

Une représentation séparée multi-échelle pour simuler le comportement mécanique des structures périodiques

Etienne Pruliere, Sondes Metoui, Amine Ammar, Frédéric Dau, Ivan Iordanoff

▶ **To cite this version:**

Etienne Pruliere, Sondes Metoui, Amine Ammar, Frédéric Dau, Ivan Iordanoff. Une représentation séparée multi-échelle pour simuler le comportement mécanique des structures périodiques. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01516635

HAL Id: hal-01516635
https://hal.science/hal-01516635

Submitted on 2 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

CSMA 2015
12 Colloque National en Calcul des Structures
18-22 Mai 2015, Presqu'île de Giens (Var)

Une représentation séparée multi-échelle pour simuler le comportement mécanique des structures périodiques

E. Prulière[1], S. Metoui[1,2], A. Ammar[2], F. Dau[1], I. Iordanoff[1]

[1] *Arts et Métiers ParisTech, Centre de Bordeaux, I2M, département DuMAS*
[2] *Arts et Métiers ParisTech, Centre d'Angers, LAMPA*

Résumé — La simulation des structures périodiques contenant un grand nombre de cellules élémentaires mais pas suffisamment pour pouvoir utiliser des méthodes d'homogénéisation pose des difficultés. Nous proposons ici une technique de décomposition de domaines basée sur la PGD. L'idée est de séparée les échelles en définissant un maillage pour les cellules élémentaires et un maillage macroscopique décrivant l'agencement global les cellules. La PGD est utilisée pour déterminer la solution. Cette stratégie est efficace et permet de traiter un très grand nombre de degrés de libertés.
Mots clés — Réduction de modèle, PGD, Calcul multi-échelle, Matériaux composites

1. Introduction

1.1. Méthodes multi-échelles

La méthode la plus classique pour traiter les problèmes multi-échelles est de passer par des techniques d'homogénéisation numériques. Ces techniques nécessitent de définir un volume élémentaire représentatif (VER). Le comportement « moyen» du VER est alors estimé et peut être utilisé dans des calculs macroscopiques. Les techniques d'homogénéisation ont été étendues pour des comportements non linéaires dans le cadre de la méthode des éléments finis au carré [2]. Bien que les méthodes d'homogénéisation soient intéressantes, elles présentent un certain nombre de limites. La première limite est qu'il faut définir des conditions aux limites sur la microstructure. Suivant le choix de ces conditions aux limites, les résultats ne seront pas exactement les mêmes. Une autre limite est que la théorie de l'homogénéisation suppose que les deux échelles (micro et macro) sont bien séparées. Par exemple, une fissure qui apparaît à l'échelle microscopique pour se propager et devenir une fissure macroscopique peut difficilement être représentée par les méthodes d'homogénéisation.

D'autres approches sont basées sur les techniques de décomposition de domaine. L'idée générale est de séparer le domaine d'étude en plusieurs sous-domaines puis d'ajouter des conditions d'interface qui sont modifiées itérativement jusqu'à atteindre la convergence globale. Ces techniques peuvent être utilisées pour des problèmes multi-échelles ou simplement pour réduire de coût des calculs éléments finis classiques. Mais les coûts de calcul restent relativement importants. Pour avoir des calculs plus efficaces, il est nécessaire d'introduire des hypothèses supplémentaires.

Dans cet article, nous nous limitons aux matériaux dont la microstructure peut être considérée comme périodique. C'est généralement le cas des matériaux composites. Une représentation séparée de la solution est alors calculée en utilisant une décomposition propre généralisée (PGD : Proper Generalized Decomposition).

1.2. Description sommaire de la PGD

La PGD a été développée initialement par Ladeveze pour des problèmes espace/temps dans le contexte de la méthode LATIN [3]. Ammar et al ont généralisé cette méthode pour des problèmes multi dimensionnels [1]**.** La PGD est basée sur une représentation séparée de la solution qui permet de réduire de façon potentiellement importante la taille des problèmes paramétriques et multi dimensionnels.

La représentation séparée d'une fonction u quelconque (déplacement, température, vitesse, …) qui dépend d'un nombre D de coordonnées et/ou paramètres $x_1, \dots, x_D$ s'écrit :

$$u(x_1, \dots, x_D) \approx \sum_{i=1}^{N} F_i^1(x_1) \times \dots \times F_i^D(x_D)$$

Toutes les fonctions F_i^j sont inconnues a priori et donc à déterminer.

