

# Couplage entre filtre de Kalman, erreur en relation de comportement modifiée, et réduction de modèle pour le recalage en temps réel de modèles dynamiques

Basile Marchand, Ludovic Chamoin, Christian Rey

► **To cite this version:**

Basile Marchand, Ludovic Chamoin, Christian Rey. Couplage entre filtre de Kalman, erreur en relation de comportement modifiée, et réduction de modèle pour le recalage en temps réel de modèles dynamiques. 12e Colloque national en calcul des structures, May 2015, Giens, France. 12e Colloque national en calcul des structures, 2015. <hal-01517302>

**HAL Id: hal-01517302**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01517302>**

Submitted on 3 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Couplage entre filtre de Kalman, erreur en relation de comportement modifiée, et réduction de modèle pour le recalage en temps réel de modèles dynamiques

B. Marchand<sup>1</sup>, L. Chamoin<sup>1</sup>, C. Rey<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> LMT (ENS Cachan/CNRS/Université Paris-Saclay), {chamoin,marchand}@lmt.ens-cachan.fr

<sup>2</sup> SAFRAN, christian.rey@safran.fr

---

**Résumé** — Dans ce travail on propose une nouvelle approche pour l'identification et le recalage en temps réel de modèle évolutif. L'idée principale est d'introduire l'erreur en relation de comportement modifiée dans une méthode d'assimilation de données basée sur le filtre de Kalman. L'intérêt est alors que l'on peut reformuler le filtre de Kalman afin d'en réduire la complexité tout en introduisant une méthode de réduction de modèle, la *Proper Generalized Decomposition*. Les performances de cette nouvelle approche sont illustrées sur diverses applications en Mécanique.

**Mots clés** — Identification, assimilation de données, filtre de Kalman, erreur en relation de comportement modifiée, PGD.

---

## 1 Objectifs

Le paradigme DDDAS (*Dynamic Data Driven Applications Systems*), lié au dialogue essais-calculs, a reçu ces dernières années un intérêt croissant dans le domaine de l'ingénierie mécanique [6]. L'idée est de créer une boucle de rétroaction entre un système physique et son modèle numérique, afin de (i) contrôler l'évolution du système à partir de la prédiction du modèle numérique ; (ii) recalculer le modèle numérique à partir d'observations réalisées sur le système. Dans ce travail nous nous focalisons sur l'étape d'identification/recalage des paramètres évolutifs d'un modèle. La difficulté de cette étape provient du fait qu'elle nécessite la résolution d'un problème inverse qui est généralement mal posé, et coûteux, rendant son traitement difficilement faisable en temps court. Différentes approches inverses sont possibles : approches déterministes basées généralement sur la définition d'une fonction coût associée à une méthode de régularisation ; approches stochastiques telles que l'inférence bayésienne [8].

L'approche que l'on propose ici repose sur un couplage entre une approche stochastique, le filtre de Kalman [9], et une approche déterministe, l'erreur en relation de comportement modifiée (ERCm) [7]. D'une part, le filtre de Kalman est une méthode d'assimilation de données permettant une prédiction de l'état du système à partir d'observations réduites. D'autre part, l'ERCm est une méthode d'identification et de recalage de modèle basée sur une fonctionnelle énergétique construite à partir de propriétés de dualité et de convexité. Cette dernière méthode est connue pour être particulièrement robuste, permettant l'identification de paramètres en présence de données fortement corrompues [10]. Son couplage avec le filtrage de Kalman permet donc de rendre la méthode d'inversion plus aisée, tout en conservant la robustesse. Enfin, afin de mettre en œuvre cette approche de couplage en temps réel, nous proposons d'associer à l'ERCm une réduction de modèle par *Proper Generalized Decomposition* [5, 4].

L'approche proposée est appliquée sur différents problèmes dans le cadre de la thermique instationnaire : identification de l'évolution temporelle de conditions aux limites, localisation de sources de chaleur, identification de paramètres matériaux, ...

