Mathématiques en Mésopotamie: étranges ou familières?

Christine Proust

▶ **To cite this version:**

Christine Proust. Mathématiques en Mésopotamie: étranges ou familières?. Laurent Theis. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF 2015, Université d'Alger 10-14 octobre 2015 , EMF, pp.17-39, 2016. hal-01515635

HAL Id: hal-01515635
https://hal.science/hal-01515635

Submitted on 3 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MATHÉMATIQUES EN MÉSOPOTAMIE: ÉTRANGES OU FAMILIÈRES?

Christine PROUST[1]

Article accessible en ligne : http://emf2015.usthb.dz/actes/ACTESEMF2015COMPLET.pdf

Résumé – Les mathématiques de Mésopotamie sont les plus anciennes qui soient parvenues jusqu'à nous. Ces textes, écrits en écriture cunéiforme sur des tablettes d'argile, traitent d'objets mathématiques qui nous sont familiers, tels que des nombres, des unités de mesure, des aires, des volumes, des opérations arithmétiques, des problèmes linéaires et quadratiques, ou encore des algorithmes. Cependant, à y regarder de plus près, ces objets familiers se présentent dans les tablettes d'argile sous des aspects étranges. Au travers de quelques exemples simples, cette présentation montre le décalage, parfois subtil, entre les notions anciennes et modernes de nombre, de multiplication, de division et de démonstration.

Mots-clefs : Mésopotamie, mathématiques cunéiformes, notation sexagésimale positionnelle flottante, écoles de scribes, Nippur

Abstract – The oldest mathematical texts that are come down to us come from Mesopotamia. These texts, written in cuneiform script on clay tablets, exhibit mathematical objects such as numbers, measurement units, areas, volumes, linear and quadratic problems or algorithms, which seem to us very familiar. However, looking at the texts more closely, these familiar objects are featured in the clay tablets in strange ways. Through some simple examples, this presentation shows the shift, sometimes subtle, between ancient and modern notions of numbers, multiplication, division and demonstration.

Keywords: Mesopotamia, cuneiform mathematics, floating sexagesimal place value notation, scribal schools, Nippur

Les mathématiques de Mésopotamie sont les plus anciennes qui soient parvenues jusqu'à nous. Plus de 2000 tablettes d'argile à contenu mathématique, provenant d'Irak, de Syrie et d'Iran, ont été déchiffrées à ce jour. Quand le mathématicien Otto Neugebauer et l'assyriologue François Thureau-Dangin, les premiers déchiffreurs de ces mathématiques très anciennes, les ont fait connaître dans les années 1930, les débuts de l'histoire des mathématiques, qui, dans l'imaginaire de l'époque, commençaient avec Thalès, Pythagore et Euclide, reculaient dans le temps de plus de mille ans, et se déplaçaient dans l'espace de plus de mille kilomètres vers l'est.

Ces pionniers avaient reconnu des objets mathématiques qui nous sont familiers, tels que des nombres, des unités de mesure, des aires, des volumes, des opérations arithmétiques, des problèmes linéaires et quadratiques, ou encore des algorithmes. Cependant, à y regarder de plus près, ces objets familiers se présentent dans les tablettes d'argile sous des aspects étranges. En effet, nous y rencontrons des nombres qui ne sont pas des quantités, des unités de mesure qui sont en même temps des nombres, des multiplications qui ont de multiples visages, des volumes qui se comptent en briques, des démonstrations que nous ne reconnaissons pas, et bien d'autres bizarreries. De plus, l'immense aire géographique du

[1] Je remercie chaleureusement les organisateurs du colloque « Espace Mathématique Francophone 2015 » de m'avoir offert l'occasion de présenter à Alger ces bribes de mathématiques étranges et familières, et les participants de les avoir accueillies avec bienveillance. Cet exposé est en partie basé sur des recherches menées dans le cadre du Projet SAW (dir. K. Chemla, ERC n. 269804, 7e Programme de l'*European Research Council* FP7/2007-2013). Les photos des tablettes dont il est question dans cette présentation sont presque toutes accessibles par la base de données internationale des sources cunéiformes, le *Cuneiform Digital Library Initiative* (cdli, http://cdli.ucla.edu/). Il sera systématiquement précisé le numéro de la tablette dans cette base de données et le lien vers sa fiche descriptive, qui fournit des informations historiques, archéologiques et muséographiques, ainsi que, souvent, des photos, une copie, la translitération et la traduction.

Proche Orient ancien, et le temps très long temps de son histoire, n'ont pas produit un savoir uniforme, mais une constellation de cultures locales. Cette diversité foisonnante contribue à brouiller encore un peu plus nos repères. Et pourtant, nous percevons ces mondes si lointains comme authentiquement mathématiques. Ils touchent notre sensibilité et ils nous semblent finalement très proches. Comment est-ce possible ? Les quelques exemples simples qui suivent montrent le décalage, parfois subtil, entre les notions anciennes et modernes de nombre, de multiplication, de division et de démonstration. Mais avant d'approcher de près ces exemples, jetons un bref regard sur le panorama.

I. MATHEMATIQUES EN MESOPOTAMIE

La Mésopotamie est le nom qui avait été donné par les Grecs à la grande plaine située entre le Tigre et l'Euphrate. La basse vallée de ces fleuves s'étend dans ce qui est aujourd'hui le sud de l'Irak, et une partie de la moyenne et haute vallée occupe le nord de l'Irak. L'ensemble des régions où ont été écrits des textes cunéiformes savants, notamment mathématiques, est plus vaste encore, et inclut l'est de la Syrie, le sud de la Turquie et l'Elam, une région située à l'ouest de l'Iran actuel.

Au début du XXe siècle, les paysages de la plaine mésopotamienne n'avaient guère changé depuis l'antiquité. Les éléments dominants y sont l'eau des grands fleuves, les roseaux, et l'argile, le matériau de base utilisé dans toutes sortes d'activités, en particulier les constructions, comme les fameuses tours à étage, ou « zigurrats » qui dominaient les grands temples. Ce sont les matériaux de base qui furent utilisés par les inventeurs de l'écriture, et par leurs lointains descendants qui écrivirent des textes mathématiques.

Le Proche Orient Ancien, c'est non seulement une aire géographique immense, mais c'est aussi plus de trois mille ans d'histoire, tout au moins si l'on considère que l'histoire commence avec l'écriture. En première approche, très grossière, les historiens distinguent trois grandes périodes : les quatrième et troisième millénaires, le deuxième millénaire, et le premier millénaire avant notre ère. Ce découpage, bien qu'il relève d'une part d'arbitraire, structure profondément le milieu des assyriologues, qui se partagent en spécialistes de ces trois « périodes ». Le dialogue entre ces trois groupes de spécialistes n'est pas toujours facile étant donnée l'énorme quantité de sources à traiter pour chacune d'entre elles, et la grande hétérogénéité des documentations concernées. Les deux grands repères chronologiques qui méritent d'être soulignés dans cette introduction sont la naissance de l'écriture, vers le milieu du quatrième millénaire avant notre ère, et le développement des écoles de scribes dans tout le Proche Orient Ancien, au début du deuxième millénaire avant notre ère. C'est de cette dernière période, appelée paléo-babylonienne (environ 2000-1600 avant notre ère[2]) qu'il est question dans cette conférence.

Les quelque 3500 ans de l'histoire du Proche Orient Ancien sont documentés par une abondance de sources écrites. Plus de 500 000 tablettes d'agile contenant des textes variés ont été trouvées à ce jour. Mais cette documentation est très inégalement répartie : elle est riche pour certains contextes, pauvre ou absente pour d'autres. Par exemple, la fin du 3^{e} millénaire est la plus documentée, avec plus de 100 000 tablettes contenant des documents administratifs. Le début du deuxième millénaire a fourni plus de 50 000 tablettes contenant des textes de toutes sortes, administratifs, économiques, politiques, littéraires, mathématiques, et bien d'autres. En contraste avec ces siècles prolifiques, la fin du 2^{e} millénaire ne nous a livré que peu de sources écrites. Les tablettes les plus tardives, celles des derniers siècles

[2] Dans la suite, toutes les dates sont avant notre ère.

avant notre ère, contiennent principalement des textes d'astronomie, alors que l'astronomie n'est pas documentée avant le premier millénaire. Concernant les mathématiques, les textes les plus anciens datent du milieu du 3e millénaire, et les plus récents de la fin du 1er millénaire, mais la répartition est, là encore, très inégale. L'immense majorité des textes connus datent de la période paléo-babylonienne, celle qui nous intéresse ici. Le diagramme ci-dessous (figure 1) illustre la très grande hétérogénéité des sources mathématiques.

