

# Identification numérique d'un modèle de comportement thermique hors-équilibre

Thomas Heuzé, Laurent Stainier

► **To cite this version:**

Thomas Heuzé, Laurent Stainier. Identification numérique d'un modèle de comportement thermique hors-équilibre. 12e Colloque national en calcul des structures, May 2015, Giens, France. 12e Colloque national en calcul des structures, 2015. <hal-01516637>

**HAL Id: hal-01516637**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01516637>**

Submitted on 2 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Identification numérique d'un modèle de comportement thermique hors-équilibre

T. Heuzé<sup>1</sup>, L. Stainier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GeM, Ecole Centrale Nantes, {thomas.heuze, laurent.stainier}@ec-nantes.fr

**Résumé** — On présente dans ce travail une thermique de Fourier hors équilibre, qui permet de rendre compte d'un état local loin de l'état d'équilibre thermique. Un modèle de comportement thermique hors-équilibre est proposé et identifié sur des résultats de simulations numériques thermiques transitoires menées sur une cellule élémentaire. Ce type d'approche doit permettre de décrire le comportement de structures soumises à des sollicitations extrêmes (dynamique, chauffage rapide), pour lesquelles les approches classiques peuvent être mises en défaut.

**Mots clés** — thermique hors équilibre, homogénéisation thermique transitoire.

## 1 Introduction

La thermique classique de Fourier est généralement décrite dans le cadre de la thermodynamique classique des processus irréversibles [1], c'est-à-dire qu'un système thermostatique est associé à chaque point matériel. L'hypothèse retenue est que le temps caractéristique  $\tau_M$  de l'évolution du système macroscopique considéré est suffisamment grand devant ceux associés aux phénomènes se produisant à l'intérieur d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) pour pouvoir décrire son comportement thermique par un système à l'équilibre. Un découplage net est supposé entre les temps caractéristiques associés aux phénomènes macroscopique et microscopique. Pour les systèmes s'écartant de cet équilibre local, il a été introduit le modèle de l'état local accompagnant [2] qui associe un système thermostatique fictif à un point matériel, *accompagnant* l'état local hors équilibre. Cet état d'équilibre fictif est défini en isolant ce système local dans son état actuel, qui évolue alors vers celui-ci de façon thermoélastique dynamique [3]. Ce modèle permet de continuer à travailler avec une température et une entropie locales définies à l'équilibre. Pour les systèmes loin de cet équilibre, il est néanmoins clair que cet état d'équilibre accompagnant ne coïncide plus avec l'état réel du système local. Il est alors supposé qu'en ajoutant un nombre suffisant de variables internes au modèle, il est toujours possible de conserver cette définition des température et entropie locales accompagnantes. Les effets transitoires à l'échelle locale sont en fait "compensés" par l'ajout de variables internes pilotant des phénomènes dissipatifs dont les temps caractéristiques sont du même ordre de grandeur que  $\tau_M$ . En conséquence, la définition des température et entropie locales accompagnantes n'est pas unique et dépend du nombre de variables internes retenues dans le modèle.

Bien que l'efficacité et la flexibilité de la méthode de l'état local accompagnant sont bien avérées depuis longtemps pour de très nombreuses applications, elle peut néanmoins être mise en défaut dans certains cas où la structure considérée subit des chargements extrêmes, au sens où ceux-ci conduisent à un état local qui s'écarte beaucoup de l'équilibre ; le choix des variables internes additionnelles n'étant pas toujours évident. À cet effet, des travaux analytiques portant sur l'homogénéisation en conduction thermique transitoire [4] ou thermoélastique dynamique [5, 6] et des approches purement numériques [7] ont été proposés par différents auteurs. Dans ce travail, on propose un modèle rhéologique thermique pilotant la réponse transitoire thermique locale, qui est identifié en utilisant des résultats de simulations numériques thermiques menées sur un VER constitué d'un matériau modèle.

## 2 Thermique de Fourier hors-équilibre

La thermique classique de Fourier considère un état local virtuel à l'équilibre accompagnant l'état hors équilibre, défini par un potentiel :

$$T^{(e)} = \frac{\partial e}{\partial S^{(e)}} \quad (1)$$

où  $e$  est l'énergie interne volumique et  $T^{(e)}$  et  $S^{(e)}$  sont les température et entropie définies à l'équilibre respectivement,  $T \equiv T^{(e)}$ ,  $S \equiv S^{(e)}$ . La conduction thermique de Fourier est dissipative et conduit à l'inégalité :

$$-\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (2)$$

où  $\mathbf{q}$  et  $\nabla T$  sont la densité de flux de chaleur et le gradient thermique respectivement. Une thermique de Fourier hors-équilibre nécessite de définir la loi d'état thermique par une fonction  $f(T, S, t) = 0$ , réponse d'un modèle rhéologique thermique. On propose dans ce travail d'adopter un modèle de type Kelvin-Voigt pour la réponse thermique (figure 1) :  $T = T^{(e)} + T^{(d)}$ , où  $T^{(d)}$  réfère à une température hors-équilibre, dissipative (indice  $(d)$ ). La dissipation thermique s'écrit alors :

