

Une nouvelle stratégie de calcul de modèles réduits PGD basée sur l'erreur en relation de comportement

Pierre-Eric Allier, Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze

► **To cite this version:**

Pierre-Eric Allier, Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze. Une nouvelle stratégie de calcul de modèles réduits PGD basée sur l'erreur en relation de comportement. 12e Colloque national en calcul des structures, May 2015, Giens, France. 12e Colloque national en calcul des structures, 2015. <hal-01517308>

HAL Id: hal-01517308

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01517308>

Submitted on 3 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Une nouvelle stratégie de calcul de modèles réduits PGD basée sur l'erreur en relation de comportement

P.-E. Allier^{1,*}, L. Chamoin¹, P. Ladevèze¹

¹ LMT-Cachan (ENS-Cachan, CNRS, Université Paris Saclay), 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France

* allier@lmt.ens-cachan.fr

Résumé — Dans ce papier, nous introduisons un nouvel algorithme pour calculer un modèle réduit PGD (Proper Generalized Decomposition) basé sur la minimisation de l'erreur en relation de comportement (ERC). L'objectif de cette méthode est de procurer une meilleure estimation des modes PGD et un indicateur immédiat, robuste et garanti de l'erreur de réduction. On comparera cette méthode à l'ensemble des algorithmes classiques de calcul PGD sur un cas test de thermique transitoire unidimensionnel, proposé par S. Idelsohn. En particulier, on étudiera les limites de la PGD.

Mots clés — Réduction de modèle, Proper Generalized Decomposition (PGD), Estimation d'Erreur en Relation de Comportement (ERC).

1 Introduction

Malgré les progrès importants de l'informatique, le coût de résolution de problèmes multiparamétriques peut être extrêmement prohibitif. La réduction de modèle (ROM) est une bonne solution pour contourner cette difficulté, en projetant un modèle complexe sur une base réduite de faible dimension. Lorsque la solution est connue (ou une approximation de celle-ci), on peut calculer une base optimale selon une certaine norme, minimisant la distance à cette solution. C'est la définition de la Singular Value Decomposition (SVD) utilisée comme technique de réduction de modèle a posteriori, dont une analyse est faite dans [1].

Une famille de techniques de réduction de modèle a priori, appelé Proper Generalized Decomposition (PGD) reçoit actuellement un intérêt croissant [2]. L'idée est de calculer une approximation du modèle réduit sans connaissance a priori de la solution. Différents algorithmes ont été proposés dans la littérature : (i) le calcul classique de la PGD basée sur la méthode Galerkin [3] ; (ii) la minimisation du résidu ; (iii) une formulation Petrov-Galerkin [4].

Dans ce papier, nous introduisons une nouvelle technique de calcul PGD basée sur l'estimateur d'erreur en relation de comportement (ERC) introduit dans [5]. Basée sur une minimisation plus ou moins partielle de cet estimateur, elle permet d'obtenir une meilleure approximation PGD. Nous la comparerons à l'ensemble de ces méthodes PGD sur un cas test, initialement proposé par S. Idelsohn et présenté en section 2, vis-à-vis d'une décomposition SVD optimale selon la norme énergétique.

2 Le cas test

On considère un problème de thermique transitoire unidimensionnel défini sur les domaines spatio-temporel $\Omega = [0, L]$ et $I = [0, T]$. On considère le matériau comme homogène et isotrope de coefficients thermiques c et μ entièrement connus. La structure est soumise à (i) une température nulle aux deux extrémités du domaine ; (ii) un flux r_d représentant une flamme en mouvement à la vitesse v ; (iii) une température initiale nulle dans tout le domaine Ω . On aboutit alors à la formulation locale du problème (1), également représenté en figure 1.

$$\begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \delta(x - vt) & \forall (x, t) \in \Omega \times I \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t \in I \\ u(x, 0) = 0 & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