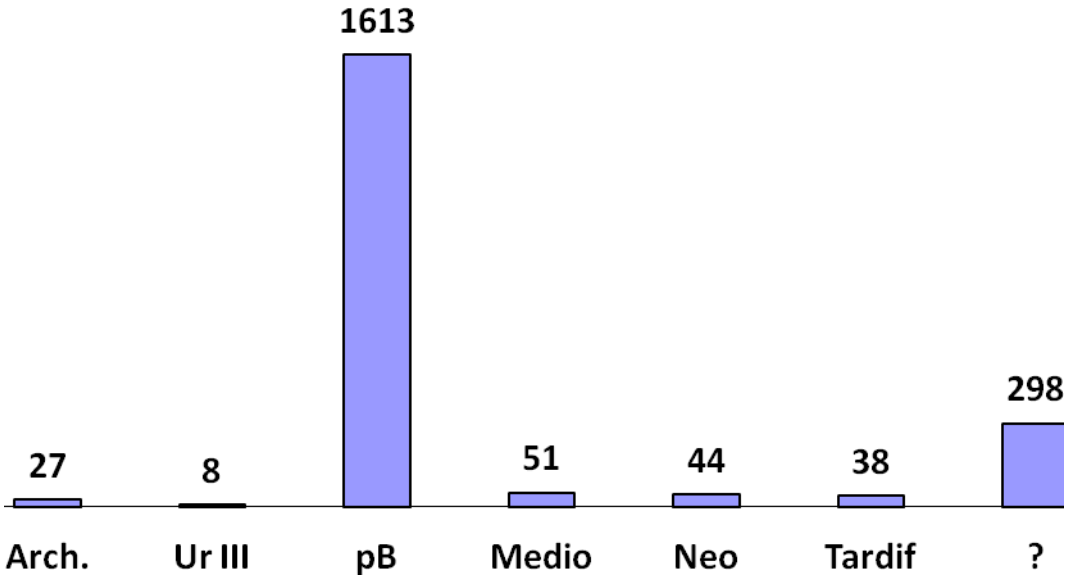


***Figure 1** – Répartition des tablettes mathématiques selon les périodes*

Données fournies par le *CDLI*, consulté en septembre 2015

Légende : Arch. = périodes archaïques (2500-2100) ; Ur III = 3e dynastie d'Ur (2100-2000) ; pB = période paléo-babylonienne (2000-1600) ; Medio = périodes médio-babylonienne et médio-assyrienne (1600-1100) ; Néo = périodes néo-babylonienne et néo-assyrienne (911-539) ; Tardif = périodes achéménide et hellénistique (547-63) ; ? = datation non identifiée par le cdli, en très grande majorité à rattacher à la période paléo-babylonienne).

II. LE CURRICULUM DANS LES ECOLES DE SCRIBES

Les écoles de scribes portent un nom en sumérien, ce sont les *Edubba*, ou, littéralement, les « maisons des tablettes ». Elles sont probablement apparues en Mésopotamie dès les débuts de l'écriture. Mais peu de documents relatifs à l'enseignement datant des 4e et 3e millénaires ne nous sont parvenus. En revanche, une abondante documentation nous renseigne sur des écoles ayant fonctionné à l'époque paléo-babylonienne. Ces écoles sont attestées dans tout l'Orient cunéiforme, non seulement en Mésopotamie du sud, par exemple à Ur, Uruk, Larsa et Nippur, mais aussi en Mésopotamie centrale, à Babylone, Kiš et Sippar, ou plus au nord dans la vallée des affluents du Tigre, par exemple à Ešnunna, ou encore dans la moyenne vallée de l'Euphrate à Mari, ainsi qu'en Syrie, en Iran, ou en Anatolie.

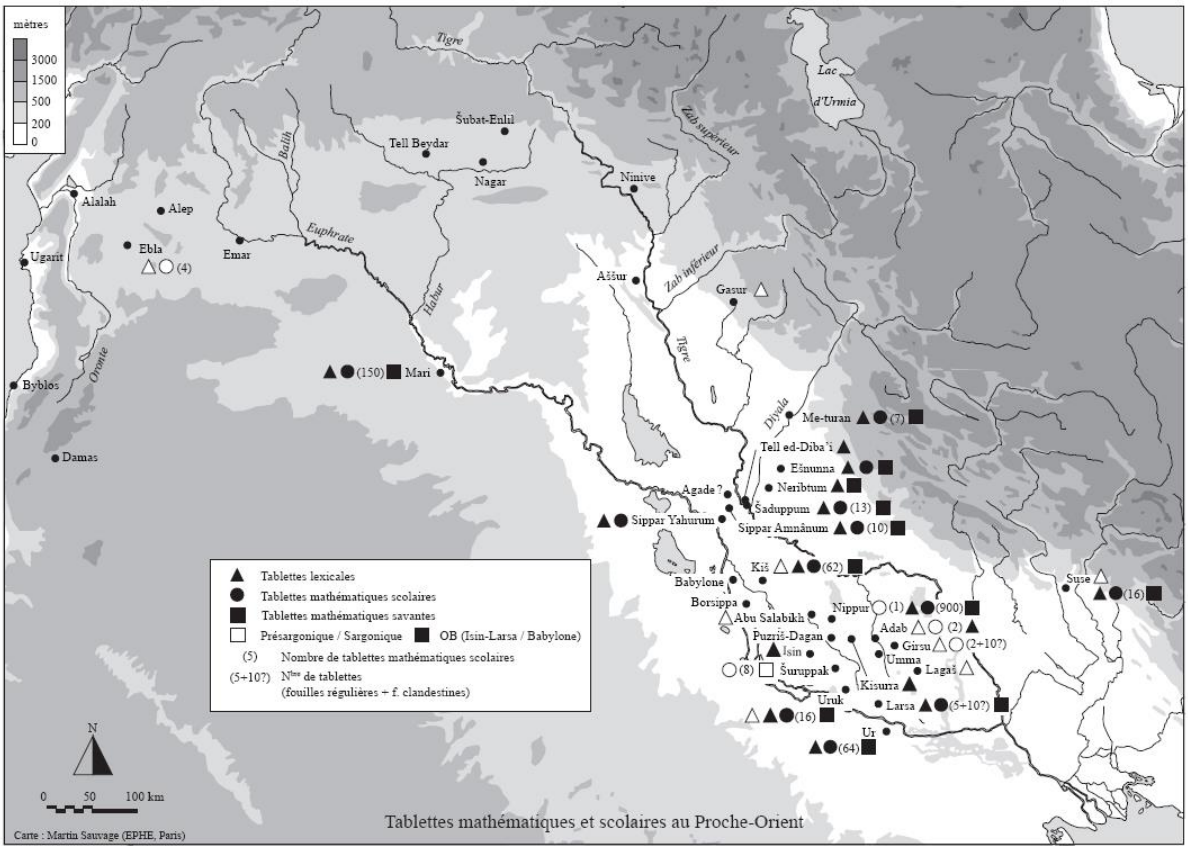


Figure 2 *– L'expansion des écoles de scribes à l'époque paléo-babylonienne (carte dressée par Martin Sauvage et publiée dans Proust 2007, p. 281)*

Les écoles les plus prestigieuses se situaient à Nippur, la grande capitale religieuse et culturelle de la Mésopotamie antique. Nippur était le lieu par excellence de la transmission de l'héritage culturel sumérien. On y a appris à parler le sumérien longtemps après que cette langue a disparu des usages courants au profit l'akkadien[3].

Les principales sources qui nous renseignent sur les écoles sont les exercices écrits par les écoliers eux-mêmes. Cette documentation a été étudiée, entre autres, par Niek Veldhuis et Eleanor Robson[4]. J'ai pour ma part étudié environ un millier de tablettes mathématiques conservées à Istanbul, Iéna, Chicago, et Philadelphie. L'analyse à la fois des textes et des tablettes qui les contiennent a permis de reconstituer avec une assez grande précision le curriculum dans les écoles de Nippur. On y enseignait essentiellement l'écriture, la langue sumérienne et les mathématiques. L'enseignement se déroulait en plusieurs phases, qu'on distingue très nettement par l'aspect physique et le contenu des tablettes scolaires. Dans un premier niveau, appelé « élémentaire » par les assyriologues, les jeunes scribes apprenaient de longues listes par cœur, aussi bien dans le domaine de l'écriture que des mathématiques. L'apprentissage de l'écriture commençait par des signes simples, puis des syllabaires, puis des listes de vocabulaire sumérien, puis des lis281tes de signes complexes. Dans un deuxième niveau, dit « intermédiaire », les élèves apprenaient la grammaire sumérienne au moyen

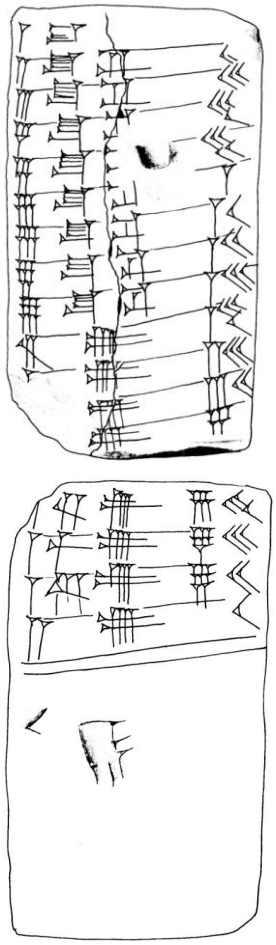
[3] Le sumérien est une langue de type agglutinant, sans parenté avec une langue connue, et l'akkadien est une langue sémitique. Le lecteur intéressé par l'histoire du déchiffrement du sumérien et de l'akkadien, ainsi que des autres langues anciennes qui ont été transcrites en écriture cunéiforme dans l'antiquité, pourra consulter Lion and Michel 2007.

[4] Veldhuis 1997, Robson 2001.

d'extraits de « proverbes », et les bases des techniques de l'administration au moyen de formulaires type, les "modèles de contrats", ainsi que les mathématiques grâce à des exercices de calcul. Ensuite, commençait une formation avancée axée sur la littérature sumérienne et, sans doute pour une petite minorité, les mathématiques.

Dans le domaine des mathématiques, l'enseignement consistait à apprendre des listes interminables : il s'agissait de les assimiler et de savoir les restituer à l'écrit par cœur. Ces listes consistaient tout d'abord en des énumérations de mesures de capacité, poids, surface et longueur qui permettaient d'apprendre les systèmes d'unité de mesure, leur écriture, les facteurs qui définissent chaque unité par rapport à ses multiples et sous-multiples, et les systèmes numériques associés. Ces listes ont été baptisées "listes métrologiques" par les assyriologues. Ensuite, ou peut-être en même temps, les scribes devaient mémoriser des tables métrologiques, qui permettaient de transformer les différentes mesures en nombres sexagésimaux positionnels. Ces listes permettaient ainsi d'introduire la numération sexagésimale positionnelle. L'image de la figure 3 est une copie de table métrologique de mesure de longueur (1 doigt, 1 *šu-si* en sumérien, représente environ 1,5 cm[5]). Enfin, un ensemble de tables numériques comprenait des tables d'inverses, de multiplication, et parfois de carrés, de racines carrées et de racines cubiques.

