

Enquêter dans les graphes[†]

Nathann Cohen¹ et Nicolas A. Martins² et Fionn Mc Inerney³ et Nicolas Nisse³ et Stéphane Pérennes³ et Rudini Sampaio²

¹CNRS, Univ Paris Sud, LRI, Orsay, France

²Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brésil

³Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, I3S, France

Les jeux combinatoires à deux joueurs impliquant des agents mobiles dans les graphes (e.g., jeu des gendarmes et du voleur, jeu du dominant éternel, etc.) ont été beaucoup étudiés car ils permettent, d'une part, de comprendre comment coordonner des individus afin de réaliser une tâche commune, et d'autre part d'étudier les propriétés structurelles des graphes. Outre la définition et l'étude d'un nouveau de ces jeux, une contribution importante de cet article est de montrer que la programmation linéaire permet de nouveaux progrès dans l'étude de ce type de jeux.

Nous définissons le jeu dans lequel un premier agent, le *Suspect*, se déplace dans un graphe à vitesse $s \geq 2$ à la recherche d'une position à distance au moins $d + 1$ de tous les autres agents, les *Détectives*, qui veulent le surveiller (i.e. s'assurer qu'il y ait toujours au moins un détective à distance au plus d du suspect). Étant donné un graphe G , le nombre minimum de détectives nécessaires pour satisfaire cet objectif est noté $gn_{s,d}(G)$. Le problème est de calculer $gn_{s,d}(G)$ ainsi qu'une stratégie correspondante pour les détectives. Ce jeu à deux joueurs (suspect et détectives) ressemble aux jeux de gendarmes et voleur et généralise celui du Dominant éternel.

Nous étudions la complexité du calcul de $gn_{s,d}(G)$ et présentons des stratégies gagnantes pour les détectives dans diverses classes de graphes. Certaines de nos preuves sont combinatoires, tandis que d'autres sont basées sur l'utilisation de la Programmation Linéaire dont nous espérons démontrer ainsi l'intérêt dans l'analyse de ce type de jeux.

Mots-clefs : Jeux combinatoires à deux joueurs dans les graphes, Jeu de Gendarmes et Voleur, Programmation Linéaire

1 Introduction

Depuis l'annonce du lieu d'AlgoTel 2017 (i.e. la presqu'île de Quiberon), la principale question est d'en connaître le "social event". Pour cela, de nombreux participants ont décidé d'engager des détectives pour surveiller les faits et gestes de l'organisateur (appelons-le "Yann"). Pour espérer éventer le secret du "social event", les détectives doivent toujours surveiller Yann en étant en permanence près de lui. Cependant, Yann connaît Quiberon comme sa poche et s'y déplace rapidement, alors que les détectives sont plus lents. Pour des raisons financières évidentes, les participants d'AlgoTel veulent embaucher un nombre minimum k de détectives qui leur permettent de toujours surveiller Yann. Le problème étudié dans cet article est celui de déterminer k ainsi qu'une stratégie permettant aux k détectives de toujours surveiller le détenteur du secret.

Plus précisément, soient $G = (V, E)$ un graphe et deux entiers $s \geq 2$ et $d \geq 0$. Nous considérons le jeu tour-à-tour suivant. Initialement, un *suspect* se place sur un sommet de V . Puis $k \geq 1$ détectives se placent sur des sommets de V . Un même sommet peut être occupé par le suspect et par plusieurs détectives. Tour-à-tour, le suspect se déplace d'abord à vitesse s (i.e., sur un sommet à distance au plus s de sa position courante), puis, chaque détective se déplace à vitesse 1. Le jeu est à information complète, i.e. le suspect et les détectives connaissent leurs positions respectives. Le suspect gagne si, à la fin d'un tour (après le déplacement des détectives), il occupe un sommet à distance au moins $d + 1$ de tous les détectives. Donc, les détectives veulent s'assurer qu'à chaque étape au moins un détective est à distance au plus d du suspect. Les détectives gagnent s'ils évitent cela indéfiniment. Soit $gn_{s,d}(G)$ le nombre minimum de détectives qui peuvent gagner quelle que soit la stratégie du suspect.

[†]Quelques résultats présentés ici ont été publiés dans [CHM⁺16]. Les preuves sont ici [CMI⁺17] et [CINP17]. Ce travail a été supporté par ANR Stint (ANR-13-BS02-0007), ANR "Investments for the Future" (ANR-11-LABX-0031-01), l'équipe Associée Inria AlDyNet et le projet GAIATO (INC-0083-00047.01.00/13, avec Univ. Fédérale de Ceara, Brésil).

