie :

$P_{\{a\}}^b(\{a\}) = 1$ et

$P_W^b(W) = 0, \forall W \subseteq S, a \in W$, tel que $W \neq \{a\}$.

Aussi, pouvons-nous conclure : $P_S^{AGC}(.) = P_S(.)$.

SECTION QUATRIEME : QUELQUES RESULTATS COMPLEMENTAIRES

IV.1. Les distributions déduites de probabilités

Les résultats que nous allons développer prennent appui sur une proposition classique de Dempster [1976], généralisée par Chateauneuf & Jaffray [1989]. Cet énoncé permet de *rapprocher* n'importe quelle capacité ∞-monotone d'une probabilité au moyen d'une fonction intermédiaire de poids[7].

Proposition 2 : *Les fonctions $P_\lambda(.)$ telles qu'il existe une fonction de poids λ définies par λ :*

$\bigcup_{T \in 2^S - \varnothing} \{(T, a) : a \in T\} \to R$, *satisfaisant* $\lambda \geq 0$,

$$\sum_{a \in T} \lambda(T, a) = 1, \forall T \in 2^S - \varnothing \tag{13a}$$

avec :

7 C'est, du reste, cet énoncé qui nous a largement inspiré l'expression (12).

$$P_\lambda(\{a\}) = \sum_{a \in T} \lambda(T,a) \cdot P_S^b(T),\ \forall a \in S,\ \forall S \subseteq A \tag{13b}$$

$$P_\lambda(S) = \sum_{a \in S} P_\lambda(\{a\}) \tag{13c}$$

où $P_S^b(.)$ est l'inverse de Möbius d'une capacité $c_S(.)$ quelconque, sont des mesures de probabilités si et seulement si :

$$P_S^b(\{a\}) + \sum_{\substack{\{a\} \subset T \\ \{a\} \neq T}} \mathrm{Min}\{P_S^b(\{T\}), 0\} \geq 0,\ \forall a \in S,\ \forall S \subseteq A. \tag{13d}$$

(Voir la démonstration en Annexe 3.)

On remarque aisément que les équations ($13a$), ($13b$) et ($13c$) définissent une fonction *très proche* d'une probabilité. Inspirons-nous de cette intuition pour faire apparaître la *probabilité de choix à la Luce* au sein de l'équation de définition de $P_S^{AGC}(.)$.

IV.2. Où l'on retrouve les probabilités de Luce

Supposons que ($13d$) soit satisfaite ; alors il existe des fonctions de probabilités $P_\lambda(.)$ telles ($13a$), ($13b$) et ($13c$) sont vraies. Envisageons que l'une d'entre elles soit $P_S^{AGC}(.)$ et identifions alors la fonction $\lambda(.)$ qui lui correspond : $\forall a \in S,\ \forall S \subseteq A$,

$$P_S^{AGC}(a) = c_S(a) \cdot \sum_{T \subseteq S;\, a \in T} \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u(x)}.$$

D'après ($13b$) : $P_S^{AGC}(a) = \sum_{a \in T} \lambda(T,a) \cdot P_S^b(T)$. Donc :

$$c_S(a) \cdot \sum_{T \subseteq S;\, a \in T} \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u(x)} = \sum_{a \in T} \lambda(T,a) \cdot P_S^b(T)$$

$$\sum_{T \subseteq S;\, a \in T} c_S(a) \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u(x)} = \sum_{T \subseteq S;\, a \in T} \lambda(T,a) \cdot P_S^b(T)$$

$$\sum_{a \in T} c_S(a) \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u(x)} = \sum_{a \in T} \lambda(T,a) \cdot P_S^b(T)$$

D'après l'AGC : $c_S(a) = u(a)/u(S)$ et $P_S^b(T) = u_b(T)/u(S)$

$$\Rightarrow \quad \sum_{a \in T} \frac{u(a)}{u(S)} \cdot \frac{u_b(T)}{\sum_{x \in T} u(x)} = \sum_{a \in T} \lambda(T,a) \cdot \frac{u_b(T)}{u(S)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{a \in T} \frac{u(a)}{\sum_{x \in T} u(x)} \cdot u_b(T) = \sum_{a \in T} \lambda(T,a) \cdot u_b(T)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(T,a) = \frac{u(a)}{\sum_{x \in T} u(x)}$$

On peut en déduire le corollaire suivant :

Corollaire : si l'AGC est satisfait alors :

$$\forall a \in S, \forall S \subseteq A, P_S^{AGC}(a) = \sum_{a \in T} \frac{u(a)}{\sum_{x \in T} u(x)} \cdot P_S^b(T). \tag{14}$$

IV.3. Le lemme de conversion restreinte

Le théorème de conversion est conditionné par le domaine d'application qui est celui des capacités ∞-monotones. Cette monotonie d'ordre infini est une condition suffisante qui n'exclut pas que certaines capacités monotones d'ordre fini (y compris 1-monotones), dans certaines circonstances particulières, puissent être transformées en probabilités par la même fonction que celle correspondant à l'équation (12).