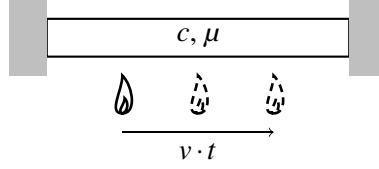


FIGURE 1 – Représentation du cas test

En introduisant les espaces $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ et $\mathcal{T} = L^2(I)$, le problème s'écrit : trouver $u \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{T}$ tel que :

$$\int_I \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v(x,t) + \underbrace{\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - Q(x,t) \right)}_{\tau(x,t)} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) dx dt = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{T} \quad (2)$$

où on a introduit le flux Q qui vérifie :

$$\int_{\Omega} Q(x,t) \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) dx = \int_{\Omega} \delta(x-vt) v(x,t) dx \quad \forall v \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{T}$$

Différentes méthodes existent pour résoudre un tel problème (2), la plus connue étant celle des éléments finis (FEM). Dans la suite on propose de calculer cette solution en minimisant un indicateur d'erreur en relation de comportement couplé à l'hypothèse PGD.

3 Un nouvel algorithme : minimisation de l'erreur en relation de comportement

3.1 Estimation d'erreur en relation de comportement

Cette famille d'estimateurs a posteriori, introduite dans [5], repose sur le concept d'erreur en relation de comportement à travers (i) la construction d'une solution approchée admissible $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$ à partir d'une solution élément finis (u_h, σ_h) ; (ii) la mesure énergétique du résidu de comportement. L'idée est de faire porter le doute sur la relation la moins fiable du problème de référence, car issue de données expérimentales, incertaines et mal maîtrisées.

La mesure de l'erreur en relation de comportement pour un couple $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$ admissible est définie en (3), où la norme choisie est la norme énergétique.

$$e_{RC}(u_h, \sigma_h) = \left\| \sigma_h(x,t) - \mu \frac{\partial u_h}{\partial x}(x,t) \right\| \quad (3)$$

La propriété la plus importante de cet estimateur est son côté garanti. L'extension de cet estimateur à des solutions PGD à été proposée en [6]. Reposant sur le post-traitement de cette solution pour construire un champ $\hat{\sigma}_h$ admissible au sens des éléments finis, il est possible d'estimer une erreur de réduction. L'estimation de l'erreur de discrétisation est quant à elle déterminée en calculant une solution admissible par les méthodes d'erreur en relation de comportement développées dans le cadre des éléments finis.

3.2 Minimisation de l'estimateur

L'intérêt de minimiser l'estimateur par rapport à l'extension proposée en [6] est de construire une solution PGD admissible au sens des éléments finis durant la phase de résolution PGD. On obtient alors un estimateur de réduction immédiat et différent de l'estimateur de réduction utilisé dans les méthodes PGD classiques (estimateur en résidu d'équilibre).

On cherche à minimiser l'indicateur d'erreur en relation de comportement (3), sous la condition que le flux τ vérifie l'équilibre (2).

$$(u(x,t), \tau(x,t)) = \arg \min_{u, \tau} \int_I \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left[\tau(x,t) + Q(x,t) - \mu \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right]^2 dx dt \quad (4)$$

On fait l'hypothèse de séparation de variables sur le champ de température sous la forme (5). Une telle approche conduit naturellement à déterminer les modes par un algorithme de type *greedy*, où l'on suppose connue la solution en température u_m jusqu'au mode m et on cherche à déterminer uniquement le mode $m + 1$.

$$u(x, t) \simeq u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \psi_i(x) \quad (5)$$

Comme le flux τ doit vérifier l'équilibre (2), τ vérifie également une écriture à variables séparées, de la forme (6). En effet, en injectant l'hypothèse (5) dans l'équilibre (2), et en adoptant une résolution du champ de température par un algorithme *greedy*, l'équilibre doit être vérifié pour chaque mode PGD. On en déduit alors que les fonctions Z_i dépendent des fonctions ψ_i selon la relation (7).