[5] Dans la transcription qui accompagne la copie, j'ai choisi des notations qui me paraissent adaptées à un public scolaire : j'ai traduit en français le nom des unités de mesure (ce que je ne fais pas dans les articles de nature philologique), et j'ai séparé les positions sexagésimales des nombres sexagésimaux positionnels par le signe « : », qui évoque, utilement me semble-t-il, le système sexagésimal moderne (voir explications plus loin).



Face	
1 doigt	10
2 doigts	20
3 doigts	30
4 doigts	40
5 doigts	50
6 doigts	1
7 doigts	1:10
8 doigts	1:20
9 doigts	1:30
1/3 coudée	1:40
½ coudée	2:30
2/3 coudée	3:20
5/6 coudée	4:10
1 coudées	5
Revers	
1 1/3 coudée	6:40
1 ½ coudée	7:30
1 2/3 coudée	8:20
2 coudées	10

Figure 3 *– Table métrologique de mesures de longueur (tablette scolaire de Nippur, HS 241 http://www.cdli.ucla.edu/P388160, copie de l'auteur)*

Dans un deuxième niveau, les jeunes scribes étaient entraînés au calcul numérique au travers d'un ensemble d'exercices assez stéréotypés portant sur la multiplication, l'inversion et le calcul des aires de carrés. Des exercices de géométrie plus variés, par exemple calculer l'aire d'un disque, sont attestés dans d'autres sites que Nippur. A un niveau plus avancé, les exercices portaient sur des problèmes linéaires et quadratiques. Parmi les problèmes de géométrie courants, citons les problèmes de partage du trapèze, probablement inspirés des pratiques d'arpentage et d'héritage[6].

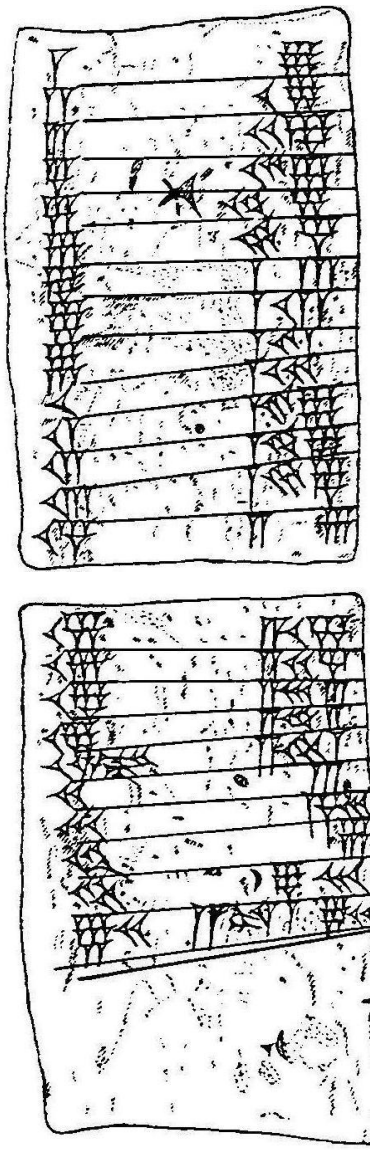
Sur ce socle déjà riche, des groupes érudits, sans doute dans certains cas les maîtres des écoles de scribes, ont développé des traditions mathématiques élaborées. Aussi variées et originales soient-elles, toutes ces traditions s'appuyaient sur les notions fondamentales concernant les nombres et les quantités qui étaient enseignées dans les écoles de scribes.

En examinant les textes scolaires de plus près, nous allons découvrir le visage étrange des nombres positionnels, des multiplications, des divisions, des aires et des preuves.

[6] Proust 2012b.

III. NOTION DE NOMBRE: LA NOTATION SEXAGESIMALE POSITIONNELLE

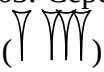
Ce qui fait la spécificité des textes mathématiques cunéiformes est l'usage d'une notation dite sexagésimale positionnelle. Pour faire comprendre cette notation à des auditeurs modernes, la meilleure méthode est de regarder les exercices scolaires qui étaient destinés à la faire comprendre aux écoliers de l'époque paléo-babylonienne. Regardons par exemple cette l'exercice scolaire de la figure 4.



Face	
1	9
2	18
3	27
4	36
5	45
6	54
7	1:3
8	1:12
9	1:21
10	1:30
11	1:39
12	1:48
13	1:57
14	2:6
Revers	
15	2:15
16	2:24
17	2:33
18	2:42
20-1	2:51
20	3
30	4:30
40	6
50	7:30
8:20	a-ra$_2$ 1 8:20

Figure 4 *– table de multiplication par 9 (tablette scolaire de Nippur, (HS 217a http://www.cdli.ucla.edu/P254585, copie Hilprecht 1906 pl. 7)*

Sur chaque face, on distingue deux colonnes. En observant la colonne de gauche, on voit un clou, deux clous, …, neuf clous, un chevron, un chevron et un clou, etc. Il est facile de deviner que le clou vertical ( ) représente le nombre un, et que le chevron ( ) représente le nombre dix. On remarque que dans chaque chiffre, les clous sont écrits par rangées de trois, ce qui facilitait une lecture rapide. Il en est de même des chevrons. On peut maintenant déchiffrer la colonne de droite. En face de 1, on lit 9, en face de 2, on lit 18, en face de 3, on lit 27, etc. Il s'agit donc d'une table de multiplication par 9. Continuons la lecture. En face de

7, on attend le nombre 63. Cependant, à la place de 63, on lit un nombre formé d'un clou, et plus loin, de trois clous (). On a compris que le "60" de 63 est représenté par un clou en deuxième position, exactement de la même façon que sur un compteur de temps ; par exemple pour un lecteur de vidéo, 63 secondes est représenté par 1:3, ce qui signifie, une minute et 3 secondes (ou 1 heure et 3 minutes selon le contexte). La notation est donc sexagésimale positionnelle.

L'analogie avec notre système de compte des temps et des angles saute aux yeux. Cependant, il y a des différences avec la notation sexagésimale positionnelle moderne. J'y reviendrai. Pour le moment, continuons la lecture de notre table de 9. En face de 20, nous attendons 9 fois 20, c'est-à-dire 180, c'est-à-dire 3×60, que nous écririons 3:0 en notation moderne. En fait, nous voyons seulement trois clous ( ). Cela signifie que 3×60 est noté avec exactement le même signe que le "3" de la troisième ligne. Les 3 clous ( ) dénotent aussi bien le nombre 3 que le produit 3×60. D'une façon générale, dans les tables de multiplication, et la plupart du temps dans les textes mathématiques, un clou représente aussi bien une unité, qu'une soixantaine, ou un soixantième, ou n'importe quelle puissance de soixante, d'exposant entier positif ou négatif. Autrement dit, la notation sexagésimale positionnelle des textes cunéiformes est une notation flottante.

La notation sexagésimale positionnelle nous est familière puisque nous l'utilisons quotidiennement pour exprimer des temps, des durées, ou des géo-localisations (voir des exemples figure 5). C'est du reste de l'antiquité mésopotamienne que nous avons hérité de ce système, qui nous a été transmis principalement par les traités d'astronomie. Mais les systèmes ancien et moderne sont-ils identiques? Dans les deux cas, la base est soixante et le principe est positionnel. Cependant, il y a des différences.

Figure 5 – *trois exemples de notation sexagésimale positionnelle moderne : localisation GPS, chronomètre et compteur de vidéo*

1ère différence: Le nombre de positions du système moderne est limité à trois (heure ou degré, minute, seconde). Au delà, le système décimal prend le relai (on dira par exemple 200 heures, ou 2/10 de seconde). Dans le système ancien, le nombre de positions est potentiellement illimité et de fait, dans les textes cunéiformes, il peut atteindre 9 positions à l'époque paléo-babylonienne, et bien plus à l'époque hellénistique.

2e différence: La notation moderne permet de savoir si un chiffre donné représente des heures, des minutes ou des secondes, et ce par divers moyens. Par exemple, les signes pour degré, minute et seconde apparaissent sur les localisations du GPS; les secondes sont écrites en plus petit sur le chronomètre ou la montre à écran; ou des zéro indiquent les positions initiales manquantes sur les compteurs vidéo. La notation moderne est absolue, alors que la notation ancienne est flottante.

3e différence: Les seules opérations effectuées sur les nombres sexagésimaux modernes sont l'addition et la soustraction (la multiplication par un entier, généralement petit, est une sorte d'addition itérée). Il ne nous viendrait pas à l'idée de multiplier, et encore moins de diviser, un nombre sexagésimal par un autre. A l'inverse, les anciens scribes utilisaient les nombres sexagésimaux positionnels principalement pour effectuer des multiplications et des divisions.

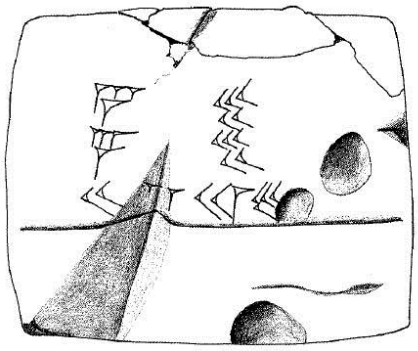
Ces différences ne sont pas anodines. Elles reflètent de profondes différences de nature entre les nombres sexagésimaux modernes et anciens. Les premiers sont utilisés pour exprimer des quantités (une durée, par exemple) ou des positions (un instant, ou une localisation). Les seconds, on va le voir, représentaient non pas des quantités, mais un instrument de calcul. A l'époque paléo babylonienne, la notation sexagésimale positionnelle n'était jamais utilisée pour exprimer des quantités. A l'époque hellénistique, en revanche, on l'utilise en astronomie pour représenter des positions dans le ciel.