La possibilité qui apparaît dans Billot & Thisse [1990] n'est, par définition, monotone que d'ordre 1. Elle semble donc échapper au théorème de conversion, ce qui exclut a priori que l'on puisse *traiter* le paradoxe en termes de transformation probabiliste de possibilités. Pourtant, il semble que l'iso-utilité sur l'ensemble des choix entraine paradoxalement une extension du théorème de conversion aux capacités monotones quelconques. C'est l'objet du *lemme de conversion restreinte* (au cas de l'iso-utilité) que d'établir ce résultat. Envisageons U, l'ensemble des fonctions d'utilité telles que $\forall (a,b) \in S^2, S \subseteq A$: si $u(a) = u(b) = \overline{u}$, alors, $u(a,b) = u(\{a\} \cup \{b\}) = u(a) = u(b) = \overline{u}$. On notera que $u(.)$ est définie sur 2^A, l'ensemble des parties[8] de A. L'ensemble U décrit certains des cas envisagés dans Billot & Thisse [1990].

$\boxed{\text{Lemme de conversion restreinte}}$:
Si $\forall a \in S, \forall S \subseteq A, S \neq \emptyset, u(a) = \overline{u}$, avec $u(.)$ appartenant à U, la mesure $P_S^{AGC}(.)$ définie par l'équation (12), est une mesure de probabilité uniforme si $c_S(.)$ est une capacité quelconque satisfaisant l'AGC.

Démonstration : les points 2. et 3. de la démonstration du théorème de conversion restent intégralement valides. Il reste donc juste à montrer que chaque probabilité est positive. Exprimons l'ensemble A sous sa forme extensive : $A = \{a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n\}$. La formule calculant la probabilité quelconque $P_S^{AGC}(a_j)$ sachant que nous sommes en situation d'iso-utilité est la suivante :

$$P_S^{AGC}(a_j) = c_S(a_j) \times \{\frac{u_b(a_j)}{u_b(a_j)} + \sum_{k=1;k \neq j}^{n} \frac{u_b(a_j, a_k)}{u_b(a_j) + u_b(a_k)} + \sum_{k,l=1;k,l \neq j}^{n} \frac{u_b(a_j, a_k, a_l)}{u_b(a_j) + u_b(a_k) + u_b(a_l)} + \cdots + \sum_{a_j \in A} \frac{u_b(A)}{u_b(a_j)}\}.$$

Puisque nous sommes en situation d'iso-utilité cela signifie : $\forall a_j \in A, u_b(a_j) = \overline{u}$.

Nous pouvons ainsi écrire, à partir de l'équation précédente :

8 Par convention, $u(a,b,c,..) = u(\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}..)$.

$$P_S^{AGC}(a_j) = c_S(a_j) \times \{1 + \sum_{k=1;k\neq j}^{n} \frac{u_b(a_j,a_k)}{2\overline{u}} + \sum_{k,l=1;k,l\neq j}^{n} \frac{u_b(a_j,a_k,a_l)}{3\overline{u}} + \cdots + \frac{u_b(A)}{n\overline{u}}\}.$$

Nous savons par ailleurs : $\forall (a_k,a_l) \in A^2$, $u_b(a_j,a_k) = u_b(a_j,a_l)$. Ceci est également vrai pour trois, quatre ou n éléments. Nous pouvons donc conclure, dans le cas d'iso-utilité :

$$\sum_{k=1;k\neq j}^{n} \frac{u_b(a_j,a_k)}{2\overline{u}} = \sum_{k=1;k\neq j}^{n} \frac{-2\overline{u} + u(a_j,a_k)}{2\overline{u}} = -\frac{(n-1)\times\overline{u}}{2\overline{u}} = -\frac{(n-1)}{2}.$$