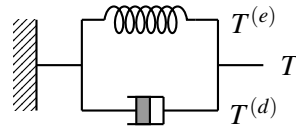


FIGURE 1 – Modèle de Kelvin-Voigt thermique.

$$T^{(d)} \dot{S} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (3)$$

Il est à présent nécessaire de définir des lois d'évolution pour la température hors équilibre  $T^{(d)}$  et  $\mathbf{G} = -\nabla T/T$ . On suppose alors l'existence d'un potentiel de dissipation  $\Delta(\dot{S}, \mathbf{q})$  convexe de ses arguments et contenant l'origine, tel que :

$$T^{(d)} = \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{S}}; \quad \mathbf{G} = \frac{\partial \Delta}{\partial \mathbf{q}} \quad (4)$$

En supposant un découplage tel que  $\Delta(\dot{S}, \mathbf{q}) = \phi(\dot{S}) + \chi(\mathbf{q})$ , il vient la loi de comportement thermique :

$$T(S, \dot{S}) = \frac{\partial e}{\partial S} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{S}} \quad (5)$$

## 3 Identification de la loi de comportement thermique hors-équilibre

### 3.1 État d'équilibre du modèle

On se place ici dans le cadre de la thermique linéarisée, valide pour de faibles variations de température. Considérons un VER, à tout point de coordonnées  $\mathbf{y}$  à l'échelle microscopique on peut associer l'entropie linéarisée suivante :

$$s(\mathbf{y}, t) = \rho C \left( \frac{T(\mathbf{y}, t)}{T_{\text{ref}}} - T_{\text{ref}} \right) \quad (6)$$

de sorte que celle-ci s'annule à la température de référence  $T_{\text{ref}}$ . L'entropie étant une grandeur extensive, elle est définie à l'échelle macroscopique comme une moyenne :

$$S(\mathbf{x}, t) = \langle s(\mathbf{y}, t) \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y s(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \quad (7)$$

où  $Y$  dénote une cellule élémentaire et  $|Y|$  son volume. L'entropie macroscopique  $S(\mathbf{x}, t)$  tend vers sa valeur à l'équilibre  $S^{(e)}$  au bout d'un temps suffisamment long, soit :

$$S^{(e)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} S(\mathbf{x}, t) = \langle \rho C \rangle_Y \left( \frac{T^{(e)}}{T_{\text{ref}}} - T_{\text{ref}} \right) \quad (8)$$

où  $T^{(e)}$  est la température à l'équilibre. Ceci définit donc l'état asymptotique du comportement thermique transitoire local, c'est-à-dire la loi de comportement du ressort du modèle de Kelvin-Voigt. Il reste alors à identifier une forme pour le potentiel  $\phi(\dot{S})$ , définissant une loi d'évolution pour la température hors-équilibre. On se propose de déterminer cette forme à partir de résultats de simulations numériques thermiques transitoires menées sur un VER.

### 3.2 Identification d'une loi d'évolution pour la température hors-équilibre

On considère un VER cylindrique de section carrée de côté  $a$  ayant une inclusion cylindrique à base circulaire de rayon  $R$ , centrée dans la matrice. Le système est décrit dans le plan de la section. Ce VER est soumis à un échelon de température  $\bar{T}$  sur son bord  $\partial Y$ . Le matériau choisi est un composite matrice aluminium-fibre SiC Tyranno SA, ses propriétés et les données numériques du problème (géométrie et chargement) sont résumées dans le tableau 1. La fraction volumique  $f$  d'inclusion est paramétrée, et le

Paramètres matériaux	Matrice	Inclusion	Géométrie	Chargement
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	2700	3100	$a = 40\mu\text{m}$	$T_{\text{ref}} = 20^\circ\text{C}$
$C$ (J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )	897	669	$f \in [0.1, 0.7]$	$\bar{T} = 50^\circ\text{C}$
$\lambda$ (W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )	220	65		

TABLE 1 – Données du problème thermique.

temps d'étude (pour arriver quasiment à l'équilibre) est de 5 microsecondes. À partir des résultats des simulations numériques thermiques transitoires, l'évolution de l'entropie moyennée (7) sur le VER est calculée. La figure 2 montre son évolution pour les différentes valeurs de  $f$ . La température hors-équilibre  $T^{(d)}$  est alors calculée selon le modèle de Kelvin-Voigt postulé :

$$T^{(d)} = \bar{T} - T_{\text{ref}} \left( \frac{S}{\langle \rho C \rangle_Y} + 1 \right) \quad (9)$$

et est tracée sur la figure 3. Il apparaît que l'expression suivante :

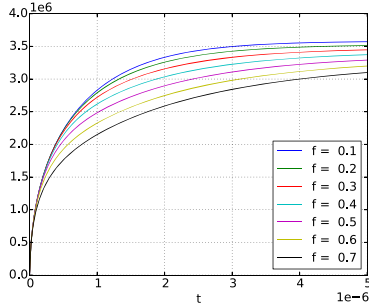


FIGURE 2 – Entropie macroscopique calculée numériquement pour différentes valeurs de  $f$ .