## 2 Méthodologie

### 2.1 Assimilation de données et identification par filtrage de Kalman

Le filtre de Kalman [9] est une méthode d'assimilation de données issue de l'inférence bayésienne. Il repose sur la définition d'un système dynamique (1) dans un cadre probabiliste :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathcal{M}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{f}^{(k)} + \mathbf{e}_M \\ \mathbf{s}^{(k)} = \mathcal{H}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{e}_S \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système à l'instant  $t^{(k)}$ ,  $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est l'opérateur de modèle,  $\mathbf{f}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des chargements extérieurs,  $\mathbf{e}_M \in \mathbb{R}^n$  est l'erreur de modèle assimilée à un bruit blanc gaussien,  $\mathbf{s}^{(k)} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des observations, l'opérateur  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est l'opérateur d'observation et  $\mathbf{e}_S \in \mathbb{R}^m$  est l'erreur sur les observations, i.e. l'erreur de mesure, elle aussi considérée comme un bruit blanc gaussien.

Le filtre de Kalman repose sur la reformulation suivante du théorème de Bayes :

$$\pi(\mathbf{u}^{(k)} | \mathbf{s}^{(0:k)}) = \frac{\pi(\mathbf{s}^{(k)} | \mathbf{u}^{(k)}) \pi(\mathbf{u}^{(k)} | \mathbf{s}^{(0:k-1)})}{\pi(\mathbf{s}^{(k)} | \mathbf{s}^{(0:k-1)})}$$

Ainsi, la densité de probabilité *a posteriori*  $\pi(\mathbf{u}^{(k)} | \mathbf{s}^{(0:k)})$  s'exprime à partir de la densité de probabilité *a priori*  $\pi(\mathbf{u}^{(k)} | \mathbf{s}^{(0:k-1)})$  et de la densité de probabilité de vraisemblance  $\pi(\mathbf{s}^{(k)} | \mathbf{u}^{(k)})$ . L'idée du filtre de Kalman est alors de chercher l'état du système  $\mathbf{u}^{(k)}$  comme étant celui qui va maximiser la densité de probabilité *a posteriori* tout en utilisant le système dynamique (1), cela dans le cas de densités de probabilité gaussiennes. Le filtre de Kalman peut alors se résumer aux deux étapes suivantes :

**Prédiction :** on réalise une estimation *a priori*, notée  $\mathbf{u}^{(k+\frac{1}{2})}$  de l'état du système ;

**Correction :** à partir des observations  $\mathbf{s}^{(k)}$  et de l'estimation *a priori* on détermine  $\mathbf{u}_a^{(k+1)}$  la meilleure estimation *a posteriori* de l'état du système.

Afin de résoudre un problème inverse à l'aide du filtre de Kalman il est nécessaire dans un premier temps d'introduire le vecteur des paramètres du modèle  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$  [3, 1]. Sans connaissance *a priori* sur l'évolution temporelle des paramètres on fait une hypothèse de stationnarité de ces derniers, associée à une perturbation par une erreur sur les paramètres  $\mathbf{e}_P$  qui est un bruit blanc gaussien :

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \simeq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \mathbf{e}_P$$

On définit alors un vecteur d'état étendu,  $\bar{\mathbf{u}}^{(k)} = [\mathbf{u}^{(k)} \quad \mathbf{p}^{(k)}]^T$  et l'on redéfinit alors le système dynamique (1) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \bar{\mathcal{M}}^{(k)} \bar{\mathbf{u}}^{(k)} + \bar{\mathbf{f}}^{(k)} + \bar{\mathbf{e}}_M \\ \mathbf{s}^{(k)} = \bar{\mathcal{H}}^{(k)} \bar{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{e}_S \end{cases} \quad (2)$$

Pour résoudre le problème d'identification il faut alors appliquer un filtre de Kalman au système dynamique (2). Cependant, étant donné que l'on résout un problème inverse, il est nécessaire d'utiliser une version non-linéaire du filtre de Kalman ; le choix retenu ici est d'utiliser la version *Unscented Kalman Filter (UKF)*. L'inconvénient majeur de cette approche "classique" provient de son coût. En effet, une analyse de complexité montre que le coût du filtre de Kalman est en  $o((n+n_p)^3)$  rendant ainsi toute application à des systèmes de grande dimension très coûteuse numériquement. Un autre inconvénient majeur est le manque de robustesse vis-à-vis de données expérimentales corrompues, cadre assez courant en Mécanique.