A partir de cette expression, il est facile de généraliser de la façon suivante :

$$P_S^{AGC}(a_j) = c_S(a_j) \times \{\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \times \frac{C_{n-1}^i}{i+1}\} = c_S(a_j) \times \{\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \times \frac{(n-1)!}{(i+1)!(n-1-i)!}\}$$

De cette équation, on peut déduire en changeant la variable i par $k = i + 1$:

$$P_S^{AGC}(a_j) = c_S(a_j) \times \{\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \times C_n^k\}$$

Ceci permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} P_S^{AGC}(a_j) &= c_S(a_j) \times \left(-\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \times C_n^k \\ &= c_S(a_j) \times \left(-\frac{1}{n}\right) \{\{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times C_n^k\} - 1\} \\ &= c_S(a_j) \times \frac{1}{n} \geq 0. \end{aligned}$$

On peut même ajouter : $P_S^{AGC}(a_j) = \frac{1}{n}$ puisque si $u(.) \in U$, alors, en cas d'iso-utilité, $\forall a_j \in A, c_S(a_j) = 1$.

Q.E.D.

Ce résultat étant indépendant du cardinal de l'ensemble des choix, il est alors possible de l'adapter directement au cadre du paradoxe des bus bleu et rouge. Remarquons préalablement que l'ensemble U des fonctions d'utilité telles que l'iso-utilité est conservée au niveau de l'union, est l'ensemble des fonctions d'utilité telles *qu'il existe une aversion stricte pour la flexibilité du choix* (puisque $u(a \cup b) < u(a) + u(b)$). L'une des capacités les plus typiques de U est la possibilité $\pi(.)$ que nous faisions apparaître dans Billot & Thisse [1990].

IV.4. Le paradoxe des bus bleu et rouge : une résolution externe

Envisageons maintenant un individu qui doit se rendre à un endroit donné et qui peut le faire soit en voiture soit en bus. Nous sommes donc en présence d'un ensemble d'actions {bus, voiture} et la préférence de l'agent est la suivante : $u(voiture) = u(bus)$. En appliquant l'Axiome du Choix de Luce - l'AGC restreint à $c(.)$ probabiliste -, nous obtenons d'après le théorème généralisé de Luce : $P(voiture) = P(bus) = 1/2$.

Décomposons maintenant l'action "*choisir le bus*" en "*choisir le bus rouge ou le bus bleu*". L'indifférence de l'individu demeure, c'est à dire que ses préférences sont les suivantes : $u(bus\,rouge) = u(bus\,bleu) = u(voiture)$. Il est clair que l'ensemble de ses choix est modifié et devient : {bus rouge , bus bleu , voiture}. L'intuition nous indique que *la probabilité de choisir la voiture ne devrait pas avoir changé*. En d'autres termes nous devrions avoir :

$$P(voiture) = 1/2 \text{ et } P(bus\,rouge) = P(bus\,bleu) = 1/4.$$

Or l'Axiome du Choix de Luce implique :

$$P(bus\,rouge) = P(bus\,bleu) = P(voiture) = 1/3.$$

Une façon "rapide" de résumer cette analyse consiste à dire que l'Axiome initial du Choix *bloque* la transmission de l'indépendance par rapport aux choix extérieurs (voir Billot & Thisse [1990]).

On peut résoudre ce paradoxe de deux manières : la *résolution externe* consiste à modifier les degrés de croyance initiaux et à montrer qu'il n'y a pas de modification de ces degrés après modification de l'ensemble des choix ; la *résolution interne* consiste à engendrer exactement les mêmes probabilités que celles que l'on appelle "intuitives", c'est-à-dire ({1/2,1/2,} et {1/2,1/4,1/4}).

Ce paradoxe est résolu de manière externe dès lors que la fonction d'utilité de l'individu est, par exemple, de type *possibiliste* :

$$\forall S,T \subseteq A;\, S \cap T = \emptyset,\, u(S \cup T) = \max\{u(S), u(T)\}. \tag{16}$$

D'après le théorème généralisé de Luce 1, le degré de croyance qui est associé à cette fonction d'utilité correspond à une mesure de *possibilité*, c'est à dire une capacité normalisée de Choquet satisfaisant l'axiome supplémentaire suivant :

$$\forall S,T \subseteq A;\, S \cap T = \emptyset,\, c(S \cup T) = \max\{c(S), c(T)\}. \tag{17}$$

Dans le cadre du paradoxe de Luce, les degrés de possibilité sont indépendants des modifications éventuelles de l'ensemble des choix et sont tous identiquement égaux à l'unité (voir Billot & Thisse [1990], 3.B.b.).

