



Mouvement d'une corde vibrante en présence d'un obstacle convexe: Un problème à frontière libre

Henri Cabannes

► To cite this version:

Henri Cabannes. Mouvement d'une corde vibrante en présence d'un obstacle convexe: Un problème à frontière libre. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 1985, 301 (3), pp.125-129. hal-01527100

HAL Id: hal-01527100

<https://hal.science/hal-01527100>

Submitted on 23 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ONDES ET VIBRATIONS. — *Mouvement d'une corde vibrante en présence d'un obstacle convexe : un problème à frontière libre.* Note de **Henri Cabannes**, Correspondant de l'Académie.

Étudiant le mouvement d'une corde vibrante en présence d'un obstacle quelconque, on montre que sur les parties convexes, la corde peut soit rebondir, soit s'enrouler; la détermination du mouvement dans ce dernier cas est un problème à frontière libre. Des solutions exactes, correspondant aux différents cas, sont construites.

WAVES AND VIBRATIONS. — Motion of a vibrating string in the presence of a convex obstacle: a free boundary problem.

Studying the motion of a vibrating string in the presence of an arbitrary obstacle, we show that on the convex parts, the string can either rebound or wrap; the determination of the motion in this last case is a free boundary problem. Exact solutions corresponding to the different cases are constructed.

1. ÉNONCÉ DU PROBLÈME. — Une corde vibrante fixée à ses deux extrémités oscille dans un plan x, u en présence d'un obstacle curviligne fixe d'équation $u = \varphi(x)$. Le mouvement est défini par une fonction $u(x, t)$ de l'abscisse x et du temps t , satisfaisant, en l'absence de contact avec l'obstacle, les conditions suivantes :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{si } u(x, t) > \varphi(x),$$

$$(2) \quad u\left(\pm \frac{1}{2}, t\right) = 0,$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u(x, 0) = \alpha(x) > \varphi(x) & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \beta(x) & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$, nulles pour $x = \pm 1/2$ sont données.

Au début la corde est animée du mouvement $u(x, t) = w(x, t)$ qui est l'oscillation libre (oscillation en l'absence d'obstacle), valable dans le plan x, t (fig. 1) jusqu'à la première ligne d'influence ([1], [2]). La première ligne d'influence est formée d'arcs de la courbe $(\Gamma) : w(x, t) = \varphi(x)$ (arcs de contact) et de tangentes caractéristiques (de pentes ± 1) à la courbe (Γ) . Sur les arcs de contact on a $t = \tau(x)$ ou $x = \sigma(t)$, et $|\dot{\sigma}(t)| = |d\sigma/dt| \geq 1$.

(a) *Conditions de rebond.* — Les arcs de contact comportent des parties non caractéristiques sur lesquelles on a $|\dot{\sigma}(t)| > 1$ et exceptionnellement des segments caractéristiques sur lesquels on a $\dot{\sigma}(t) = \pm 1$. Sur les premiers, la corde rebondit suivant une loi de réflexion parfaite : la vitesse du point de la corde qui heurte l'obstacle est multipliée par -1 , et la détermination du mouvement après le rebond est un problème de Cauchy. La détermination du mouvement après un segment caractéristique est un problème de Goursat [données de la fonction $u(x, t)$ sur la caractéristique et sur une autre courbe], si bien que la vitesse après le contact est déterminée par la solution de ce problème et non par une loi de réflexion. On complète donc les équations (1)-(3) par la condition de réflexion suivante [3] :

$$(4) \quad \left(\dot{\sigma} - \frac{1}{\dot{\sigma}}\right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] (x, t) = 0 \quad \text{si } u(x, t) = \varphi(x),$$

où la notation $[Q](x, t) = Q(x, t+0) - Q(x, t-0)$, désigne la discontinuité de la fonction $Q(x, t)$ au moment du contact c'est-à-dire si $x = \sigma(t)$.