Les nombres sexagésimaux anciens ne sont pas moins "mathématiques" que les nombres modernes, mais ils sont différents, et fonctionnent dans des univers différents. Il est important de garder à l'esprit ces différences entre les nombres sexagésimaux anciens et modernes lorsqu'on entreprend d'utiliser les mathématiques cunéiformes dans l'enseignement. En effet, gommer ces différences ne rend pas la tâche plus facile et vide les textes anciens d'une part de leur contenu, et donc d'une part de leur intérêt.

IV. NOTION DE MULTIPLICATION

Observons cet exercice (figure 6). Visiblement, il s'agit d'effectuer une multiplication. En effet, on y lit deux nombres écrits l'un sous l'autre, 4:50 et 4:50. Le troisième nombre qui apparaît sous les deux premiers est 23:21:40, leur produit (pour le vérifier, le lecteur pourra effectuer cette opération au moyen de la calculatrice mésopotamienne MesoCalc développée par Baptiste Mélès[7]).

[7]Mélès software created in 2013.



71 (HS 232)

4 50
4 50
---
23 21 40

Figure 6 *– multiplication (tablette scolaire de Nippur, HS 232 http://www.cdli.ucla.edu/P368277 copie Proust 2008 pl. 42)*

Deux détails attirent l'attention. Tout d'abord, le troisième nombre n'est pas disposé par rapport aux deux facteurs comme nous le ferions si nous effectuions la multiplication à la main sur papier, par exemple comme ceci :

```
    4     50
    4     50
----------------------
    41    40
3   20
3   20
16
----------------------
23  21    40
```

Ensuite, le détail du calcul n'apparaît pas. Seul le résultat est noté sur la tablette. Ces observations, ainsi que d'autres indices provenant d'autres textes, ont conduit certains historiens à penser que les opérations n'étaient pas effectuées par écrit, mais étaient exécutées sur un instrument de calcul[8]. La forme des chiffres et la découverte de jetons de forme similaire aux signes cunéiformes suggèrent que cet instrument de calcul était basé sur la manipulation de jetons d'argile. Nous avons là un indice du fait que la notation sexagésimale positionnelle cunéiforme représente un instrument de calcul.

Il est possible, et assez amusant, d'essayer de reconstituer un tel instrument. Cette reconstitution a fait l'objet de recherches dans le groupe de recherche SAW et d'expériences d'activités en classe. Par exemple, imaginons un abaque constitué de colonnes et de jetons en forme de bâton pour les unités, et de billes pour les dizaines. La disposition des jetons sur l'abaque ne nécessite rien d'autre que l'application de la règle d'échange 60 pour 1, qui en fait est décomposée en 10 bâtons pour 1 bille, puis de 6 billes pour 1 bâton (figure 7a). On

[8] Proust 2000, Høyrup 2002.

pose le nombre à multiplier, le multiplicande, 4:50, sur l'abaque, et on multiplie chaque chiffre successivement par les chiffres du multiplicateur 4:50, c'est-à-dire par 50, puis par 4 (en décalant les produits partiels d'un rang sexagésimal).

On pose 4 :50, le nombre à multiplier.

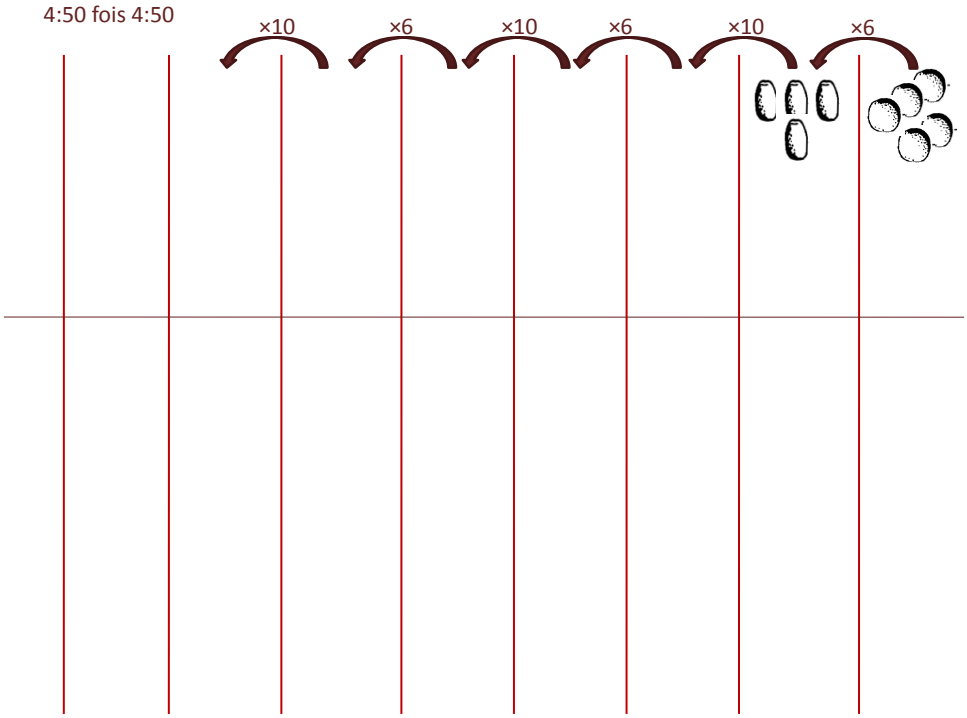
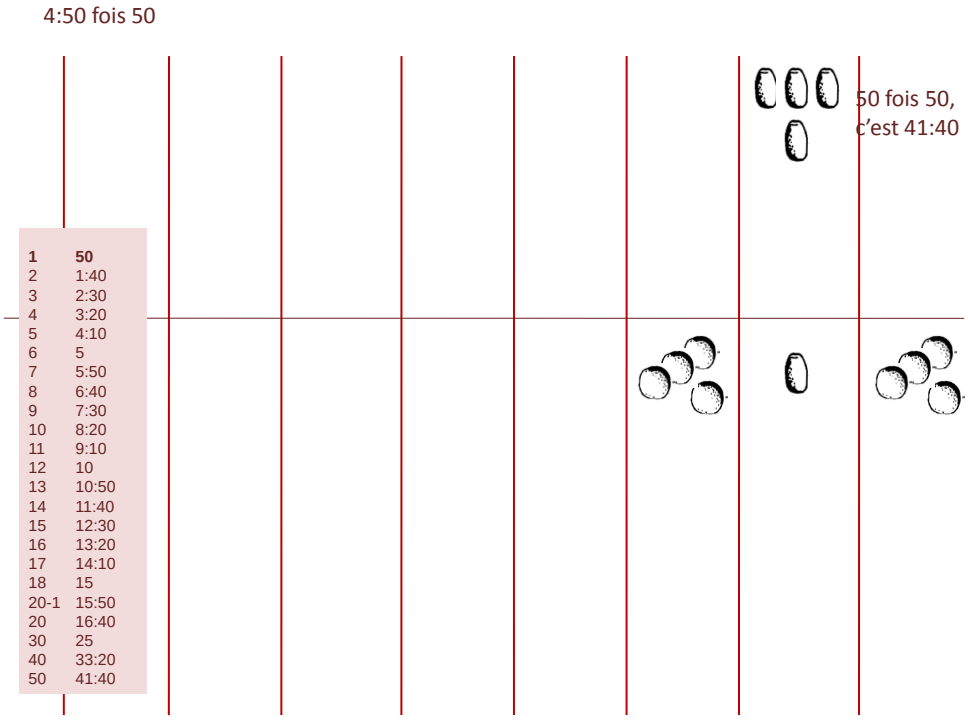


Figure 7a

On multiplie par 50, donc on utilise la table de multiplication par 50. On calcule les produits partiels et on les place sur l'abaque au fur et à mesure.



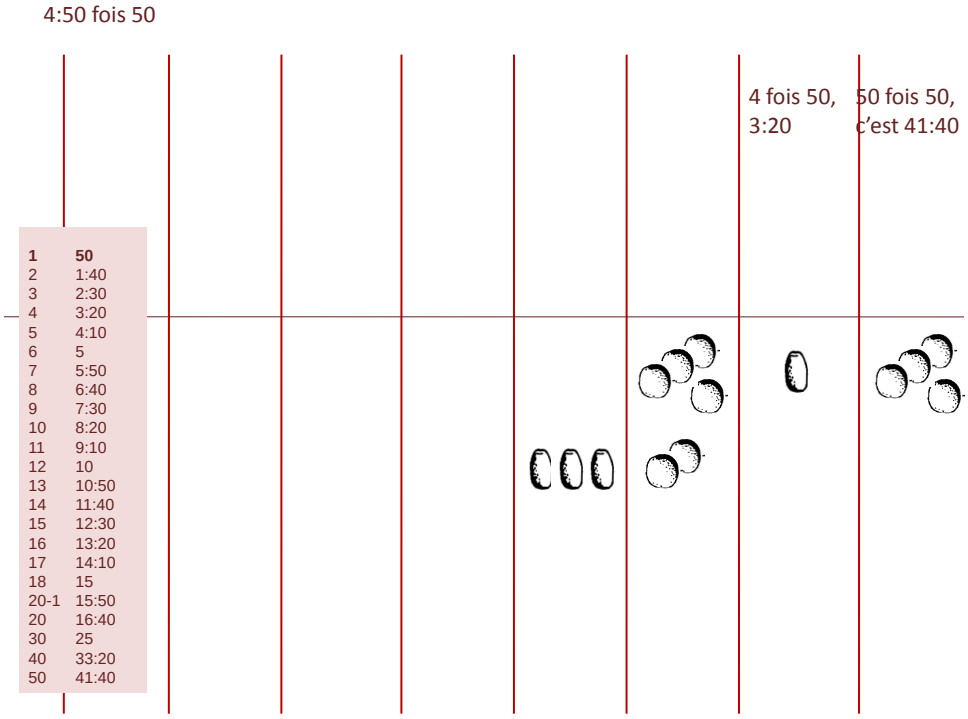


Figure 7b

On applique les règles d'échange.