Voyons donc maintenant quelle serait la distribution de probabilités que nous obtiendrions en *déformant* sa distribution naturelle de possibilités conformément au théorème de conversion. Nous savons que $\pi(bus\,bleu) = \pi(bus\,rouge) = \pi(voiture) = 1$ où $\pi(.)$ désigne la distribution de possibilités. La probabilité (*i.e. la possibilité déformée*) de choisir l'un des trois éléments - la voiture, par exemple - s'écrit alors :

$$P(v) = \pi(v) \times \left\{ \frac{u_b(\{v\})}{u_b(\{v\})} + \frac{u_b(\{v,bb\})}{u_b(\{v\}) + u_b(\{bb\})} + \frac{u_b(\{v,br\})}{u_b(\{v\}) + u_b(\{br\})} + \frac{u_b(\{v,bb,br\})}{u_b(\{v\}) + u_b(\{bb\}) + u_b(\{br\})} \right\}.$$

où "v" désigne la voiture, "bb" le bus bleu et "br" le bus rouge. D'après la propriété *P1* de la fonction d'utilité basique, nous savons que l'utilité basique de tout singleton est égale à son utilité normale, ce qui règle le problème des dénominateurs. Calculons donc les numérateurs :

1. $u_b(\{v\}) = u(\{v\})$
2. $u_b(\{v,bb\}) = (-1)^1 u(\{v\}) + (-1)^1 u(\{bb\}) + (-1)^0 u(\{v,bb\})$
3. $u_b(\{v,br\}) = (-1)^1 u(\{v\}) + (-1)^1 u(\{br\}) + (-1)^0 u(\{v,br\})$
4. $u_b(\{v,bb,br\}) = (-1)^2 u(\{v\}) + (-1)^2 u(\{bb\}) + (-1)^2 u(\{br\}) + (-1)^1 u(\{v,bb\}) + (-1)^1 u(\{v,br\}) + (-1)^1 u(\{bb,br\}) + (-1)^0 u(\{v,bb,br\})$.

En considérant que $u(.) = \overline{u}$, équation qui traduit la situation d'indifférence, et sachant que $u(.)$ satisfait (17), nous obtenons ainsi :

$$P(v) = 1 \times \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3}.$$

Il est clair, grâce au lemme de conversion restreinte, que nous aurions rigoureusement le même résultat pour $P(bb)$ et $P(br)$ ce qui nous permet d'écrire que *lorsque un individu possibiliste réalise effectivement ses choix, il retrouve le résultat paradoxal qu'aurait obtenu directement l'agent probabiliste et ceci malgré des anticipations non-paradoxales.*

La conclusion logique de cet exemple est que la résolution externe du paradoxe n'est valide qu'au seul niveau des anticipations de choix. Autrement dit, des *anticipations* non-paradoxales mènent à des *observations* paradoxales (lorsque l'on conserve les termes du paradoxe).

IV.5. Le paradoxe des bus bleu et rouge : une résolution interne[9]

Si l'on analyse le paradoxe en termes de préférence, nous pouvons décrire la structure d'utilité sous-jacente comme suit : $u(v) = u(br) = u(bb) = u(br \cup bb) = \alpha$. Introduisons maintenant une préférence pour la flexibilité qui traduit la satisfaction que ressent l'agent lorsque le cardinal de ses choix augmente, sous la forme suivante : $u(v \cup br) = u(v \cup bb) = u(v \cup br \cup bb) = \beta$. En appliquant l'Axiome Généralisé du Choix, on obtient les anticipations de choix suivantes pour $A = \{v, bb, br\}$: $c_A(v) = c_A(br) = c_A(bb) = c_A(br \cup bb) = \frac{\alpha}{\beta}$. Il est clair que les anticipations ainsi exprimées ne sont *jamais* des probabilités. Appliquons maintenant le théorème de conversion dans les deux cas qui définissent le paradoxe.