Cette représentation de la solution est injectée dans la forme faible de l'équation à résoudre. Cette solution est déterminée itérativement avec un algorithme glouton qui consiste à enrichir plusieurs fois l'approximation existante. L'étape d'enrichissement consiste à déterminer un produit de fonctions ce qui est un problème non linéaire. Une méthode des directions alternées est ainsi utilisée pour linéariser les équations à résoudre.

2. Description de la démarche

La démarche proposée nécessite de connaître au préalable une cellule périodique de la structure considérée. Un exemple de cellule périodique pour un composite tissé (taffetas) à deux plis est représenté dans figure 1.

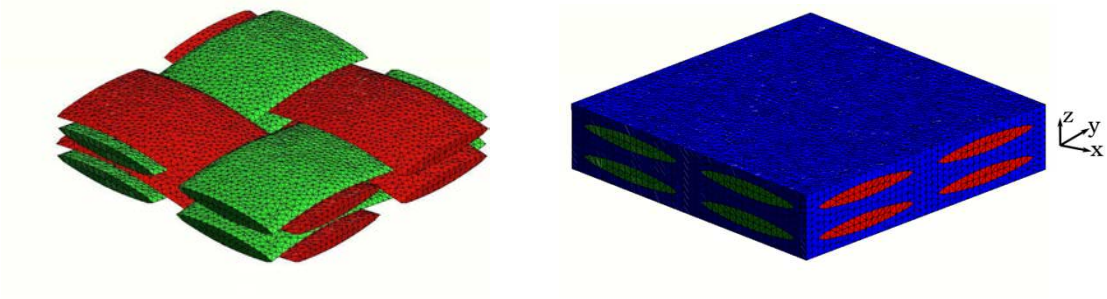


Figure 1 – Cellule périodique pour un matériau composite tissé à deux plis dans la même direction : représentation des fibres (gauche) et représentation de la matrice (droite).

Le maillage de la cellule doit être périodique ce qui peut nécessiter des traitements particuliers pour les bords du maillage.

La position dans la cellule périodique est définie par des coordonnées locales $\underline{x} = (x, y, z)$. La structure globale étudiée est un assemblage de plusieurs cellules. Un identifiant est associée à chacune de ces cellules. On définit alors une variable k qui décrit l'ensemble des identifiants des cellules.

Une représentation séparée du déplacement $\underline{u} = (u_x, u_y, u_z)$ peut alors s'écrire :

$$\underline{u}(\underline{x}, k) = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i(\underline{x}) G_i(k)$$

Ici les fonctions $\underline{F_i}$ sont des fonctions vectorielles c'est-à-dire qu'elles comportent trois composantes relatives à u_x, u_y et u_z. Elles sont définies uniquement sur la cellule périodique. Les fonctions $\underline{G_i}$ sont des fonctions scalaires définies sur l'ensemble des cellules périodiques. Les fonctions $\underline{F_i}$ contiennent les informations liées au comportement mécanique de la microstructure et les fonctions $\underline{G_i}$ permettent de faire le couplage multi-échelle.

Pour utiliser la méthode PGD, il faut pouvoir construire les opérateurs sous forme séparée. Pour le faire, on effectue un assemblage des opérateurs tel qu'il est fait dans la méthode des éléments finis. On distingue deux types d'éléments :

- Les éléments internes à la cellule. Ce sont les éléments pour lesquels l'ensemble des nœuds appartient à la même cellule microscopique. Pour ces éléments, on construit un opérateur éléments finis classiques pour le maillage local. L'opérateur correspondant au maillage global (décrit par k) est alors une simple matrice identité. Cet opérateur traduit le fait que toutes les cellules contiennent les mêmes éléments internes.
- Les éléments d'interfaces. Ce sont ces éléments qui permettent le couplage entre les différents sous domaines périodiques. Il faut alors construire les opérateurs qui vont faire le couplage entre les cellules et leurs cellules voisines.

Il reste finalement à appliquer des conditions aux limites. Cela peut se faire simplement en utilisant une méthode de pénalisation qui s'avère efficace en pratique.

3. Résultats

On considère un problème 2D en déformations planes. Il s'agit d'une plaque encastrée à ses deux extrémités et chargée au centre. Elle est constituée d'un assemblage de cellules périodiques (voir figure 2).

