

Interpolation d'inverses d'opérateurs pour la réduction de modèles paramétrés.

Olivier Zahm, Anthony Nouy

▶ **To cite this version:**

Olivier Zahm, Anthony Nouy. Interpolation d'inverses d'opérateurs pour la réduction de modèles paramétrés.. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01515065

HAL Id: hal-01515065
https://hal.science/hal-01515065

Submitted on 27 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

CSMA 2015
12e Colloque National en Calcul des Structures
18-22 Mai 2015, Presqu'île de Giens (Var)

Interpolation d'inverses d'opérateurs pour la réduction de modèles paramétrés.

O. Zahm, A. Nouy.

{olivier.zahm,anthony.nouy}@ec-nantes.fr

Résumé — Nous proposons un préconditionneur pour des équations paramétrées construit comme combinaison linéaire interpolante de préconditionneurs calculés en certaines valeurs du paramètre. Cette méthode d'interpolation s'appuie sur la notion de préconditonneur optimal au sens de la norme de Frobenius. Nous montrons l'intérêt d'utiliser de tels préconditionneurs pour des méthodes de réduction de modèle de type Reduced Basis, ou Proper Generalized Decomposition.
Mots clés — Préconditionneur, interpolation, réduction de modèle, équations paramétriques.

Ces dernières années, un intérêt croissant a été porté sur les méthodes de réduction de modèle pour l'approximation de solution d'équations aux dérivées partielles paramétrés de type

$$A(\xi)u(\xi) = b(\xi). \tag{1}$$

La méthode Reduced Basis [7] ou la méthode Proper Generalized Decomposition [2] proposent de construire un sous espace vectoriel de dimension réduite dans lequel une approximation de la solution peut être calculée avec une faible complexité. Ce sous espace est construit de telle manière qu'il minimise une certaine norme du résidu de l'équation considérée. Dans la pratique, un mauvais conditionnement de l'opérateur $A(\xi)$ conduit à une approximation sous optimale de la solution ; une stratégie de préconditionnement est alors nécessaire afin d'obtenir un espace de faible dimension et de bonne qualité.

Il existe dans la littérature différentes manières de préconditionner ce type d'équation. Pour la méthode Reduced Basis, on considère généralement un préconditionneur $P = A^{-1}(\overline{\xi})$, c'est à dire l'inverse de l'opérateur évalué en une valeur $\overline{\xi}$ du paramètre [7]. Plus récemment une méthode d'interpolation Lagrangienne de l'inverse d'opérateur a été proposé [1] : l'avantage majeur est que le préconditionneur qui en résulte varie en fonction du paramètre de telle sorte qu'il reste proche de l'inverse de l'opérateur pour l'ensemble des valeurs prises par le paramètre.

Nous proposons ici une nouvelle méthode d'interpolation basée sur une technique d'approximation d'inverse d'opérateur. Une première étape consiste à calculer des préconditionneurs $P_i \approx A^{-1}(\xi_i)$ sur un ensemble de points $\xi_1, \cdots, \xi_m$. Ces préconditionneurs peuvent être obtenus par factorisation incomplète, voire même par factorisation complète ce qui revient à calculer l'inverse exacte de l'opérateur : $P_i = A^{-1}(\xi_i)$. Nous considérons ensuite un préconditionneur $P(\xi)$ défini par :

$$P(\xi) = \arg\min_{P \in Y_m} \|I - PA(\xi)\|_F^2, \tag{2}$$

avec $Y_m = \mathrm{span}(P_1, \cdots, P_m)$ et $\|\cdot\|_F$ la norme matricielle de Frobenius. $P(\xi)$ peut alors s'interpréter comme une projection orthogonale (au sens de la norme de Frobenius) de la matrice identité sur l'espace vectoriel $\mathrm{span}(P_1A(\xi), \cdots, P_mA(\xi))$ [5]. Contrairement à l'interpolation Lagrangienne, cette approche repose sur un problème d'approximation d'inverse d'opérateur [4] : nous montrons par des exemples numériques qu'elle conduit à des préconditionneurs performants (voir figure 1).

Il est important de noter que les préconditonneurs calculés aux points d'interpolation ne sont pas stockés de manière explicite. On ne stocke en pratique que la factorisation de l'opérateur $A(\xi_i)$. Ainsi, une multiplication avec un vecteur est calculable simplement par une étape de montée et une étape de descente. Cette contrainte numérique rend difficile le calcul de la norme de Frobenius de $I - PA(\xi)$. Pour palier ce problème, nous utilisons des méthodes d'estimation statistique de trace de matrice implicite comme celle proposés par [5].