$$\tau(x, t) \simeq \tau_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \frac{d\lambda_i}{dt}(t) Z_i(x) \quad (6)$$

$$\forall i, \quad \int_{\Omega} Z_i(x) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) + c \psi_i(x) w(x, t) dx = 0, \quad \forall w \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{T} \quad (7)$$

On pose alors $u_{m+1} = u_m + \lambda(t) \psi(x)$ et donc $\tau_{m+1} = \tau_m + \frac{d\lambda}{dt}(t) Z(x)$. On aboutit alors à un problème non-linéaire complexe, car dépendant des fonctions λ , ψ et Z . Un algorithme naturel pour déterminer ces fonctions est d'utiliser un algorithme de type point-fixe. On minimise l'équation (4) alternativement selon les directions λ , ψ et Z . En partant d'une initialisation ad-hoc, chaque sous-itération de l'algorithme du point-fixe vérifie alors une séquence de problèmes de dimension inférieure. Dans la suite et pour des raisons de lisibilité, on n'indiquera plus la dépendance des fonctions.

- La minimisation rapport à la fonction λ donne l'équation (8), qui est la formulation variationnelle d'un problème aux dérivées ordinaires (ODP) en temps d'ordre 2. On choisira d'adopter une résolution par éléments finis.

$$0 = \int_I \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(Q + \sigma_m - \mu \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{d\lambda}{dt} Z - \mu \lambda \frac{d\psi}{dx} \right) \left(\frac{d\lambda^*}{dt} Z - \mu \lambda^* \frac{d\psi}{dx} \right) dx dt \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{T} \quad (8)$$

- On minimise alors par rapport à ψ . Même si une telle minimisation est possible, elle reste lourde, car Z dépend implicitement de ψ (voir (7)). On minimise alors partiellement en fixant Z à sa solution calculée à la sous-itération précédente dans un premier temps. On aboutit alors au problème défini en (9), formulation variationnelle d'une ODP en espace d'ordre 2.

$$0 = \int_I \int_{\Omega} \left(\mu \frac{\partial u_m}{\partial x} - Q - \sigma_k \right) \lambda \frac{d\psi^*}{dx} - \frac{d\lambda}{dt} \lambda Z \underbrace{\frac{d\psi^*}{dx}}_{-c\psi\psi^*} + \mu \lambda^2 \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi^*}{dx} dx dt \quad \forall \psi^* \in \mathcal{V} \quad (9)$$

Après avoir injecté la condition (7) dans cette dernière equation (9), on peut remarquer que l'on retrouve l'équilibre (2) où l'on aurait injecté la décomposition PGD (5) avec comme fonction test $v = \lambda \psi^*$. La conséquence de ce choix implique que la minimisation réalisée selon ψ est équivalente à une méthode Galerkin classique.

- On détermine alors finalement Z par la relation (7).

4 Comparaison des différents algorithmes

On évalue la qualité de l'approximation en évaluant l'erreur en norme énergétique $\|u_{ex} - u_m\|$ pour chaque mode m . La solution exacte est fixée à la solution obtenue par éléments finis classique, hypothèse valable puisque les maillages spatial et temporel sont extrêmement raffinés pour s'affranchir de toutes sources d'erreur de discrétisation. On représente, en figure 2, cet estimateur normé pour chaque type d'algorithme PGD en fonction du nombre de modes PGD.

De la figure 2, on observe que l'estimation SVD est toujours la plus optimale. La raison de cette optimalité est également l'inconvénient de cet stratégie car elle nécessite de connaître la solution complète avant de déterminer une base réduite.