Pour déterminer $gn_{s,d}$ et une stratégie gagnante pour les détectives dans certaines classes de graphes, nous utilisons le cadre des jeux *fractionnaires* [GNPS13]. Précisément, nous étudions la “relaxation fractionnaire” de notre jeu. Dans celle-ci, les règles restent inchangées pour le suspect. Les détectives, par contre, ne sont plus des entités entières. À chaque tour, un sommet v est occupé par une quantité $g_v \in \mathbb{R}^+$ de détectives. Le “nombre” total de détectives utilisés est $\sum_{v \in V} g_v$. Les mouvements des détectives sont représentés par des flots : à chaque tour, un sommet peut envoyer une fraction de détectives à chacun de ses voisins. Enfin, il faut s’assurer qu’à chaque tour, $\sum_{v \in N_d[x]} g_v \geq 1$ avec $N_d[x]$ l’ensemble des sommets à distance au plus d de la position x du suspect. Soit $fgn_{s,d}(G)$ le nombre minimum de détectives pour gagner le jeu dans sa version fractionnaire. Par définition, $fgn_{s,d}(G) \leq gn_{s,d}(G)$ pour tout graphe G et $s \geq 2, d \geq 0$.

État de l’art. De nombreux jeux impliquant la coordination d’agents mobiles dans les graphes ont été étudiés. Notre problème est proche de celui du gendarmes et voleur [BN11] où une équipe de gendarmes doit capturer un voleur (i.e., un gendarme doit atteindre le même sommet que le voleur). Plusieurs variantes ont été étudiées dans lesquelles : le voleur est plus rapide que les gendarmes [FGK⁺10], ou la capture a lieu si un gendarme s’approche à distance $d \geq 0$ du voleur, etc. L’étude de ces jeux a contribué à l’étude structurelle des graphes [KLNS15]. Par ailleurs, notre problème généralise celui du Dominant éternel [GHH05]. Dans ce dernier, une équipe d’agents occupe les sommets d’un graphe. Le but est qu’à chaque tour, et pour tout sommet v , les agents soient capables de bouger (chaque agent peut se déplacer sur un sommet adjacent) de telle sorte que v soit occupé. Il s’agit exactement de notre jeu lorsque $d = 0$ et s est au moins le diamètre du graphe (i.e., le suspect peut aller n’importe où à chaque tour). Le problème du Dominant Eternel a été étudié dans de nombreuses classes de graphes dont les arbres [KM09] ou les grilles [FMvB15].

Résultats. Nous initions l’étude du problème, pour tout $d \geq 0$ et $s \geq 2$, en montrant que le calcul de $gn_{s,d}$ est NP-difficile en général et en le considérant dans plusieurs classes de graphes. Une approche “traditionnelle” nous permet de concevoir des stratégies (quasi-) optimales dans les chemins, les cycles et certains graphes aléatoires. Le problème s’avère plus difficile dans les arbres ou les grilles. Pour pallier cela, nous considérons la version fractionnaire du problème. L’étude de cette relaxation nous permet dans le cas des arbres de déduire que le calcul d’une stratégie optimale entière peut être effectué en temps polynomial. Dans le cas des grilles $G_{n \times n}$ de côté n , cela nous permet de borner le comportement asymptotique de $fgn_{s,d}$. Précisément, nous prouvons que $fgn_{s,d}(G_{n \times n})$ est sous-quadratique et sur-linéaire en n . Cela donne la première borne inférieure sur-linéaire (en n) pour $gn_{s,d}(G_{n \times n})$.

2 Approche “traditionnelle”

Nous considérons le calcul de $gn_{s,d}$ dans certaines classes de graphes, en utilisant des méthodes “classiques” d’étude des jeux combinatoires dans les graphes. Les preuves sont accessibles ici [CMI⁺17].

2.1) Complexité. Calculer $gn_{s,d}$ est NP-difficile dans une classe de graphes relativement “simples” (i.e., des graphes G contenant une clique K telle que $G \setminus K$ est une union de chemins disjoints). Ce résultat est obtenu par une réduction de “Set Cover”. Beaucoup des jeux combinatoires sont PSPACE-difficile voire EXPTIME-complet. Nous ne connaissons pas le statut exact de la complexité de notre problème, mais nous prouvons qu’une variante contrainte de celui-ci est PSPACE-difficile dans les graphes orientés acycliques.