On déduit des équations (1), (2) et (4) que l'énergie totale de la corde :

$$(5) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx,$$

demeure constante au cours du mouvement. Si le contact a lieu en des points isolés d'abscisses $\sigma_i(t)$ on obtient :

$$(6) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\dot{\sigma}_i - \frac{1}{\sigma_i} \right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right]_{(\sigma_i, t)=0}.$$

S'il y a contact persistant sur certains arcs $\sigma_i \leq x \leq \sigma_{i+1}$ (ce qui n'est possible qu'avec des obstacles convexes pour un observateur situé sur la corde [4]), sur lesquels on a, soit avant le contact, soit après le contact, $u(x, t) = \varphi(x)$, donc $(\partial u / \partial t) = 0$ et $(\partial u / \partial x) = \varphi'(x)$, on obtient encore $E(t) = \text{Cte}$.

(b) *Conditions d'enroulement (ou de déroulement)*. — Lorsque le contact de la corde avec l'obstacle a lieu suivant un segment caractéristique, la vitesse après le rebond est déterminée par la solution d'un problème de Goursat, et lorsque cette vitesse est négative le rebond est impossible; il y a donc lieu de prévoir un mouvement avec enroulement de la corde sur l'obstacle. Il en est de même lorsque la courbe $w(x, t) = \varphi(x)$, rencontre l'axe $x = -.5$ (ou $x = .5$) en un point en lequel la tangente a une pente (dt/dx) supérieure à 1 (ou inférieure à -1).

L'enroulement (ou le déroulement) est un rebond particulier et doit satisfaire la relation (4). Dans ces conditions, l'enroulement (ou le déroulement) ne peut avoir lieu que suivant une caractéristique, ou suivant une courbe (inconnue) : $t = \tau(x)$ sur laquelle on a $u(x, \tau(x)) \equiv \varphi(x)$ et $(\partial u / \partial t)(x, \tau(x)) \equiv 0$; on se trouve comme l'a indiqué Amério [5], en présence d'un problème à frontière libre. Ces problèmes se rencontrent seulement dans le cas des obstacles convexes, puisque le contact persistant sur un obstacle concave ne vérifie pas les lois d'action de contact [4].

Nous introduisons les coordonnées caractéristiques $\xi = t + x$, $\eta = t - x$; si l'oscillation libre $w(x, t) = \tilde{w}(\xi, \eta)$ se termine sur la caractéristique $\eta = \bar{\eta}$, le mouvement au-delà est défini par $u(x, t) = \tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{w}(\xi, \bar{\eta}) + g(\eta)$; les conditions d'enroulement sur la courbe (frontière libre) $t = \tau(x)$ s'écrivent :

$$(7) \quad \begin{cases} \tilde{w}(\tau+x, \bar{\eta}) + g(\tau-x) \equiv \varphi(x), \\ \frac{\partial w}{\partial t}(\tau+x, \bar{\eta}) + g'(\tau-x) \equiv 0 \end{cases}$$

et permettent de déterminer les deux fonctions inconnues $\tau(x)$ et $g(\eta)$.

2. EXEMPLES DE MOUVEMENT AVEC REBOND. — Nous considérons une corde initialement au repos dans la position $u(x, 0) = \cos \pi x$, oscillant en présence de l'obstacle $u = \varphi(x) = \lambda \sin 2\pi nx$ (n entier). La courbe $w(x, t) = \varphi(x)$ a pour équation :

$$(8) \quad t = \tau(x) = \frac{1}{\pi} \text{Arc cos } \lambda \left(\frac{\sin 2\pi nx}{\cos \pi x} \right);$$

