HAL
archives-ouvertes.fr

Sur la théorie des méconnaissances en élasticité anisotrope

Paul Enjalbert, Pierre Ladevèze, François Louf, Thierry Romeuf

▶ To cite this version:

Paul Enjalbert, Pierre Ladevèze, François Louf, Thierry Romeuf. Sur la théorie des méconnaissances en élasticité anisotrope. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01504163

HAL Id: hal-01504163
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01504163

Submitted on 8 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Sur la théorie des méconnaissances en élasticité anisotrope

Paul Enjalbert[*] — Pierre Ladevèze[*,] — François Louf[*] — Thierry Romeuf[***]**

[*] *LMT-Cachan (ENS Cachan / CNRS / Paris 6)*
61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex

{enjalbert,ladeveze,louf}@lmt.ens-cachan.fr
6pt]
[**] *EADS Foundation Chair "Advanced Computational Structural Mechanics"*
6pt]
[***] *EADS Space Transportation*
Route de Verneuil BP96, F-78133 Les Mureaux Cedex

thierry.romeuf@space.eads.net

RÉSUMÉ. *La théorie des méconnaissances répond au problème de la validation des modèles en mécanique des structures en étendant le concept de coefficient de sécurité. Dans cet article, nous introduisons une description par opérateur de méconnaissances (LOK pour Lack-Of-Knowledge) pour traiter des problèmes d'élasticité anisotrope.*

ABSTRACT. *As an extension of safety factors, the Lack-Of-Knowledge (LOK) theory is an answer to model validation problems in structural mechanics. We introduce a LOK operator for orthotropic elasticity problems. This refined model is illustrated on academic and industrial examples.*

MOTS-CLÉS : *mécanique des structures, validation, incertitudes, théorie des méconnaissances*

KEYWORDS: *structural mechanics, validation, uncertainties, Lack-Of-Knowledge (LOK) theory*

1re soumission à *Giens 2007*, le 9 février 2007

1. Introduction

La validation de modèles est devenu un domaine clé de la mécanique des structure, même si certains pensent qu'un modèle ne peut qu'être invalidé, mais jamais validé (Popper, 2003, Oden *et al.,* 2003, Hemez *et al.,* 2004, Oberkampf *et al.,* 2003, Saltelli *et al.,* 2004). Le mot "validation", souvent utilisé par les ingénieurs, définit une procédure assurant que la structure en phase de conception se comportera comme prévu une fois produite. Lorsque subsiste un manque de connaissance, des coefficients de sécurité sont introduits afin de rester conservatif. Cependant, dans le contexte de "réalité ingénieur", la validation est un réel problème. Le challenge est d'aller au-delà du côté philosophique en élaborant des outils pratiques qui puissent être appliqués à des vrais problèmes industriels (voir (Ladevèze, 2006)). La description des incertitudes est aujourd'hui au coeur de toute approche de validation. La modélisation probabiliste est très répandue (Schuëller, 2001). D'autres approches existent, comme dans (Ben-Haim, 2001, Klir, 1991, Walley, 1990, Moore, 1979), qui n'utilisent pas de modélisations probabilistes.

2. Le problème de validation de modèles

Nous proposons ici la théorie des méconnaissances (*Lack-Of-Knowledge (LOK) theory en anglais*), introduite dans (Ladevèze, 2002b), et dont les premières applications furent présentées dans (Ladevèze *et al.,* 2006), pour tenter de répondre de façon pragmatique au problème de validation dans le cadre de la réalité ingénieur. Elle permet de prendre en compte toutes les sources d'incertitudes, même les erreurs de modèle, à travers le concept de méconnaissances de base. Cela peut être vu comme une extension des coefficients de sécurité (Ladevèze, 2002b, Ladevèze *et al.,* 2006). Nous ne présentons ici que la théorie et les résultats d'une extension permettant de traiter efficacement des problèmes élastiques anisotropes avec dispersion de rigidité.

2.1. *Le concept de méconnaissances de base sur la rigidité, cas anisotrope*

Nous considérons ici une famille de structures quasi-identiques dans un environnement indépendant du temps (mais pas très bien connu).