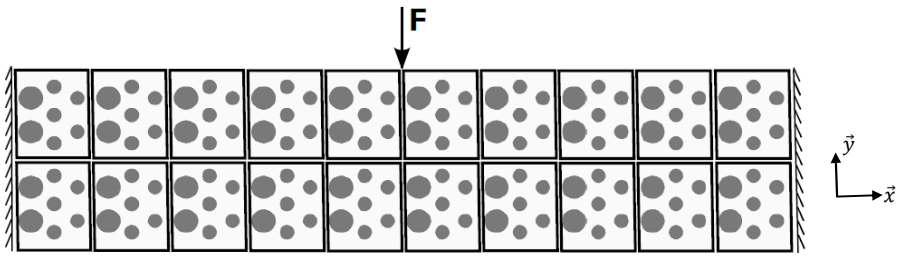


Figure 2 – Géométrie et conditions aux limites du problème considéré

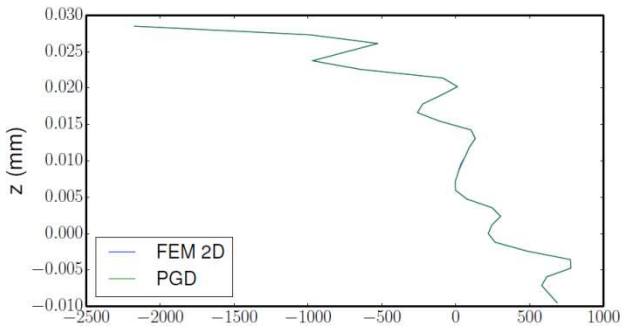


Figure 3 – Profil des contraintes σ_{xx} dans l'épaisseur au centre de la plaque

Le calcul est effectué avec la démarche proposée ci-dessus ainsi qu'avec la méthode des éléments finis en 2D. Lorsque la PGD a convergé, les deux méthodes donnent des résultats rigoureusement identiques. Par exemple, la figure 3 montre le profil des contraintes normales σ_{xx} au centre de la plaque en fonction de la position dans l'épaisseur (suivant z) et pour les deux méthodes.

Un exemple de résultat pour la cellule de la figure 1 est présenté dans la figure 4 . Il s'agit des contraintes normales σ_{xx} dans une plaque composites simplement appuyée sur ses deux cotés ($x = 0$ et $x = x_{max}$) et chargée en son centre. Seuls les torons sont représentés pour voir les contraintes reprises par les fibres.

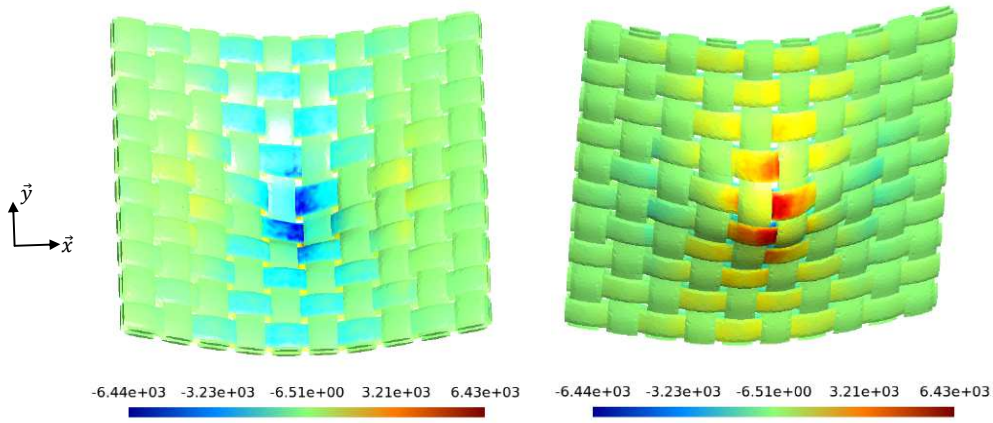


Figure 4 – Contraintes σ_{xx} dans une plaque composite en flexion (vue de dessus et de dessous).

4. Conclusion

Pour un faible nombre de cellules périodiques (inférieur à 20 en 2D), les deux méthodes donnent des temps de calcul assez proches. Par contre, lorsque le nombre de cellules augmente, la démarche proposée devient beaucoup plus performante. Par exemple, pour le cas présenté figure 2 avec 200 cellules, le temps de calcul est divisé par 10 par rapport aux éléments finis. Et cet écart augmente exponentiellement lorsque le nombre de cellules augmente. Il est ainsi possible de réaliser des calculs multi-échelles en considérant plusieurs dizaines de milliers de cellules périodiques sur un simple ordinateur portable ce qui n'est absolument pas concevable avec la méthode des éléments finis classiques.

Références

[1] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings, A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 139(3):153176, December 2006.

[2] F. Feyel, Multiscale fe2 elastoviscoplastic analysis of composite structures, Computational Materials Science, 16(1-4):344354, 1999.

[3] P. Ladeveze, A. Nouy, On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192(28-30):30613087, July 2003.