### 2.2 Couplage entre filtre de Kalman et ERCm

L'ERCm est une méthode déterministe, basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique, permettant la résolution des problèmes inverses [7, 10]. Elle génère une régularisation automatique, et

s'avère être très robuste vis-à-vis des bruits de mesure. Dans le cadre de la thermique instationnaire, la fonctionnelle se définit de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_m^2(u, \mathbf{q}; \mathbf{p}, s) = \frac{1}{2} \int_{I_t} \int_{\Omega} (\mathbf{q} - \mathcal{K} \nabla u) \mathcal{K}^{-1} (\mathbf{q} - \mathcal{K} \nabla u) d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2} \frac{r}{1-r} \int_{I_t} \|\Pi u - s\|^2 dt$$

où  $u$  est le champ de température,  $\mathbf{q}$  le flux thermique et  $\mathcal{K}$  l'opérateur de conductivité thermique.  $(u, \mathbf{q}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}$  avec les espaces d'admissibilité définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left\{ u \in H^1(\Omega) \otimes L^2(I_t) \mid u = u^d \forall (x, t) \in \partial\Omega_u \times I_t, u = u^0 \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \{0\} \right\} \\ \mathcal{S} &= \left\{ \mathbf{q} \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{q} = \mathbf{q}^d \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_q \times I_t, \rho c \dot{u} + \operatorname{div} \mathbf{q} = f \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times I_t \right\} \end{aligned}$$

La solution au problème d'identification se formule alors sous la forme d'un problème d'optimisation :

$$\mathbf{p}_{sol} = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}} \min_{(u, \mathbf{q}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}} \mathcal{E}_m^2(u, \mathbf{q}; \xi, s) \quad (3)$$

En pratique la résolution de la double minimisation (3) se fait à l'aide d'un algorithme de type point fixe, en réalisant une minimisation alternée :

1. Minimisation  $M1$  sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{S}$  :  $(u_{ad}, \mathbf{q}_{ad}) = \operatorname{argmin}_{(u, \mathbf{q}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}(\mathbf{q})} \mathcal{E}_m^2(u, \mathbf{q}; \mathbf{p}, \mathbf{s})$
2. Minimisation  $M2$  sur  $\mathcal{P}$  :  $\mathbf{p} = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}} \mathcal{E}_m^2(u_{ad}, \mathbf{q}_{ad}; \xi, \mathbf{s})$

L'étape la plus coûteuse numériquement est la première minimisation, c'est-à-dire le calcul des champs admissibles. En effet celle-ci nécessite la résolution d'un système couplé avec conditions initiales et finales. Afin de résoudre ce système couplé plusieurs approches globales en temps ou incrémentales sont possibles [2].

L'approche que l'on propose ici est d'introduire le concept d'ERCm, plus précisément le calcul des champs admissibles, dans le système dynamique (1). On aboutit donc à un nouveau système dynamique qui s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \mathbf{e}_p \\ \mathbf{s}^{(k)} = \mathcal{H}_m(\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k-1:k)}) + \mathbf{e}_s \end{cases} \quad (4)$$

où l'opérateur  $\mathcal{H}_m : \mathbb{R}^{n_p} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{H}_m(\mathbf{p}, \mathbf{s}) := \mathcal{H} \circ \operatorname{mCRE}_1(\mathbf{p}, \mathbf{s})$$

l'application  $\operatorname{mCRE}_1(\mathbf{p}, \mathbf{s})$  retournant le champ  $u_{ad}$  issu de la minimisation  $M1$ . L'avantage de cette reformulation du système dynamique est de trois sortes :

1. L'application du filtre de Kalman au système dynamique reformulé (4) permet de réduire considérablement le coût de calcul qui passe de  $O((n + n_p)^3)$  à  $O(n_p^3)$  ;
2. Le processus d'assimilation de données devient robuste par rapport aux bruits de mesure et aux données corrompues ;
3. Le calcul de l'état du système étant maintenant réalisé par le biais de l'ERCm, il est possible d'y adjoindre une technique de réduction de modèle par *Proper Generalized Decomposition (PGD)*. Une telle application de la PGD dans le cadre de l'élasticité linéaire a été réalisée dans [4].