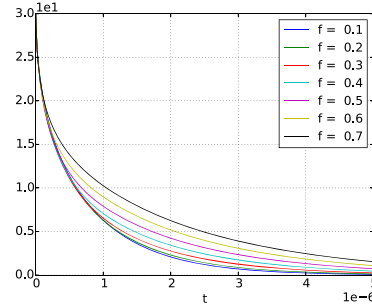


FIGURE 3 – Température hors-équilibre calculée avec (9) pour différentes valeurs de  $f$ .

$$T^{(d)} = \frac{B\dot{S}}{A - \dot{S}} \quad (10)$$

où  $A$  et  $B$  sont des fonctions de la fraction volumique  $f$ , permet d'identifier correctement les évolutions obtenues numériquement. En introduisant la loi d'évolution (10) dans (9), il vient l'entropie  $S$  réponse du modèle de Kelvin-Voigt thermique à un échelon de température, solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{S} = \frac{A \left( \bar{T} - T_{\text{ref}} \left( \frac{S}{\langle \rho C \rangle_Y} + 1 \right) \right)}{B + \bar{T} - T_{\text{ref}} \left( \frac{S}{\langle \rho C \rangle_Y} + 1 \right)} \quad (11)$$

dont la solution s'écrit, tenant compte d'une condition initiale nulle ( $S(t = 0) = 0$ ), telle que :

$$S + \langle \rho C \rangle_Y \frac{B}{T_{\text{ref}}} \ln \left| \frac{\bar{T} - T_{\text{ref}}}{\bar{T} - T_{\text{ref}} \left( \frac{S}{\langle \rho C \rangle_Y} + 1 \right)} \right| = At \quad (12)$$

Les figures 4 et 5 montrent respectivement le calibrage de l'expression (10) sur les données numériques et la comparaison entre la réponse du modèle de Kelvin-Voigt et l'entropie moyenne calculée à partir des simulations numériques pour une fraction volumique de fibre  $f = 0.4$ . On observe un bon accord entre les deux courbes.

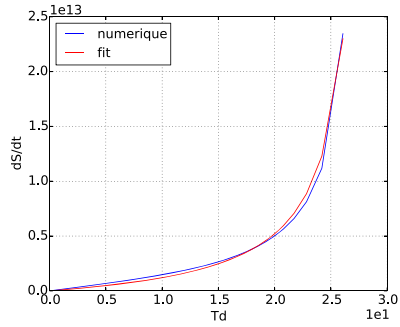


FIGURE 4 – Fit de la loi d'évolution de la température hors équilibre  $T^{(d)}$  pour  $f = 0.4$ .

#### CONCLUSION

Dans ce travail, on a présenté une thermique de Fourier hors-équilibre, c'est-à-dire avec une loi d'état dépendant explicitement du temps. Le modèle rhéologique de Kelvin-Voigt a été choisi, conduisant à la définition d'une température hors-équilibre. La loi d'évolution de cette dernière a été identifiée sur des résultats obtenus à partir de simulations numériques menées sur une cellule élémentaire. On vérifie bien *a posteriori* que la réponse du modèle de Kelvin-Voigt à un échelon de température permet de rendre correctement compte de l'évolution temporelle de l'entropie d'une cellule élémentaire.

#### Références

- [1] F. Germain, Q.S. Nguyen, P. Suquet. *Continuum Thermodynamics*. ASME Journal of Applied Mechanics, 50, 1010-1020, 1983.
- [2] J. Rätzke, J. Kestin. *Irreversible Processes and Physical Interpretation of Rational Thermodynamics*, Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, 4, 229-238, 1979.
- [3] G. Francfort, Q.S. Nguyen, P. Suquet. *Thermodynamics and the Homogenized Thermochemical Behavior*, CRAS Serie II 296, 1007-1010, 1983.
- [4] A. Murat. *Homogenization for Transient Heat Conduction*, Journal of Applied Mechanics, 46, 945-946, 1979.
- [5] G. Francfort. *Homogenization and rapid Oscillations in Linear Thermoelasticity*, CRAS Serie I 295, 367-370, 1982.
- [6] J.L. Auriault. *Wave propagation and transient heat transfer in thermoelastic composites*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 55, 5972-5978, 2012.
- [7] F. Lantson, K. Ranaivosoa, F. Su. *Variationally consistent computational homogenization of transient heat flow*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 81, 1659-1686, 2010.