Supposons donc, d'abord, que l'ensemble des choix soit $S = \{v, br\}$. On sait que $u_b(v) = u_b(br) = \alpha$ et $u_b(v \cup br) = \beta - 2\alpha$. On peut en déduire alors les probabilités effectives de choix : $P_S^{AGC}(v) = \frac{\alpha}{\beta} \times \left\{ \frac{u_b(v)}{u_b(v)} + \frac{u_b(v \cup br)}{u_b(v) + u_b(br)} \right\} = \frac{\alpha}{\beta} \times \left\{ 1 + \frac{\beta - 2\alpha}{2\alpha} \right\} = \frac{1}{2}$. Par symétrie, on sait que $P_S^{AGC}(br) = \frac{1}{2}$. On remarque que ces probabilités objectives sont conformes à celles qui apparaissent dans la première étape du paradoxe et qu'elles sont indépendantes des valeurs prises par α et β. L'agent ici décrit corrige ainsi ses anticipations et retrouve bien finalement les probabilités correspondantes.

Supposons maintenant que l'ensemble des choix soit $A = \{v, br, bb\}$ et que $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, ce qui est une manière simple de présenter les préférences. L'intuition voudrait que l'on obtienne pour probabilités de choix (1/2,1/4,1/4), cependant que l'Axiome du Choix de Luce donne (1/3,1/3,1/3). Qu'en est-il ici ? Appliquons donc le théorème de conversion au cas de trois actions dans l'ensemble des choix. Calculons d'abord les utilités basiques :

$$u_b(v) = u_b(br) = u_b(bb) = \alpha = 1,$$
$$u_b(v \cup br) = u_b(v \cup bb) = \beta - 2\alpha = 0,$$
$$u_b(br \cup bb) = -\alpha = -1,$$
$$u_b(v \cup br \cup bb) = 2\alpha - \beta = 0.$$

D'après le théorème de conversion (12) :

$$P_A^{AGC}(v) = \frac{\alpha}{\beta} \times \left\{ 1 + \frac{\beta - 2\alpha}{2\alpha} + \frac{\beta - 2\alpha}{2\alpha} + \frac{2\alpha - \beta}{3\alpha} \right\} = \frac{2\beta - \alpha}{3\beta} = \frac{1}{2}.$$

Le même genre de calculs donne :

$$P_A^{AGC}(br) = P_X^{AGC}(bb) = \frac{\alpha}{\beta} \times \left\{ 1 + \frac{\beta - 2\alpha}{2\alpha} + \frac{-\alpha}{2\alpha} + \frac{2\alpha - \beta}{3\alpha} \right\} = \frac{\beta + \alpha}{6\beta} = \frac{1}{4}.$$

---

9 Cet exemple nous a été suggéré par Jean-Yves Jaffray.

On retrouve bien les probabilités intuitives (1/2,1/4,1/4) tout en ayant des anticipations non-probabilistes qui satisfont l'AGC. Il y a donc ici une cohérence logique du modèle des anticipations et du modèle des réalisations, puisqu'un individu présentant les préférences ci-dessus décrites - qui traduisent simplement que l'agent va anticiper de manière non-probabiliste - engendre finalement une distribution objective de probabilités de choix conforme à l'intuition. Le paradoxe est ainsi résolu de façon interne *puisque cet individu, non-probabiliste en anticipations, réalisant effectivement ses choix, retrouve le résultat intuitif que l'agent probabiliste en anticipations est incapable d'engendrer dès lors que ses anticipations satisfont l'Axiome du Choix de Luce.*

CONCLUSION

Le résultat principal de ce papier est que certaines capacités de choix peuvent être *converties* pour engendrer une distribution de probabilités si ces capacités satisfont l'AGC. Cela signifie donc qu'un agent ayant une fonction d'utilité ∞-monotone incompatible avec une distribution d'anticipations probabilistes satisfaisant l'AGC est néanmoins en mesure d'être observé pratiquement dans ses choix. Le modèle généralisé de Luce permet donc de décrire des individus non-probabilistes - i.e. dont la fonction d'utilité ne peut pas engendrer des anticipations probabilistes de choix satisfaisant l'AGC - sans que pour autant ceux-ci soient inobservables. Ce résultat permet finalement de justifier la démarche de généralisation proposée par Billot & Thisse [1990] puisqu'en l'absence de toute méthode de conversion, il est vain d'interpréter les capacités de choix issues de l'AGC en tant qu'anticipations en ce que ces anticipations n'auraient pas alors permis de connaître les choix effectifs des agents. Il est à noter que si le théorème de conversion pouvait prétendre au statut de théorème d'équivalence, nous serions assurés de l'unicité de cette méthode.

Celle-ci revient à corriger les anticipations qui sont influencées par la préférence pour la flexibilité (ou l'aversion). C'est en faisant disparaître cette influence, que les anticipations permettent de définir les fréquences de choix de l'agent.