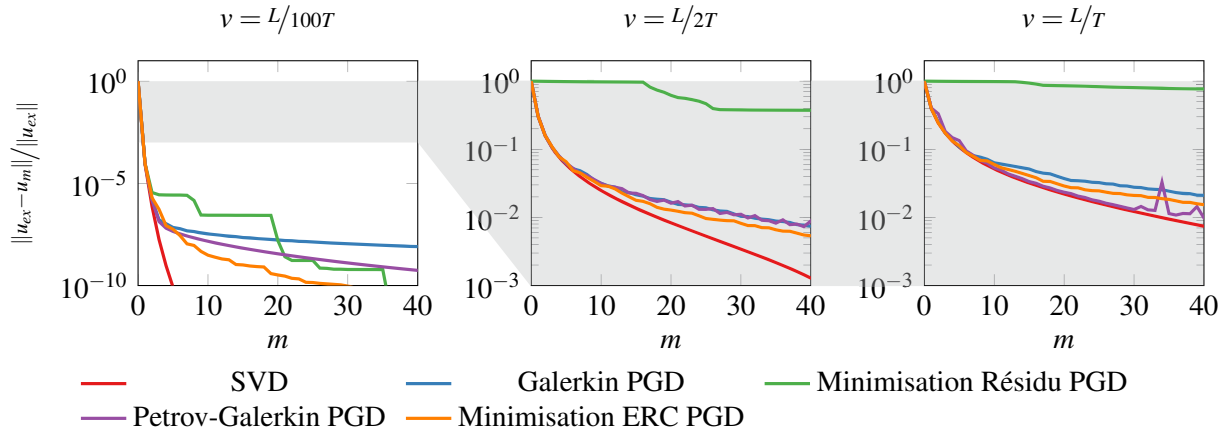


FIGURE 2 – Convergence de l’erreur en norme énergétique pour chaque algorithme PGD en fonction du nombre de modes PGD m à différentes vitesses de chargement $v = \{L/100T, L/2T, L/T\}$

La minimisation du résidu présente une mauvaise convergence, en raison du choix de mesurer l’erreur en norme énergétique. Bien que cette méthode présente une convergence monotone en norme résiduelle [4], on choisit la norme énergétique. En effet, comme la solution exacte minimise l’énergie potentielle du système, la norme résiduelle n’est pas représentative de l’écart vis-à-vis de cette dernière à la différence de la norme énergétique.

Les convergences des trois dernières méthodes (Galerkin, Petrov-Galerkin et minimisation de l’ERC) sont semblables avec une hiérarchisation de la qualité favorable à notre nouvelle stratégie de calcul PGD par minimisation de l’ERC. Notons toutefois qu’à vitesse v élevée, la méthode Petrov-Galerkin semble fournir une meilleure approximation PGD mais instable : l’apparition de pics manifeste l’introduction de mode « polluant ». Un tel comportement amoindrit l’intérêt de cette dernière méthode.

5 Conclusion

Quelles que soit les méthodes SVD et PGD, la convergence se dégrade à mesure que v augmente. Cette observation découle du fait que le problème (1) ne vérifie pas la séparation des variables, limite des méthodes de réduction de modèle PGD. À faible vitesse de chargement v , l’influence du temps est minimale d’où une bonne convergence des algorithmes. À grande vitesse, cette influence ne peut plus être négligée.

On a proposé une méthode de calcul PGD qui permet d’améliorer la convergence de la solution tout en préservant sa stabilité. Des perspectives d’améliorations sont envisageables par l’ajout d’un champ statiquement admissible à 0 au flux τ pour assouplir l’écriture (6).

Références

- [1] A. Chatterjee. *An introduction to the proper orthogonal decomposition*, Current science, 78 :808–817, 2000.
- [2] F. Chinesta, P. Ladevèze. *Separated Representations and PGD-Based Model Reduction*, CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer, 2014.
- [3] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*, Springer, 1999.
- [4] A. Nouy. *A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 199 :1603–1626, 2010.
- [5] P. Ladevèze, J.P. Pelle. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*, Mechanical engineering series, Springer, 2005.
- [6] P. Ladevèze, L. Chamoin. *On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 200 :2032-2047, 2011.