2.2) Warm-up : graphes de petit diamètre. Commençons par un exemple simple. Nous prouvons que, pour tous $s \geq 2, d > 0$ et G de diamètre au plus 2, $gn_{s,d}(G) = 1$. Dans ce cas, nous donnons une stratégie gagnante pour un détective. Initialement, le détective se place sur le même sommet que le suspect. À chaque tour, le détective va sur un sommet adjacent à la position du suspect (possible puisque G a diamètre ≤ 2). Ce résultat s’applique aux graphes aléatoires $G(n, p)$ (avec n sommets tel que chaque arête existe avec probabilité p) tels que p est constant ou $p > \sqrt{2 \log(n)/n}$ puisque, a.a.s., ces graphes ont diamètre ≤ 2 .

2.3) Chemins et Cycles. Une stratégie optimale peut être calculée en temps polynomial dans les chemins.

Théorème 1. *Pour tout $s > 1, d \geq 0$ et P un chemin de n sommets, $gn_{s,d}(P) = \left\lceil \frac{n}{2d+2+\lfloor \frac{2d}{s-1} \rfloor} \right\rceil$.*

Esquisse de preuve. Considérons un suspect qui part d’une extrémité (disons à gauche) du chemin et va à pleine vitesse s vers l’extrémité droite. Initialement, un détective D_1 doit être à distance au plus d du suspect. Après $\lfloor \frac{2d}{s-1} \rfloor + 1$ tours, D_1 ne peut qu’être à distance au moins $d+1$ à gauche du suspect. Il doit donc y avoir

un second détective D_2 à distance au plus d du suspect. Après de nouveaux $\lfloor \frac{2d}{s-1} \rfloor + 1$ tours, le suspect a “éliminé” D_2 (il est à distance au moins $d+1$ à gauche du suspect et ne pourra jamais le rattraper). Répéter cet argument jusqu’à ce que tous les détectives soient “éliminés” permet de prouver la borne inférieure.

Pour la borne supérieure, nous prouvons qu’un unique détective est suffisant pour surveiller le suspect sur un chemin de longueur $x = 2d + 2 + \lfloor \frac{2d}{s-1} \rfloor$. Par exemple, pour $s = 2$ et $d = 1$, il est facile de montrer qu’un unique détective peut surveiller un suspect dans un chemin de longueur 5 (avec 6 sommets). Ainsi, P est divisé en $\lceil n/x \rceil$ sous-chemins disjoints de longueur au plus x , chacun affecté à un détective. \diamond

Dans le cas des cycles, les preuves sont similaires bien que plus techniques. En effet, pour la borne inférieure, un détective “éliminé” (i.e., “trop à gauche”) par la course du suspect peut revenir en suivant le cycle en sens inverse du suspect. Pour la borne supérieure, il semble qu’il ne soit pas possible d’affecter une portion du cycle à chaque détective. Nous prouvons cependant que, pour tout cycle C_n de n sommets :

Théorème 2. *Pour tout $s > 1$, $d \geq 0$ et $q = \lfloor \frac{2d}{s-1} \rfloor$. Soient $2d = q(s-1) + r$ et $2d = q's + r'$ ($0 \leq r' < s$). Soit $(q^*, r^*) = (q, r)$ si s est impair et $(q^*, r^*) = (q', r')$ sinon.*

$$gn_{s,d}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2d+3} \right\rceil \text{ lorsque } q = 0, \text{ et sinon } \left\lceil \frac{n+2q}{2(d+q)+3} \right\rceil \leq gn_{s,d}(C_n) \leq \left\lceil \frac{n+2q^*}{2(d+q^*)-r^*} \right\rceil$$

3 Utilisons la programmation linéaire

Dans cette section, nous considérons notre problème dans le cas des arbres et des grilles. Nos résultats reposent sur la version fractionnaire du problème. Les preuves apparaissent dans [CINP17]. Dans le cas des arbres, le problème semble plus compliqué. Nous avons des bornes presque serrées (sur $gn_{s,d}$) pour les arbres avec un unique sommet de degré ≥ 3 , cependant, concevoir une stratégie optimale pour les détectives, de façon combinatoire, dans tout arbre reste ouvert. Une raison de cette difficulté est qu’il existe dans les chemins une stratégie optimale qui divise les sommets en sous-chemins, chacun surveillé par un nombre constant de détectives (cf. Th. 1). Ce type de stratégies optimales “intuitives” n’existe pas dans les arbres.