D'autre part, ce résultat - le théorème de conversion - nous amène à envisager l'étude du statut de l'aversion pour la flexibilité de manière parallèle à l'analyse du risque dans le modèle généralisé de Luce. Dans Billot & Thisse [1990], nous suggérions que les agents possibilistes - dont la fonction d'utilité engendre des *possibilités* de choix - pouvaient être considérés comme plus prudents que les agents probabilistes puisque la submodularité de la fonction d'utilité possibiliste correspond à une forte présomption de concavité discrète cependant que la modularité de la fonction d'utilité probabiliste correspond à une linéarité discrète. Il semble maintenant possible d'effectuer cette analyse sur la *déformation* de capacités en termes de flexibilité et de conclure ainsi - à la manière de Quiggin et Yaari - en l'aversion ou à l'inverse en l'amour de la flexibilité à partir de ses propriétés. Si cette approche se confirmait, nous aurions bien une relation entre la forme de la fonction d'utilité, l'ordre de sa monotonie et surtout les comportements face au risque *et* à la flexibilité.

ANNEXE 1

Les résultats et démonstrations suivantes sont dans Shafer [1976].

Proposition A1 : *Si S est un ensemble fini, alors* :

$$\sum_{T\subset S}(-1)^{\#(T)}=\begin{cases}1 & \text{si } S=\varnothing\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration : Si $S=\varnothing \Rightarrow (-1)^0=1$. Sinon : $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_n\}$;

$$\sum_{T\subset S}(-1)^{\#(T)}=(-1)^0+\sum_i(-1)^{\#\{a_i\}}+\sum_{i<j}(-1)^{\#\{a_i,a_j\}}+\ldots+(-1)^{\#(S)}$$

$$=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=(1-1)^n=0.$$

Q.E.D.

Proposition A2 : *Si S est un ensemble fini et $T\subset S$, alors :*

$$\sum_{T\subset S'\subset S}(-1)^{\#(S')}=\begin{cases}(-1)^{\#(S)} & \text{si } T=S\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration : Peut se déduire de la proposition A1, puisque :

$$\sum_{T\subset S'\subset S}(-1)^{\#(S')}=\sum_{R\subset S-T}(-1)^{\#(T\cup R)}=(-1)^{\#(T)}\sum_{R\subset S-T}(-1)^{\#(R)}.$$

Q.E.D.

Proposition A3 : *Supposons S fini, $f(.)$ et $g(.)$ deux fonctions définies de 2^S vers R, alors, pour tout T de 2^S :*

$$f(T)=\sum_{R\subset T}g(R),$$

si et seulement si, pour tout T de 2^S :

$$g(T)=\sum_{R\subset T}(-1)^{\#(T-R)}f(R).$$

Démonstration : $(\Rightarrow)$

$$\sum_{R\subset T}(-1)^{\#(T-R)}f(R)=(-1)^{\#(T)}\sum_{R\subset T}(-1)^{\#(R)}f(R)$$

$$=(-1)^{\#(T)}\sum_{R\subset T}(-1)^{\#(R)}\sum_{D\subset R}g(D)$$

$$=(-1)^{\#(T)}\sum_{D\subset T}g(D)\sum_{D\subset R\subset T}(-1)^{\#(R)}$$

$$=(-1)^{\#(T)}g(T)(-1)^{\#(T)}=g(T).$$

$(\Leftarrow)$

$$\sum_{R\subset T}g(R)=\sum_{R\subset T}\sum_{D\subset R}(-1)^{\#(R-D)}f(D)$$

$$=\sum_{D\subset T}(-1)^{\#(D)}f(D)\sum_{D\subset R\subset T}(-1)^{\#(R)}$$

$$=(-1)^{\#(T)}f(T)(-1)^{\#(T)}=f(T).$$

Q.E.D.

ANNEXE 2

Le résultat suivant est dans Billot & Thisse [1990].

$\boxed{\text{Théorème Généralisé de Luce}}$: *(Billot & Thisse [1990]).*
Supposons $c_A(S) > 0$, $\forall S \neq \varnothing$, $S \in 2^A$ *L'Axiome Généralisé du Choix est satisfait si et seulement si il existe une capacité positive* $u(.)$ *définie sur* 2^A *telle que :*

$$c_S(T) = \frac{u(T)}{u(S)} \text{ pour tout } T \subseteq S \subseteq A. \tag{8}$$

De plus, cette capacité est unique si normalisée.