### 2.3 Apports d'un modèle réduit PGD

Afin de mettre en œuvre la démarche proposée en temps réel, nous introduisons une méthode de réduction de modèle permettant de calculer dans une phase *offline* l'état du système sous une forme paramétrique ; nous utilisons pour cela la *Proper Generalized Decomposition* [5], l'idée de base étant de rechercher cet état sous une forme à variables séparées. L'intérêt dans la démarche d'identification proposée ici provient du fait que l'on peut ainsi pré-calculer les champs admissibles au sens de l'erreur en relation de comportement modifiée tout en y incluant les paramètres que l'on cherche à identifier. Ainsi

lors de la phase *online* il ne restera plus qu'à évaluer l'approximation PGD pour un jeu de paramètres donné. Le point délicat provient du fait que les champs admissibles sont fonctions des observations, il est donc nécessaire d'inclure les observations dans l'approximation PGD. De la même manière, étant donné l'aspect incrémental de la méthode, le champs  $u$  est défini par intervalle  $I_t^{(k)} = [t^{(k-1)}, t^{(k)}]$  et il est nécessaire d'inclure dans la PGD l'état initial  $u(t^{(k-1)})$  comme paramètre. Finalement, nous construisons une solution PGD sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}_M = \sum_{i=1}^M \mathbf{w}_i \otimes \lambda_i \otimes \phi_i \otimes \eta_i \otimes \beta_i$$

où  $\mathbf{w}_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\eta_i$ , et  $\beta_i$  désignent respectivement les modes discrets en espace, temps, paramètres à recalibrer, observations et conditions initiales.

### 3 Illustration

La méthode est appliquée à divers problèmes dans le cadre de la thermique instationnaire et les résultats sont comparés à ceux obtenus par l'approche "classique" basée sur le filtre de Kalman (voir Figure 1 pour le recalage d'une condition limite évolutive en flux). Nous avons alors pu constater un gain de temps significatif sans aucune perte sur la qualité de l'estimation ainsi réalisée.

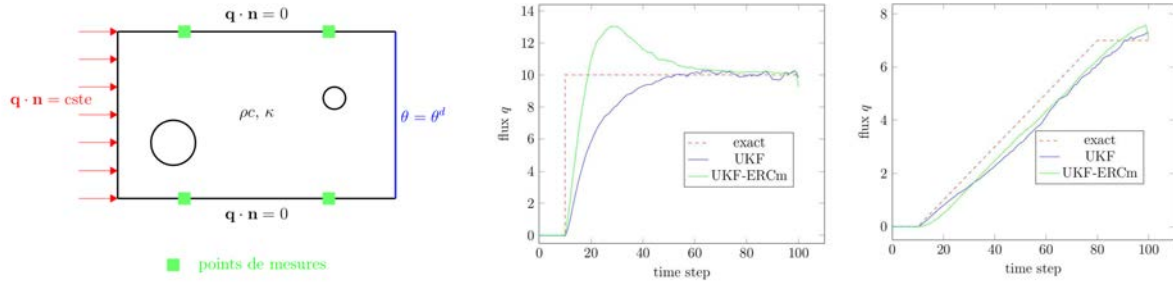


FIGURE 1 – Recalage du flux entrant (bord de gauche) par filtre de Kalman classique (UKF) ou couplé avec l'ERCm (UKF-ERCm) pour diverses évolutions temporelles

### Références

- [1] A. Alarcon, C. Bodel, M. Bonnet. *A coupled unscented Kalman filter and modified error in constitutive relation technique for structural dynamics identification*, Proc. EUROODYN, 2163-2168, 2011.
- [2] O. Allix, P. Feissel, H. Nguyen. *Identification strategy in the presence of corrupted measurements*, Engineering Computations, 487-504, 2005.
- [3] G. Bolzon, R. Fedele, G. Maier. *Parameter identification of a cohesive crack model by Kalman filter*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2847-2871, 2002.
- [4] R. Bouclier, F. Louf, L. Chamoin. *Real-time validation of mechanical models coupling PGD and constitutive relation error*, Computational Mechanics, 861-883, 2013.
- [5] F. Chinesta, R. Keunings, A. Leygue. *The Proper Generalized Decomposition for advanced Numerical Simulations*, Springer, 2014.
- [6] F. Dairema. *Dynamic Data Driven Applications Systems : A new paradigm for applications simulations and measurements*, Computational Science-ICCS 2004 : 4th International Conference, Springer, 662-669, 2004.
- [7] A. Deraemaeker, P. Ladevèze. *A constitutive relation error model-updating method in structural dynamics with uncertain measurements*, Inverse Problems in Engineering Mechanics, 273-283, 2003.
- [8] J. Kaipio, E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer, 2006.
- [9] R. Kalman. *A linear new approach to linear filtering and prediction problems*, Journal of Basic Engineering, 35-45, 1960.
- [10] H. Nguyen, O. Allix, P. Feissel. *A robust identification strategy for rate-dependent models in dynamics*, Inverse Problems, 2008.