Notons qu’une stratégie pour k détectives est définie comme une fonction $\omega : V^k \times V \rightarrow V^k$ qui, étant données les positions courantes P des détectives et celle du suspect v , affecte les nouvelles positions $\omega(P, v) = P'$ des détectives, telle que P' peut être obtenue de P en déplaçant les détectives sur des sommets adjacents. Dans cette section, nous considérons des stratégies *restreintes* qui ne dépendent que de la position du suspect. C’est-à-dire, une *stratégie restreinte* est une fonction $\omega : V \rightarrow V^k$ qui, pour toute position $v \in V$ du suspect, définit un unique ensemble de positions $\omega(v) \subseteq V$ pour les k détectives (donc, chaque mouvement des détectives ne dépend que de la position du suspect pas de celles des autres détectives). Soit $fgn_{s,d}^*(G)$ le nombre minimum $k \in \mathbb{R}^+$ de détectives tels qu’il existe une stratégie fractionnaire restreinte utilisant k détectives pour surveiller un suspect avec vitesse s et à distance d . Notons que $fgn_{s,d}(G) \leq fgn_{s,d}^*(G)$ (puisque une stratégie restreinte est plus contrainte).

Théorème 3. *Pour tout $s > 1$, $d \geq 0$ et tout graphe G , $fgn_{s,d}^*(G)$ et une stratégie restreinte correspondante peuvent être calculés en temps polynomial (en la taille de G).*

Esquisse de preuve. Nous décrivons un programme linéaire (de taille polynomiale en celle de G) qui calcule $fgn_{s,d}^*(G)$ et une stratégie restreinte ω correspondante. Pour $x, u \in V$, soit $\omega_{x,u} \in \mathbb{R}^+$ la variable qui indique la quantité de détectives occupant u quand le suspect est sur x . Pour tout $x' \in N_s[x]$, $u' \in N_1[u]$, soit $f_{x,x',u,u'} \in \mathbb{R}^+$ la variable qui indique la quantité de détectives qui se déplace de u à u' quand le suspect va de x à x' .

$$\text{Minimize } \sum_{v \in V} \omega_{v_0,v} \quad (1) \quad \forall u \in V, x' \in N_s[x] \sum_{u' \in N_1[u]} f_{x,x',u,u'} = \omega_{x,u} \quad (3)$$

$$\forall x \in V, \sum_{v \in N_d[x]} \omega_{x,v} \geq 1 \quad (2) \quad \forall u \in V, x' \in N_s[x] \sum_{u' \in N_1[u]} f_{x,x',u,u'} = \omega_{x,u} \quad (4)$$

L’équation 1 permet de minimiser le nombre de détectives utilisés ($v_0 \in V$ est un sommet arbitraire). L’équation 2 implique que le suspect est surveillé (à distance d) quelle que soit sa position x . Les équations 3 et 4 impliquent que lorsque le suspect passe de la position x à la position x' (à distance $\leq s$ de x), il existe des mouvements valides (un flot valide) pour les détectives. \diamond

Le programme linéaire précédent peut être adapté pour décider, pour tout graphe G , si $fgn_{s,d}(G) \leq k$, mais requiert alors des variables $\omega_{C,u} \in \mathbb{R}^+$ décrivant la quantité de détectives occupant u quand le suspect est sur x et que les détectives occupent les sommets de C , $\forall u \in V$ et multi-ensemble C de k sommets. Ce programme est de taille polynomiale lorsque k est fixé. Pour pallier ce problème, il est important de ne considérer que les stratégies restreintes, ce qui est possible dans les arbres comme indiqué ci-dessous.

Théorème 4. *Pour tout $s > 1$, $d \geq 0$ et tout arbre T , $gn_{s,d}(T)$ et une stratégie correspondante peuvent être calculés en temps polynomial.*

Esquisse de preuve. Nous prouvons que, dans la classe des arbres T , $fgn_{s,d}^*(T) = fgn_{s,d}(T)$, c'est-à-dire que dans les arbres, il existe toujours une stratégie fractionnaire optimale qui est restreinte. D'après le Théorème 3, une telle stratégie peut être calculée en temps polynomial. Puis, nous montrons que toute stratégie fractionnaire utilisant $k > 0$ détectives dans un arbre peut être transformée, en temps polynomial, en une stratégie "entière" utilisant $\lfloor k \rfloor$ détectives, en particulier, $fgn_{s,d}(T) = gn_{s,d}(T)$ pour tout arbre T . \diamond