Démonstration : $(\Rightarrow)$

$\forall S \subseteq A,\ S \neq \varnothing$, posons : $u(S) = c_A(S)$. Alors, on sait que $c_A(S) > 0$. On en déduit aussitôt d'après l'AGC : $\forall T \subseteq S$; $c_A(T) = c_A(S) \cdot c_S(T)$, d'où l'on peut déduire :

$$c_S(T) = \frac{c_A(T)}{c_A(S)} = \frac{u(T)}{u(S)}.$$

$(\Leftarrow))$

Immédiat.

L'unicité de $u(.)$ est évidente si $u(.)$ est normalisée. On peut en déduire que la fonction d'utilité $u(.)$ est unique à un facteur constant près.

Q.E.D.

ANNEXE 3

Proposition 2 : *Les fonctions* $P_\lambda(.)$ *telles qu'il existe une fonction de poids* λ *définies par* λ : $\bigcup_{T \in 2^S - \varnothing} \{(T, a) : a \in T\} \to R$, *satisfaisant* $\lambda \geq 0$,

$$\sum_{a \in T} \lambda(T, a) = 1,\ \forall T \in 2^S - \varnothing \tag{13a}$$

avec :

$$P_\lambda(\{a\}) = \sum_{a \in T} \lambda(T, a) \cdot P_S^b(T),\ \forall a \in S,\ \forall S \subseteq A \tag{13b}$$

$$P_\lambda(S) = \sum_{a \in S} P_\lambda(\{a\}) \tag{13c}$$

où $P_S^b(.)$ *est l'inverse de Möbius d'une capacité* $c_S(.)$ *quelconque, sont des mesures de probabilités si et seulement si :*

$$P_S^b(\{a\}) + \sum_{\substack{\{a\} \subset T \\ \{a\} \neq T}} \text{Min}\{P_S^b(\{T\}), 0\} \geq 0,\ \forall a \in S,\ \forall S \subseteq A. \tag{13d}$$

Démonstration : Elle est reprise de Chateauneuf & Jaffray [1989].

Puisque $c_S(.)$ est une capacité quelconque, $P_S^b(.)$ satisfait (6). Ainsi, pour tout $P_\lambda(.)$ satisfaisant (13*a*), (13*b*) et (13*c*) :

$$\sum_{a \in S} P_\lambda(\{a\}) = \sum_{a \in S} \sum_{\{a\} \subset T} \lambda(T,a) P_S^b(T)$$

$$= \sum_{T \in 2^S - \emptyset} P_S^b(T) \sum_{a \in T} \lambda(T,a) = 1.$$

On doit donc juste montrer que si $P_\lambda(.)$ satisfait (13*a*), (13*b*) et (13*c*), $P_\lambda(\{a\}) \geq 0$ pour tout $a \in S$ si et seulement si (13*d*) est satisfait :

$$P_\lambda(\{a\}) = P_S^b(\{a\}) + \sum_{\substack{\{a\} \subset T \\ P_S^b(\{a\})<0}} \lambda(T,a) P_S^b(T) + \sum_{\substack{\{a\} \subset T \\ P_S^b(\{a\})>0}} \lambda(T,a) P_S^b(T).$$

Aussi, puisque $0 \leq \lambda(T,a) \leq 1$:

$$P_\lambda(\{a\}) \geq P_S^b(\{a\}) + \sum_{\substack{\{a\} \subset T \\ P_S^b(\{a\})<0}} P_S^b(T) = P_S^b(\{a\}) + \sum_{\substack{\{a\} \subset T \\ \{a\} \neq T}} \mathrm{Min}\{P_S^b(T), 0\}.$$

Il est facile de voir, par ailleurs, que (13*d*) est une condition suffisante pour la non-négativité de $P_\lambda(\{.\})$.

Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

Billot A. [1991]. Cognitive Rationality and Alternative Belief Measures, *Journal of Risk and Uncertainty*, **4**, 299-324.

Billot A & Thisse J.-F. [1990]. Modèle de Luce Généralisé et Capacité de Choquet, document de travail Cefib, Université Panthéon-Assas.

Bixby R.E., Cunningham W.H. & Tokpis D.M. [1985]. The Partial Order of a Polymatroïd Extreme Point, *Mathematical Operationnal Research*, **10**, 367-378.