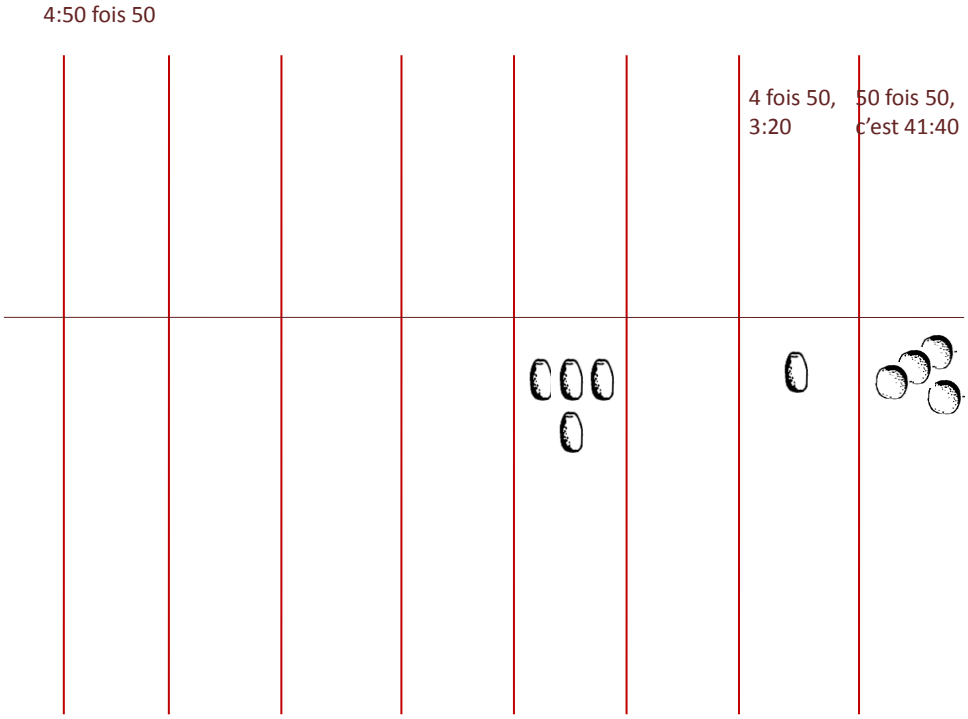


Figure 7c

On multiplie par 4 (le décalage d'une position sexagésimale peut être représenté par un décalage du nombre à multiplier).

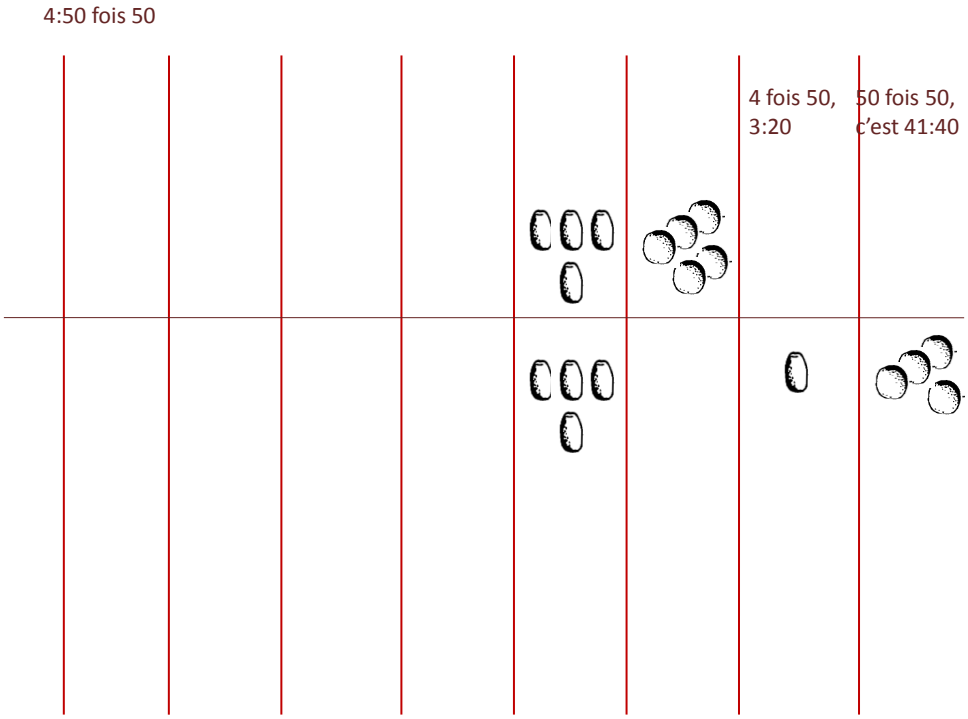
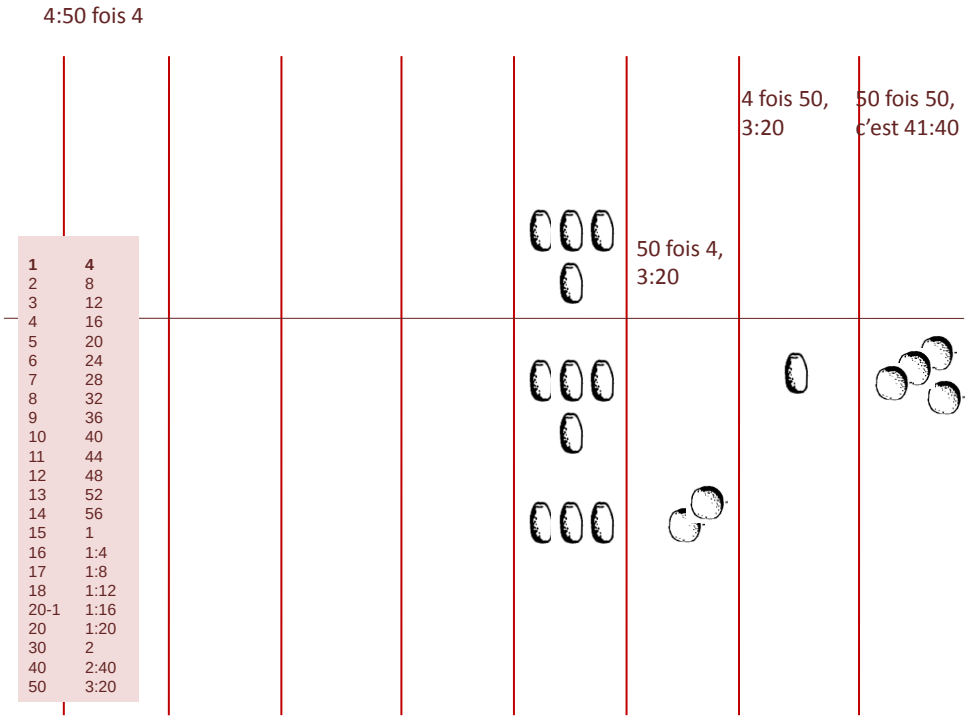


Figure 7d

On utilise la table de multiplication par 4



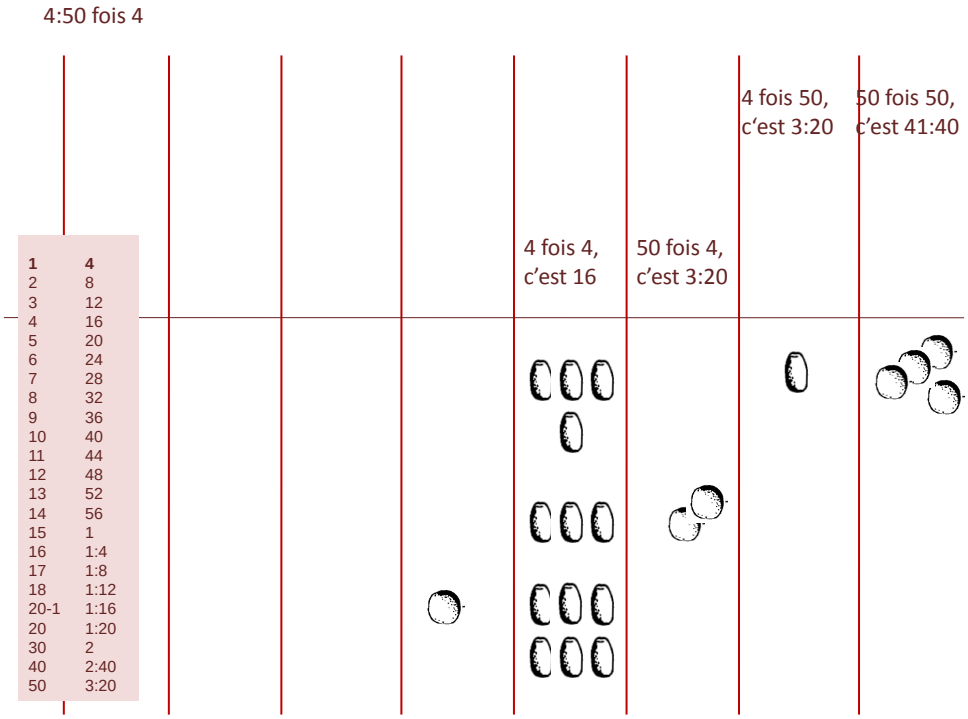


Figure 7e

On applique les règles d'échange, et on trouve bien le produit 23:21:40 indiqué sur la tablette.