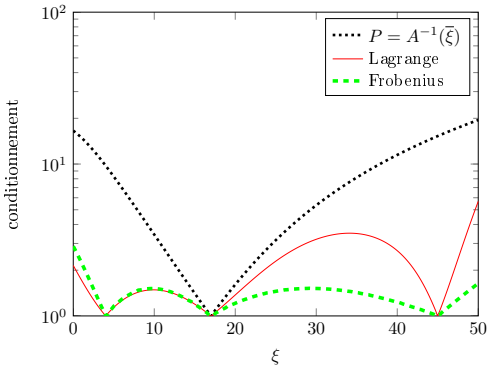


FIGURE 1 – Conditionnement de $P(\xi)A(\xi)$ en fonction de ξ, avec points d'interpolation en $\xi_1 = 4$, $\xi_2 = 17$, $\xi_3 = 45$ et $P_i = A^{-1}(\xi_i)$. Comparaison entre : un préconditionneur constant $P = A^{-1}(\xi_2)$, une méthode d'interpolation Lagrangienne, et la méthode proposée basée sur (2). L'équation considérée est une équation d'advection diffusion $u'' + \xi u' = 1$ avec $u(0) = u(1) = 0$ et $\xi \in [0, 50]$.

Concernant les points d'interpolation, nous considérons (a) des points choisis arbitrairement (comme illustré figure 1) et (b) une approche constructive qui selectionne itérativement les points où la norme $\|I - P(\xi)A(\xi)\|_F$ est la plus élevée (voir figure 2). Cette dernière approche s'apparente à une méthode d'interpolation empirique [6] appliquée à l'approximation d'inverse d'opérateur.

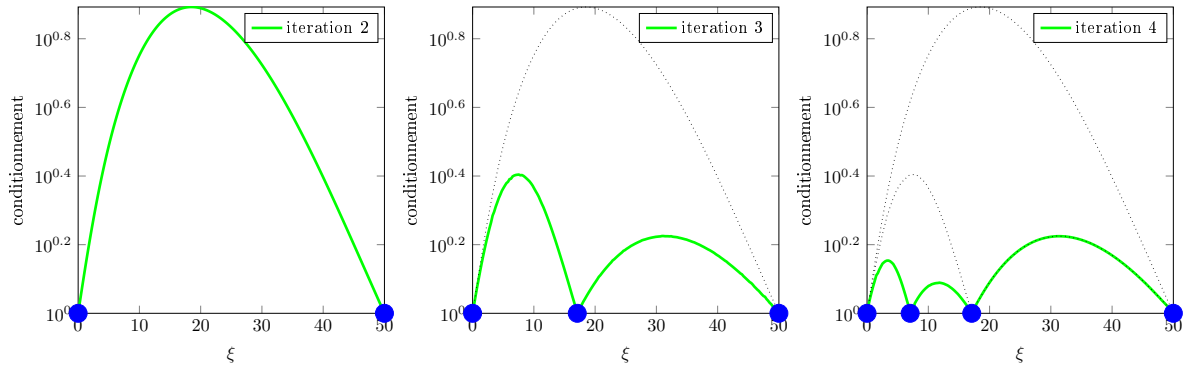


FIGURE 2 – Approche constructive pour les points d'interpolation.

Enfin, nous montrons comment utiliser de tels préconditionneur pour des méthodes de réduction de modèle, comme Reduced Basis et Proper Generalized Decomposition. En particulier nous montrons que pour une dimension donnée, le modèle réduit est de meilleure qualité, et l'estimation de l'erreur (par norme du résidu préconditonné) est plus proche de l'erreur réelle.

Références

[1] Y. Chen, S. Gottlieb, Y. Maday. *Parametric Analytical Preconditioning and its Applications to the Reduced Collocation Methods*, arXiv :1403.7273, 2014.

[2] F. Chinesta, P. Ladevèze, E. Cueta. *A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition*, Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 18, p. 395-404, 2011.

[3] L. Gonzáles. *Orthogonal projections of the identity : spectral analysis and applications to approximate inverse preconditioning*, SIAM Review, Vol. 48, pp. 1-10, 2006.

[4] Grote, M. J., Huckle, T. *Parallel Preconditioning with Sparse Approximate Inverses*, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 18, Num3, pp. 838-853, 1997.

[5] Hutchinson M.F. *A Stochastic Estimator of the Trace of the Influence Matrix for Laplacian Smoothing Splines*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, Volume 18, Issue 3, 1989.

[6] Maday Y., Mula O. *A generalized empirical interpolation method : application of reduced basis techniques to data assimilation*, Analysis and Numerics of Partial Differential Equations, Volume 13, pp. 221-236, 2013.

[7] G. Rozza, D. Huynh, A. Patera. *Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equation*, Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 15, p. 229-275, 2008.