Chateauneuf A. & Jaffray J.-Y. [1989]. Some Characterizations of Lower Probabilities and Other Monotone Capacities through the Use of Möbius Inversion, *Mathematical Social Sciences*, **17**, 263-283.

Choquet L. [1953]. Théorie des capacités, *Annales de l'Institut Fourier*, Grenoble, **5**, 131-295.

Debreu G. [1960]. Review of R.D.Luce, Individual Choice Behavior : a Theoretical Analysis, *American Economic Review*, **50**,186-188.

Dempster A.P. [1967]. Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping, *Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 325-339.

de Palma A. & Thisse J.-F. [1989]. Les modèles de choix discrets, *Annales d'Economie et de Statistique*, **14**, 151-190.

Gilboa I. [1987]. Expected Utility with Purely Subjective Non-Additive Probabilities, *Journal of Mathematical Economics*, **16**, 65-88.

Koopmans T.C. [1964]. On the Flexibility of Future Preferences, in *Human Judgments and Optimality*, ed. by M.W. Shelly and G.L. Bryan, Wiley, New York.

Kreps D.M. [1979]. A Representation Theorem for "Preference for Flexibility", *Econometrica*, **47**, 565-578.

Luce R.D. [1959]. *Individual Choice Behavior : A Theoretical Analysis*, Wiley, New York.

Mc Fadden D. [1981]. Econometric Models of Probabilistic Choice, in Manski C.F. & Mc Fadden D. eds, *Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications*, MIT Press, Cambridge (Mass.), 198-272.

Quiggin J. [1982]. A Theory of Anticipated Utility, *Journal of Economic Behavior and Organisation*, **3**, 323-343.

Schmeidler D. [1989]. Subjective Probability and Expected Utility without Additivity, *Econometrica*, **57**, 571-587.

Strauss D. [1979]. Some Results on Random Utility Models, *Journal of Mathematical Psychology*, **20**, 35-52.

Shafer G. [1976]. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton (NJ).

Shapley L.S. [1971]. Cores of Convex Games, *International Journal of Game Theory*, **1**, 11-26.

Wakker P. [1990]. Under Stochastic Dominance, Choquet-Expected Utility and Anticipated Utility are Identical, to appear in *Theory and Decision*.

Yaari M.E. [1987]. The Dual Theory of Choice under Risk, *Econometrica*, **55**, 95-116.

Yellot J.I. [1977]. The Relationship between Luce's Choice Axiom, Thurstone's Theory of Comparative Judgement and the Double Exponential Distribution, *Journal of Mathematical Psychology*, **5**, 109-144.

RESUME

Une partie importante de la théorie des choix discrets concerne les développements du modèle de Luce. Cette place privilégiée provient sans nul doute de l'extrême élégance de l'Axiome du Choix. Dans Billot & Thisse [1990], il a été généralisé au cas des probabilités non-additives que l'on appelle aussi *capacités* de Choquet. Ici, nous cherchons à démontrer qu'un individu dont la fonction d'utilité est a priori incompatible avec des anticipations probabilistes de choix, peut néanmoins *convertir* ses capacités de choix jusqu'à les rendre "équivalentes" avec une certaine distribution de probabilités. Nous allons ainsi montrer que toute mesure de croyance, non-additive, monotone d'ordre infini (ce que l'on note aussi ∞-monotone) et respectant l'Axiome Généralisé du Choix, peut être convertie en probabilités. Afin d'arriver à cette équivalence entre l'AGC exprimé au moyen d'une capacité non-additive, ∞-monotone et l'existence d'une distribution de probabilités de choix, nous utilisons certains des résultats les plus classiques de Dempster et Shafer ainsi que leurs extensions par Chateauneuf et Jaffray . Ces résultats concernent essentiellement les inverses de Möbius des fonctions de croyance à la Shafer. Dans un premier temps, nous présentons les inverses de Möbius d'une fonction d'utilité et d'une capacité quelconques. Puis, nous démontrons deux nouvelles formulations du théorème de Luce généralisé exprimées au moyen des inverses de Möbius des capacités et de la fonction d'utilité. Ensuite, nous démontrons le théorème de conversion. Enfin, nous proposons un exemple qui permet de retrouver, grâce à notre méthode de conversion, le résultat intuitif qui est à l'origine du paradoxe de Luce, ce qui nous permet, de fait, de résoudre ce dernier.

MOTS-CLES
Choix discrets - Probabilité - Mesure de Croyance - Rationalité limitée