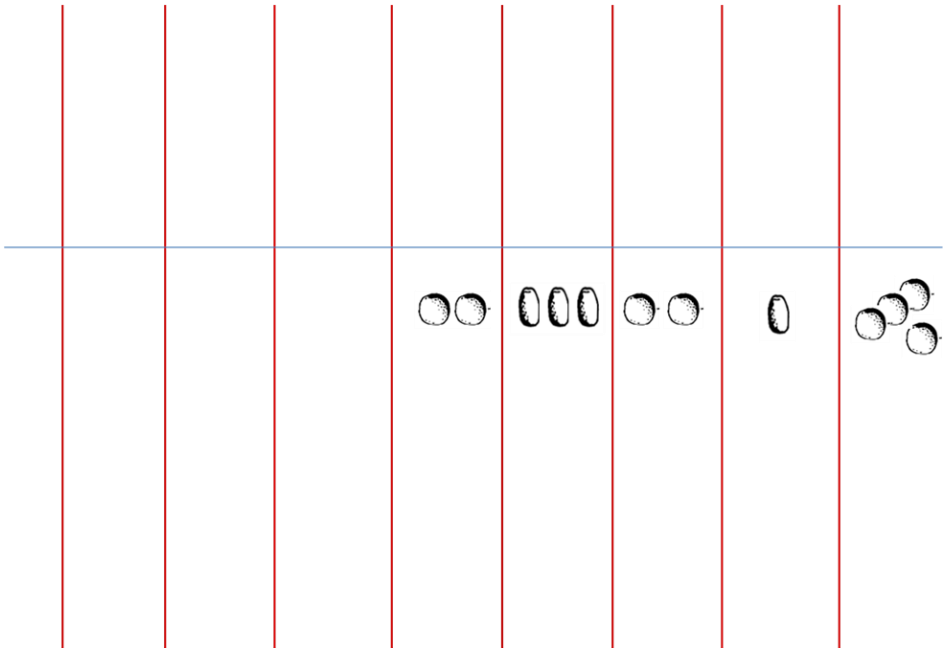


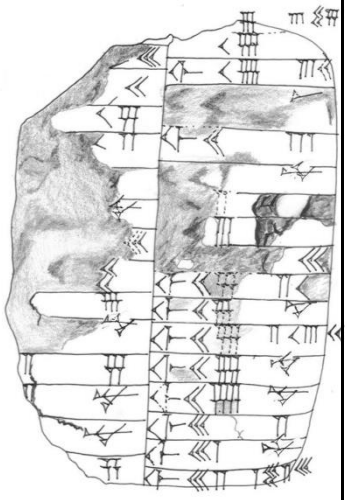
Figure 7f

Selon ce scénario, la multiplication agit sur des nombres positionnels flottants comme si ces nombres étaient des objets. L'algorithme de multiplication n'est pas un algorithme écrit, mais un processus matériel, qui consistait probablement à manipuler des jetons.

V. NOTION DE DIVISION

Il n'y a pas dans les textes mathématiques paléo-babyloniens d'opération de division à proprement parler. Lorsque, dans un problème, un nombre devait être divisé par un autre, le scribe multipliait le dividende par l'inverse du diviseur. La notion d'inverse est donc une notion fondamentale dans l'arithmétique paléo-babylonienne.

La première des tables numériques qui était apprise dans les écoles était la table d'inverse. Expliquons-en le principe à partir d'un exemplaire datant de la fin du 3e millénaire, c'est-à-dire de quelques génération avant celle des maîtres des écoles paléo-babylonienne (la figure 8 ne représente que la face de la tablette, mais la table continue sur le revers ; voir le site du CDLI pour une translitération de la tablette complète).



[1-da igi gal$_2$-bi]	2 30
[igi 3]	20
[igi 4]	15
[igi 5]	12
[igi 6]	10
[igi 7]	nu
[igi 8	7]:30
[igi 9	6]:40
[igi 10]	6
[igi 11]	nu
[igi 12]	5
[igi 13]	nu
[igi 14]	nu
[igi 15]	4
[igi] 16	3:45
igi 17	[nu]
igi 18	3:20
[igi 19	nu]
igi 20	3
igi 21	nu
igi 22	[nu]
[igi] 23	[nu]
[igi 24	2]:30
igi 25	2:24
igi 26	nu
igi 27	2:13:20
igi 28	nu
igi 29	nu
igi 30	2
igi 31	nu
igi 32	1:52:30

Figure 8 *– Table d'inverse d'époque Ur III (tablette scolaire de Nippur, Ist Ni 374, face* http://www.cdli.ucla.edu/P257557 *copie Proust 2007 pl. 1)*

Cette table établit que:

L'inverse de 2 est 30
L'inverse de 3 est 20
L'inverse de 4 est 15
L'inverse de 5 est 12
L'inverse de 6 est 10
L'inverse de 7 n'existe pas
Etc.

On peut comprendre les premières lignes de plusieurs façons. On peut par exemple penser au système moderne: l'inverse de 2 est 1/2, et 1/2 heure est 30 minutes ; l'inverse de 3 est 1/3, et 1/3 d'heure est 20 minutes, etc. On peut aussi, de façon plus abstraite, raisonner ainsi: 2 fois 30 égal soixante en valeur absolue, c'est-à-dire 1 en notation flottante ; 3 fois 20 égal soixante en valeur absolue, c'est-à-dire 1 en notation flottante etc. Autrement dit, deux nombres forment une paire d'inverses si leur produit est 1 en notation flottante. Cette formulation fait

apparaître une relation symétrique entre un nombre et son inverse. Une autre particularité du système sexagésimal positionnel apparaît ici: l'inverse de 2 n'est pas un nombre fractionnaire, mais un nombre, 30, ni entier, ni fractionnaire. La notation flottante abolit la distinction entre entier et non entier.

Mais qu'en est-il de l'inverse de 7? La tablette nous répond: "igi 7 nu", ce qui signifie: 7 n'a pas d'inverse. En langage moderne, cela signifie que l'inverse de 7 ne peut pas s'écrire avec un nombre fini de positions sexagésimales. Nous lisons de même: igi 11 nu, igi 13 nu, igi 14 nu, etc. Les nombres 7, 11, 13, 14, etc. n'ont "pas d'inverse" au sens babylonien car leur décomposition contient des facteurs comme 7, 11, 13 qui ne sont pas des diviseurs de 60, la base. En langage moderne, les nombres qui ont un inverse au sens babylonien, comme 2, 3, 4, etc., sont dits "réguliers" en base 60. Les autres, comme 7, 11, 13, 14, sont non réguliers, ou irréguliers en base 60, « igi nu » en sumérien.

Cette table d'inverse nous montre donc qu'il existe deux sortes de nombre sexagésimaux positionnels, ceux qui sont réguliers et ceux qui ne le sont pas. Les grandes catégories de nombres se sont construites dans l'histoire des mathématiques sur les oppositions entre "entiers" et "non entiers", ou bien "rationnels" et "irrationnels". Ici, ce ne sont pas ces oppositions qui sont pertinentes, mais l'opposition entre nombres réguliers et non réguliers. Les nombres pris en considération dans l'univers scolaire sont ceux dont le développement sexagésimal est fini, c'est-à-dire les nombres sexagésimaux, avec une prédilection pour ceux qui sont réguliers et permettent d'effectuer des divisions.

Les tables d'inverses d'époque paléo-babylonienne présentent de légères mais intéressantes différences avec leur précurseurs d'Ur III (voir figure 9). En effet, dans les tables paléo-babyloniennes, les entrées sont 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, etc. : les nombres "igi nu" sont éliminés. D'une façon générale, l'arithmétique scolaire paléo-babylonienne opère dans le monde des nombres sexagésimaux réguliers. La liste des tables de multiplication, par exemple, en témoigne. Seule la table de 7 est une table de multiplication par un nombre non régulier. Ce détail ainsi que l'ordre décroissant dans lequel sont données les tables de multiplication (tables de 50, 45, 44:26:40, 40, etc., indique que ces tables sont en fait aussi des tables de division (tables de division par 1:12, 1:20, 1:21, etc.).

Table d'inverses		Liste des tables de multiplication
2	30	50
3	20	45
4	15	44:26:40
5	12	40
6	10	36
8	7:30	30
9	6:40	25
10	6	24
12	5	22:30
15	4	20
16	3:45	18
18	3:20	16:40
20	3	16
24	2:30	15
25	2:24	12:30
27	2:13:20	12
30	2	10
32	1:52:30	9
36	1:40	8:20
40	1:30	8
45	1:20	7:30

48	1:15
50	1:12
54	1:6:40
1	1
1:4	56:15
1:21	44:26:40

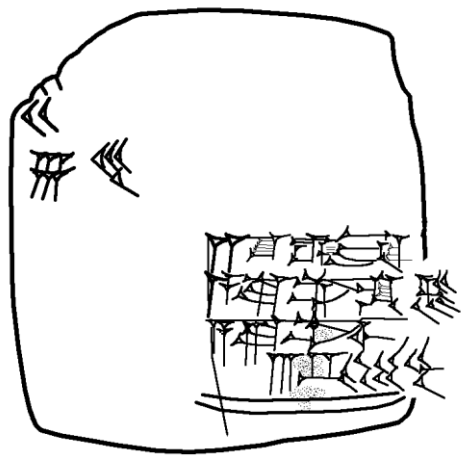
7:12
7
6:40
6
5
4:30
4
3:45
3:20
3
2:30
2:24
2
1:40
1:30
1:20
1:15

Figure 9 – *Table d'inverses (à gauche) et liste des tables de multiplication (à droite)*

En conclusion, la division n'est pas une des quatre opérations élémentaires, comme dans les arithmétiques usuelles auxquelles nous sommes habitués. La division dérive d'une autre opération, l'inversion, qui, elle, peut être considérée comme une opération élémentaire.