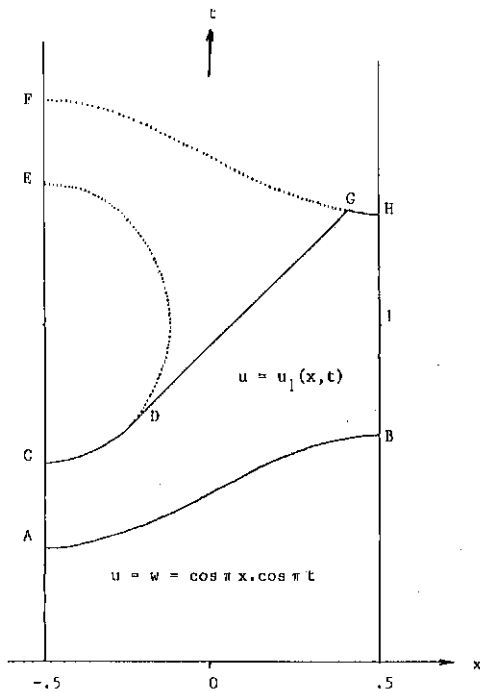


Fig. 1

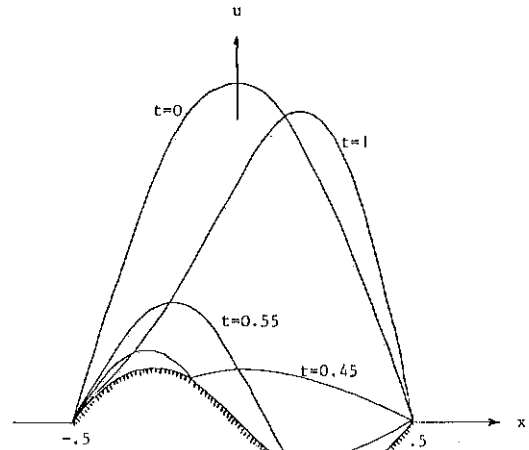


Fig. 2.

Fig. 1 et 2. — Rebond de la corde sur l'obstacle.

Figs. 1 and 2. — Rebound of the string on the obstacle.

pour $|\lambda|$ assez petit, on a $|d\tau/dx| < 1$; la première ligne d'influence est alors la courbe de contact précédente sur tout l'intervalle $-0.5 \leq x \leq 0.5$. Après le premier contact on a $u(x, t) = u_1(x, t) = f(t+x) + g(t-x)$. Les conditions de contact et de rebond s'écrivent :

$$f(\tau(x)+x) + g(\tau(x)-x) \equiv \lambda \sin 2\pi nx,$$

$$(9) \quad f'(\tau(x)+x) + g'(\tau(x)-x) \equiv \frac{\pi}{2} \{ \sin \pi(\tau(x)+x) + \sin \pi(\tau(x)-x) \}.$$

On en déduit :

$$(10) \quad f(\xi) = -\frac{\cos \pi \xi}{2} + \lambda \sin 2\pi nx - \lambda^2 \times \int_0^{\pi x} \frac{2n + \tan y \tan 2ny}{\cos y - \sqrt{1 - (\lambda \sin 2ny / \cos y)^2}} 2n \cos^2 2ny \cdot dy,$$

avec $\xi = x + \tau(x)$. On obtient ensuite $g(\eta) = f(-\eta)$, si bien que le mouvement après le premier rebond est déterminé par une quadrature.

Dans le cas particulier $n=1$ les résultats peuvent être explicités; la première ligne d'influence coïncide avec la courbe de contact si on a $|2\lambda| \leq 1$. Le mouvement de la

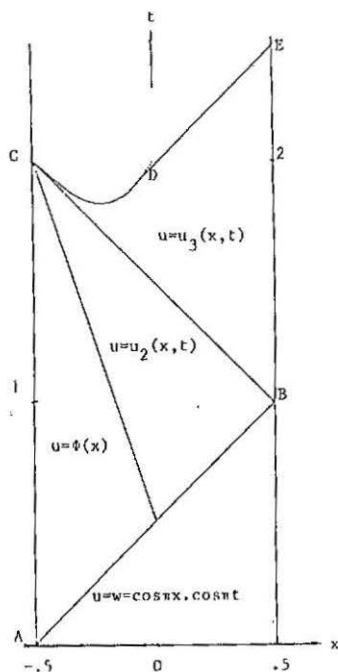


Fig. 3

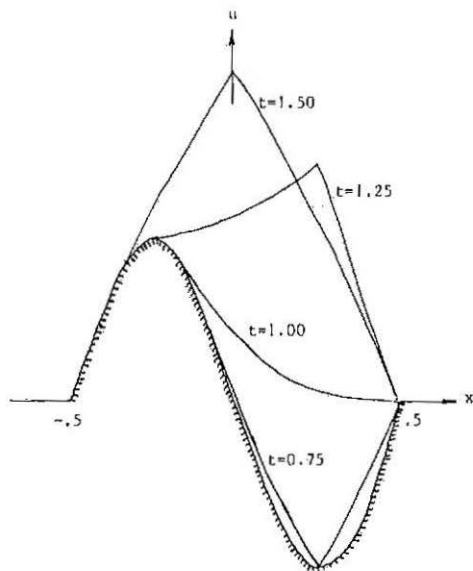


Fig. 4

Fig. 3 et 4. — Enroulement et déroulement de la corde sur l'obstacle.
Figs. 3 and 4. — Wrapping and unwrapping of the string on the obstacle.