Nous étudions finalement notre problème dans les grilles. Clairement, $gn_{s,d}(G_{n \times n}) = O(n^2)$ dans toute grille $G_{n \times n}$ de côté n , mais obtenir une meilleure estimation semble difficile. Nous prouvons d'abord que $gn_{s,d}(T_{n \times n})/4 \leq gn_{s,d}(G_{n \times n}) \leq 4gn_{s,d}(T_{n \times n})$ avec $T_{n \times n}$ le tore $n \times n$. Notons que, puisque $T_{n \times n}$ est sommet-transitif (tous les sommets étant identiques, on peut considérer uniquement le cas où le suspect occupe un sommet arbitraire $v_0 \in V$), toute stratégie fractionnaire restreinte pour $T_{n \times n}$ est définie par une fonction $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\omega(v)$ représente la quantité de détectives occupant v quand le suspect est sur v_0 . Nous prouvons (utilisant une relation min-cut/max-flot non-triviale) qu'il existe une constante $c > 0$ telle que la fonction $\omega^* : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\omega^*(v) = \frac{c}{(dist(v,v_0)+1)^{\log(3/2)}}$ (avec $dist(v,v_0)$ est la distance entre v et v_0) est une stratégie permettant à $O(n^{2-\log(3/2)})$ détectives de gagner face au suspect dans $T_{n \times n}$. Ainsi,

Théorème 5. *Il existe $\log(3/2) \leq \alpha$, tel que pour tout $s > 1$ et $d \geq 0$, $fgn_{s,d}(G_{n \times n}) \leq O(n^{2-\alpha})$.*

Finalement, nous prouvons que $\exists \beta > 0$, tel que $\Omega(n^{1+\beta}) \leq fgn_{s,d}(G_{n \times n})$. Cela implique que :

Théorème 6. *Il existe $\beta > 0$, tel que pour tout $s > 1$ et $d \geq 0$, $\Omega(n^{1+\beta}) \leq gn_{s,d}(G_{n \times n})$.*

4 Conclusion

Il reste de nombreuses questions pour notre problème. Entre autre, il serait intéressant de déterminer $gn_{s,d}(G_{n \times n})$. En particulier, est-il vrai que $gn_{s,d}(G_{n \times n}) = \Theta(gn_{s',d'}(G_{n \times n}))$ pour tous s, s', d, d' ? Peut-on par ailleurs approcher $gn_{s,d}$ en temps polynomial dans certaines classes de graphes ? Quelle est la complexité de calculer $gn_{s,d}$ en général ? Finalement, pour quels autres jeux combinatoires l'approche "fractionnaire" apporte t'elle de nouveaux résultats ?

Références

- [BN11] A. Bonato and R. Nowakowski. *The game of Cops and Robbers on Graphs*. American Math. Soc., 2011.
- [CHM⁺16] N. Cohen, M. Hilaire, N. A. Martins, N. Nisse, and S. Pérennes. Spy-game on graphs. In *8th International Conference on Fun with Algorithms, FUN 2016*, volume 49 of *LIPICs*, pages 10:1–10:16, 2016.
- [CINP17] N. Cohen, F. Mc Inerney, N. Nisse, and S. Pérennes. Spy-game in trees and grids, 2017. RR, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01462890>.
- [CMI⁺17] N. Cohen, N.A. Martins, F. Mc Inerney, N. Nisse, S. Pérennes, and R. Sampaio. Spy-game on graphs : complexity and simple topologies, 2017. RR, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01463297>.
- [FGK⁺10] F. V. Fomin, P. A. Golovach, J. Kratochvíl, N. Nisse, and K. Suchan. Pursuing a fast robber on a graph. *Theor. Comput. Sci.*, 411(7-9) :1167–1181, 2010. "Voleur véloce dans un réseau planaire" dans **AlgoTel 2008**.
- [FMvB15] S. Finbow, M-E. Messinger, and M. van Bommel. Eternal domination in $3 \times n$ grids. *Australas. J. Combin.*, 61 :156–174, 2015.
- [GHH05] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, and S.T. Hedetniemi. Eternal security in graphs. *J. Combin.Math.Comb.Comp.*, 52, 2005.
- [GNPS13] F. Giroire, N. Nisse, S. Pérennes, and R.P. Soares. Fractional combinatorial games, 2013. RR8371, <http://hal.inria.fr/hal-00865345/PDF/RR-8371.pdf>. Publié dans **AlgoTel 2013**.
- [KLNS15] A. Kosowski, B. Li, N. Nisse, and K. Suchan. k-chordal graphs : From cops and robber to compact routing via treewidth. *Algorithmica*, 72(3) :758–777, 2015. Publié dans **AlgoTel 2012**.
- [KM09] W.F. Klostermeyer and G. MacGillivray. Eternal dominating sets in graphs. *J. Combin.Math.Combin.Comput.*, 68, 2009.