VI. NOTION D'AIRE

Mais comment les nombres sexagésimaux flottants pouvaient-ils être utilisés pour calculer des quantités? Examinons le cas du calcul des aires, qui occupait une place particulièrement importante dans la formation mathématique. Une dizaine d'exercices du genre de celui de la figure 10 ont été trouvés à Nippur.



[20]
20
6:40

2 doigts le côté d'un carré
Sa surface combien?
Sa surface est
1/3 grain.

Figure 10 *– Calcul d'aire (tablette scolaire de Nippur, UM 29-15-192, face http://www.cdli.ucla.edu/P254900, copie de l'auteur)*

Tous ont la même mise en page: en haut à gauche on voit une multiplication en notation sexagésimale positionnelle, posée exactement de la même façon que dans l'exercice de multiplication que nous venons de voir (figure 6): trois nombres notés l'un sous l'autre, deux facteurs (20 et 20) et leur produit (6:40). En bas à droite, on trouve un petit texte de problème, avec l'énoncé et la réponse.

2 doigts le côté d'un carré
Sa surface combien?
Sa surface est 1/3 grain.

La relation entre les nombres écrits en haut à gauche et les mesures de longueur et de surface écrites en bas à droite est exactement celle qui est établie par les tables métrologiques (voir figure 3). Le processus comportait ainsi trois étapes :

Première étape : Les mesures de longueur sont transformées en notation sexagésimale positionnelle flottante grâce à une table établie pour les longueurs

1 doigt 10
2 doigts 20
3 doigts 30
4 doigts 40
5 doigts 50
6 doigts 1

Deuxième étape : Le nombre obtenu, ici 20, est multiplié par lui-même en utilisant les tables de multiplication.

Troisième étape : le produit, ici 6:40, est transformé à nouveau en mesure de surface grâce à une table établie pour les surfaces, et à un contrôle mental des ordres de grandeur.

1/3 grain 6:40
1/2 grain 10
1 grain 20
2 grains 40
2 ½ grains 50
3 grains 1

Ce processus repose sur une dissociation entre la mesure des grandeurs, ici longueurs et surfaces, et le calcul. Ce ne sont pas les mêmes sortes de nombres qui sont utilisés dans les différentes étapes. Le passage par la notation sexagésimale positionnelle flottante, extérieure au domaine de la quantité, est un artifice qui permet de résoudre les problèmes de changement de dimension posés par la métrologie paléo-babylonienne. En effet, dans cette métrologie, les unités de surface ne sont pas systématiquement des carrés d'unités de longueur. Il est même possible que la notation sexagésimale positionnelle ait été inventée précisément dans le but de résoudre ce problème[9].

VII. NOMBRE ET QUANTITE

Les exercices scolaires nous ont fait rencontrer deux types de nombres :

- Des nombres non positionnels toujours suivis d'unité de mesure ou du nom d'éléments dénombrés, sont utilisés pour exprimer des quantités (mesures, nombre de choses)
- Des nombres sexagésimaux positionnels, jamais suivis d'unité de mesure ou du nom d'éléments dénombrés, sont utilisés uniquement pour les calculs, plus précisément pour les multiplications et les inversions.

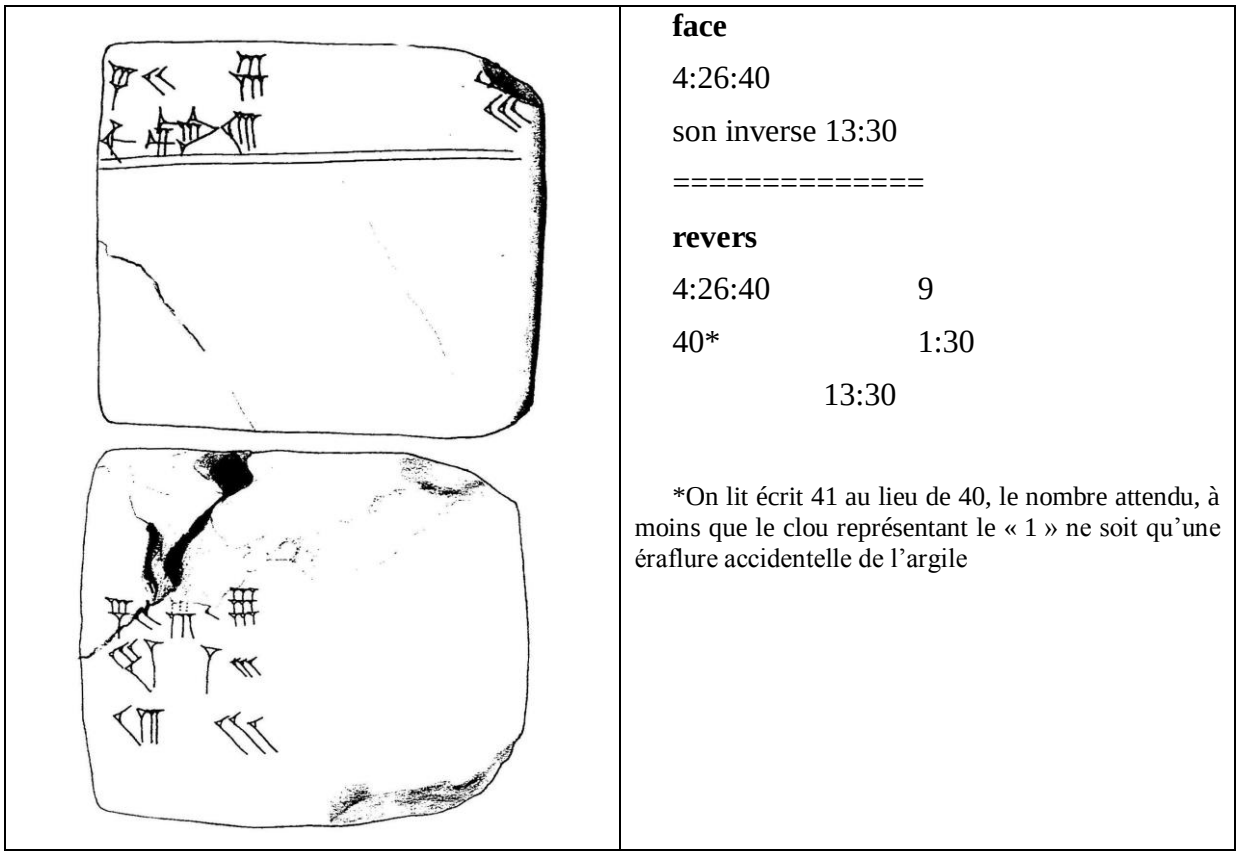
[9] Proust forthcoming.

La pratique des nombres dans l'enseignement élémentaire à Nippur témoigne de la dissociation de deux fonctions distinctes : quantifier et calculer. La quantification est prise en charge par des nombres de principe additif, dont l'ordre de grandeur est parfaitement défini. La fonction de calcul (pour la multiplication) est prise en charge par des nombres sexagésimaux positionnels flottants et isolés (non suivis d'unité de mesure).

VIII. UN ALGORITHME ET SA PREUVE : CALCULER UN INVERSE

Une fois que ce système sophistiqué de numérations spécialisées avait été mise en place, sans doute à la fin du 3e millénaire pour résoudre des problèmes posés par l'évaluation des champs et des domaines, les maîtres des écoles s'en sont emparés pour des buts qui leur étaient propres. Le monde des nombres sexagésimaux positionnels flottant offrait à la spéculation mathématique un terrain de jeu particulièrement stimulant. De nouvelles questions, purement mathématiques, ont émergé. L'une de ces questions est la suivante: comment trouver l'inverse d'un nombre qui n'est pas donné dans les tables d'inverses standard, c'est-à-dire les tables qui étaient apprises par cœur dans les écoles?

De nombreux exercices scolaires montrent la réponse astucieuse que les maîtres avaient donnée à cette question. Une tablette scolaire trouvée à Nippur, Ist Ni 10241, en montre un exemple. Sur la face, se trouve un nombre, 4:26:40, et la réponse à une question implicite, "son inverse est 13:30". Sur le revers, se trouve le détail du calcul. Examinons ce calcul.



face

4:26:40

son inverse 13:30

==========

revers

4:26:40	9
40*	1:30
13:30	

*On lit écrit 41 au lieu de 40, le nombre attendu, à moins que le clou représentant le « 1 » ne soit qu'une éraflure accidentelle de l'argile

Figure 11 *– Calcul d'inverse (tablette scolaire de Nippur, Ist Ni 10241, face http://www.cdli.ucla.edu/P368962, copie de Proust 2007, pl. 48)*

Tout d'abord, observons que le nombre 4:26:40 est régulier. Nous pouvons le vérifier en utilisant des méthodes de calcul modernes, par exemple en décomposant ce nombre en produit de facteurs, par exemple avec la calculatrice MesoCalc. Comment les scribes anciens savaient-ils que ce nombre est régulier? J'y reviendrai dans la suite.

4:26:40 se termine par le nombre régulier 6:40, donc 4:26:40 est « divisible » par 6:40. Pour diviser 4:26:40 par 6:40, on multiplie 4:26:40 par l'inverse de 6:40. L'inverse de 6:40 est 9. Ce nombre 9 est posé à droite. Le produit de 4:26:40 par 9 est 40, donc 40 est le quotient de 4:26:40 par 6:40 ; ce nombre est posé à gauche. L'inverse de 40 est 1:30. Le nombre 1:30 est posé à droite. Pour trouver l'inverse de 4:26:40, on n'a plus qu'à multiplier les inverses des facteurs de 4:26:40, c'est-à-dire les nombres 9 et 1:30 posés à droite. Ce qui donne 13:30, l'inverse cherché.