corde après le premier rebond est défini ensuite par la fonction :

$$(11) \quad u_1(x, t) = w(x, t) - \frac{1-4\lambda^2}{2\lambda} \left\{ \pi x - \text{Arc tan} \frac{(1+4\lambda^2) \sin \pi x - 4\lambda \cos \pi t}{(1-4\lambda^2) \cos \pi x} \right\}.$$

Pour $(1/3) < |2\lambda| \leq 1$ (fig. 1) le second contact a lieu suivant un arc CD, avant l'instant $t=2-\tau(x)$ et suivant un arc GH à l'instant $t=2-\tau(x)$; le segment de droite DG tangent à l'arc CD est caractéristique et la seconde ligne d'influence est la ligne CDGH.

Pour $|2\lambda| \leq (1/3)$, l'arc CDE disparaît et la seconde courbe de contact (qui est aussi la seconde ligne d'influence) est la courbe $t=2-\tau(x)$. Après le second rebond, on a alors de nouveau $u=w$, si bien que le mouvement est périodique de période 2. Sur la figure 2, qui correspond au cas limite $2\lambda = -1/3$, les positions de la corde à divers instants sont représentées.

3. EXEMPLES DE MOUVEMENT AVEC ENROULEMENT. — Nous reprenons l'exemple précédent dans le cas limite $2\lambda = -1$. La première courbe de contact est la caractéristique $t-x=.5$ (fig. 3). Pour $0 < t < .5$ la corde s'enroule sur la partie convexe de l'obstacle suivant la caractéristique précédente; après l'instant $t=.5$, elle rebondit sur la partie concave, toujours suivant la caractéristique $t=x+.5$, et se déroule sur la partie convexe suivant la courbe $6x+2t=1$, que l'on détermine par la méthode résumée dans les équations (7); cette méthode permet de déterminer le mouvement $u(x, t)=u_2(x, t)$ de la corde après le rebond sur la partie concave :

$$(12) \quad u_2(x, t) = \frac{1}{2} \cos \pi(x+t) - \sin \pi \frac{1+2x-2t}{4}.$$

Le coefficient de réflexion, rapport des vitesses après et avant le contact n'est plus égal à -1 , mais à $-\tan^2 \pi x$, et varie de 0 à $-\infty$ lorsque le point de contact décrit la partie concave de l'obstacle.

Si on conserve les mêmes conditions initiales, mais si on remplace l'obstacle précédent par le suivant : $u = \Phi(x) = -(\cos 3\pi x)/3$, on obtient un mouvement périodique de période $T=4/3$, avec enroulements et déroulements successifs de la corde sur l'obstacle. L'extrémité de l'arc en contact avec l'obstacle se propage avec la vitesse $\pm(1/3)$ et, aux instants $(2/3) + 2k(4/3)$ (k entier), la corde est au repos sur l'obstacle.

Le mouvement précédent ainsi que ceux qui ont été étudiés dans la section 2 correspondant aux cas $n=1$, $|6\lambda| \leq 1$, représentent des solutions globales en temps du problème (1)-(4).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] L. AMERIO et G. PROUSE, *Rend. Matematica*, 8, 1975, p. 563-585.
- [2] H. CABANNES et A. HARAUX, *Int. J. Non linear Mechanics*, 16, 1981, p. 449-458.
- [3] M. SCHATZMAN, *J. Math. Anal. and Appl.*, 73, 1980, p. 138-191.
- [4] H. CABANNES, *Acustica*, 55, 1984, p. 14-20.
- [5] L. AMERIO, *Rend. Accad. Naz. Sc.*, XL, 102, 1984, p. 185-246.

*Laboratoire de Mécanique théorique associé au C.N.R.S.,
Université Pierre-et-Marie, 4, place Jussieu, 75005 Paris.*