Cette procédure revient à décomposer le nombre à inverser en produit de facteurs réguliers élémentaires, c'est-à-dire appartenant au répertoire connu par cœur (ceux qui figurent dans la table d'inverses, voir figure 9):

4:26:40 = 6:40 × 40

Les inverses de ces facteurs ont été posés dans la colonne de droite, qui donne ainsi la décomposition de l'inverse cherché:

9 × 1:30 = 13:30

Cette technique d'inversion par factorisation a été théorisée d'une certaine manière par les anciens scribes. La preuve en est un texte comme celui qu'on trouve sur la tablette conservée à l'Université de Philadelphie sous le numéro CBS 1215, où cette méthode est développée de façon systématique[10]. Le texte est composé de 21 sections. L'entrée de la première section est 2.5, de la deuxième 4.10, de la troisième 8.20, etc. Chaque entrée est le double de la précédente. Le nombre 2.5 étant régulier (2.5 est égal à 5^3, un nombre bien connu des scribes), toutes les entrées sont régulières. Le nombre 4:26:40 de l'exercice précédent correspond à la huitième entrée de notre texte, ce qui garantit le fait qu'il est régulier.

Dans chaque section, le nombre écrit en entrée est inversé. La méthode d'inversion est celle que nous venons de voir. Prenons par exemple la première section, dont l'entrée est 2.5.

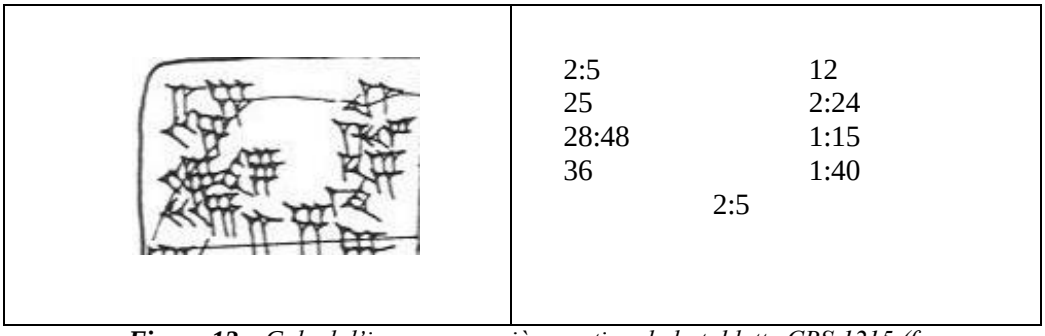


Figure 12 – *Calcul d'inverse, première section de la tablette CBS 1215 (face http://www.cdli.ucla.edu/P254479, copie de Robson 2000, p. 237)*

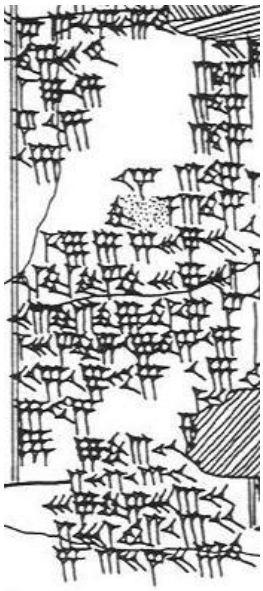
On reconnait le même algorithme d'inversion. Le nombre 2:5 se termine par 5, qui appartient à la table d'inverses, donc 5 est un facteur régulier élémentaire de 2:5. L'inverse de 5 est 12 ; on pose 12 à droite. Le produit de 2:5 par 12 est 25. Le nombre 25 est donc un

[10] Ce texte a été publié par Sachs 1947.

deuxième facteur et il est régulier ; on pose 25 à gauche, et son inverse 2:24 est posé à droite. Le nombre 2:5 se décompose donc en produit de deux facteurs réguliers élémentaires, 5 et 25. L'inverse de 2:5 est le produit des inverses de ces deux facteurs, c'est-à-dire des nombres posés à droite : 12 et 2:24. Le produit de 2:24 par 12 est 28:48. Le nombre 28:48 est l'inverse cherché.

Mais, contrairement à ce que montre l'exercice précédent (figure 11), le processus ne s'arrête pas là. La méthode de factorisation est appliquée à nouveau à l'inverse trouvé, si bien que le résultat final n'est autre que le nombre initial, écrit en entrée. Il en est de même dans toutes les sections: le nombre écrit en entrée est inversé, et l'inverse trouvé est inversé à son tour, ce qui produit le nombre initial.

Si on avance dans le texte, un autre phénomène se produit. Le quotient trouvé après la première factorisation n'est pas un nombre dont l'inverse est connu. Il faut donc itérer le processus. Dans la 20e section, on trouve quatre itérations.



5.3.24.26.40	[9]
45.30.40 1.30	
1.8.16	3.45
4.16	3.45
16	3.45
14.3.45	
5[2.44].3.45	
1.19.6.5.37.30	
11.51.54.50.37.30	2
23.43.49.41.15	4
1.34.55.18.45*	16
25.18.45* 16	
6.45	1.20
9	6.[40]
8.53.20	
2.22.13. 20	
37.55.33.20	
2.31.42.13.20	
5.3.24.26.40	

Figure 13 – *Calcul d'inverse, 20e section de la tablette CBS 1215 (copie de Robson 2000, p. 237)*

Ce texte nous montre plusieurs choses. Tout d'abord, il montre comment fabriquer des nombres réguliers : ici, un nombre régulier, 2:5, est multiplié par 2 de façon répétée. Plusieurs autres textes de la même époque contiennent des listes de nombres analogues, engendrées par la multiplication répétée d'un nombre régulier par 2, par 3 ou par 5. Ensuite, ce texte met en évidence deux règles arithmétiques fondamentales: 1) l'inverse de l'inverse d'un nombre est ce nombre lui-même; 2) l'inverse d'un produit de facteurs est le produit des inverses de ces facteurs. Ces deux règles sont montrées au moyen d'exemples paradigmatiques. D'une certaine manière, ce texte peut être considéré comme une tentative d'établir la validité de l'algorithme d'inversion, c'est-à-dire une forme de démonstration d'un algorithme[11].

[11] Pour plus de détails, voir Proust 2012a.

IX. ENTRER DANS DES MONDES DIFFERENTS

Cette balade dans le monde des mathématiques des écoles paléo-babyloniennes nous montre des objets mathématiques déroutants et des relations entre ces objets inattendues. On croit reconnaître un paysage familier, et pourtant, en y regardant de plus près, on découvre une constellation de détails étranges. Cela signifie-t-il que nous ayons affaire à des spéculations qui ne sont pas véritablement mathématiques, ou qu'on pourrait qualifier de pré-mathématiques? Faut-il corriger les détails étranges pour rendre ces textes accessibles à des lecteurs modernes, par exemple à des élèves de collège ou de lycée? C'est une approche possible. Mais on peut en proposer une autre: prendre ces textes pour ce qu'ils sont, et essayer d'en comprendre les finesses[12]. Bref, respirer le parfum des écoles de scribes, comme le recommandait un ancien maître de l'une des écoles de Nippur.

> *Les petits doivent humer le parfum de Nippur! […] Ne sais-tu pas que l'école à Nippur est incomparable?*[13]

REFERENCES

Attinger, Pascal. 2013/2015. "ANL 9: Nabi-Enlil-Anum-pīšu (3.3.18)." *Institut für Archäologische Wissenschaften* http://www.iaw.unibe.ch/ueber_uns/amm_amp_va_personen/prof_dr_attinger_pascal#pane122850.

Hilprecht, Herman Vollrat. 1906. *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*. Philadelphia: University of Pennsylvania.

Høyrup, Jens. 2002. "A note on Old Babylonian computational techniques." *Historia Mathematica* 29:193-198.

IREM de Grenoble. 2015. *Les Mathématiques en Mésopotamie - Niveaux 6eme et 5eme*.

Lion, Brigitte and Cécile Michel. 2007. "Les écritures cunéiformes et leur déchiffrement." in *Travaux de la Maison René-Ginouvès*, vol. 4. Paris.

Mélès, Baptiste. software created in 2013. "MesoCalc: a Mesopotamian calculator.": Open source (URL http://baptiste.meles.free.fr/site/mesocalc.html).

Proust, Christine. 2000. "La multiplication babylonienne : la part non écrite du calcul." *Revue d'Histoire des Mathématiques* 6:1001-1011.

Proust, Christine. 2007. *Tablettes mathématiques de Nippur*. Istanbul: Institut Français d'Etudes Anatoliennes, De Boccard.

Proust, Christine. 2012a. "Interpretation of Reverse Algorithms in Several Mesopotamian Texts " Pp. 384-422 in *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, edited by K. Chemla. Cambridge: Cambridge University Press.

Proust, Christine. 2012b. "Problèmes de partage : des cadastres à l'arithmétique." *CultureMath (ENS Ulm)* - *http://culturemath.ens.fr/*.

[12] C'est le choix qui a été fait par des professeurs de mathématiques et d'histoire d'un collège de Grenoble (IREM de Grenoble 2015).

[13] Attinger 2013/2015.

Proust, Christine. forthcoming. "Early-Dynastic tables from Southern Mesopotamia, or the multiple facets of the quantification of surfaces." in *Mathematical practices in the context of administration*, edited by K. Chemla and C. Michel.

Proust, Christine (with the collaboration of M. Krebernik and J. Oelsner). 2008. *Tablettes mathématiques de la collection Hilprecht*. Leipzig: Harrassowitz.

Robson, Eleanor. 2000. "Mathematical cuneiform tablets in Philadelphia. Part 1 : problems and calculations." *SCIAMVS* 1:11-48.

Robson, Eleanor. 2001. "The Tablet House: A Scribal School in Old Babylonian Nippur." *Revue d'Assyriologie* 95:39-66.

Sachs, Abraham J. 1947. "Babylonian Mathematical Texts 1." *Journal of Cuneiform Studies* 1:219-240.

Veldhuis, Niek. 1997. "Elementary Education at Nippur, The Lists of Trees and Wooden Objects." Ph. D. dissertation Thesis, University of Groningen, Groningen.