La description adoptée est basée sur la théorie de l'endommagement anisotrope proposée dans (Ladevèze, Elsevier Science Publishing Company, 2002a). On définit pour chaque structure étudiée le tenseur de Hooke $\mathcal{K}$ et $E(n)$ (resp. $\gamma(n)$) le module d'Young (resp. le module de déformation volumique) dans la direction n : $\frac{1}{E(n)} = n^T \mathcal{K}\,(nn^T)n$ et $\frac{1}{\gamma(n)} = Tr[\mathcal{K}\,(nn^T)]$ Réciproquement, il a été montré dans (Ladevèze, Elsevier Science Publishing Company, 2002a) que ces fonctions définissent complètement $\mathcal{K}$. Soient $\overline{E}(n)$ le module d'Young et $\overline{\gamma}(n)$ la déformation volumique du modèle EF. Nous introduisons deux méconnaissances m_E et m_γ :

$$m_E(n) = \frac{\overline{E}(n) - E(n)}{\overline{E}(n)} \tag{1a}$$

$$m_\gamma(n) = \frac{\overline{\gamma}(n) - \gamma(n)}{\overline{\gamma}(n)} \tag{1b}$$

où E et γ sont les valeurs de la structure réelle étudiée. La description avec des méconnaissances isotropes détaillée précédemment revient à prendre $m_E(n) = m_\gamma(n) = m_\mathrm{E}$ sur chaque sous-structure E. Nous proposons ici une approximation au premier ordre pour la fonction $\frac{1}{1-m_E(n)}$, et une approximation d'ordre zéro pour $m_\gamma(n)$:

$$\frac{1}{1-m_E(n)} = n^T[\mathbb{I} - \mathbb{M}_E]^{-1}n \tag{2a}$$

$$\frac{1}{1-m_\gamma(n)} = \frac{1}{1-m_\gamma} \tag{2b}$$

où $\mathbb{M}_E$ est un opérateur linéaire symétrique. La loi de comportement est alors :

$$\varepsilon = \frac{1}{\overline{E}}[M_E\sigma_D]_D + \frac{1-2\overline{\nu}}{\overline{E}}.\frac{1}{1-m_\gamma}[Tr[\sigma]Id - \sigma] \tag{3}$$

où la notation $[.]_D$ correspond au déviateur du tenseur considéré, et $M_E = 3[\mathbb{I} - \mathbb{M}_E]^{-1} - \frac{1}{2}Tr[[\mathbb{I} - \mathbb{M}_E]^{-1}]\mathbb{I}$. Pour une structure 2D orthotrope, dans la base d'orthotropie, l'opérateur de méconnaissances $\mathbb{M}_E$ est diagonal : $\mathbb{M}_E = \begin{pmatrix} m_{E_1} & 0 \\ 0 & m_{E_2} \end{pmatrix}$ L'opérateur de Hooke s'exprime alors :

$$\widehat{\mathcal{K}} = \overline{E}(1-m_{E_1})\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \overline{E}(1-m_{E_2})\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2\overline{E}}{1-2\overline{\nu}}(1-m_\gamma)\Bigg($$

Cette description des méconnaissances utilisant des opérateurs de méconnaissances permet une modélisation plus fine des incertitudes d'une famille de structures considérées : le niveau de méconnaissance peut être différent d'un paramètre à l'autre.

2.2. *Méconnaissance effective sur une quantité d'intérêt*

Soit $\underline{x}$ la solution de l'équation $\mathbb{K}\underline{x} = \underline{F}$ où $\mathbb{K}$ est la matrice de rigidité et $\underline{F}$ l'effort généralisé. Soit $\underline{m}$ l'ensemble de toutes les méconnaissances de base, associées à la rigidité et aux efforts appliqués. A chaque valeur de $\underline{m}$ on peut associer des rigidités et efforts . Les ensembles correspondants $\mathcal{K}_m$ et $\mathcal{F}_m$ sont paramètrés par $\underline{m}$.

Dans cette nouvelle approche de modélisation de familles de structures, on définit une enveloppe de la réponse de la structure étudiée. Cette enveloppe est associée à

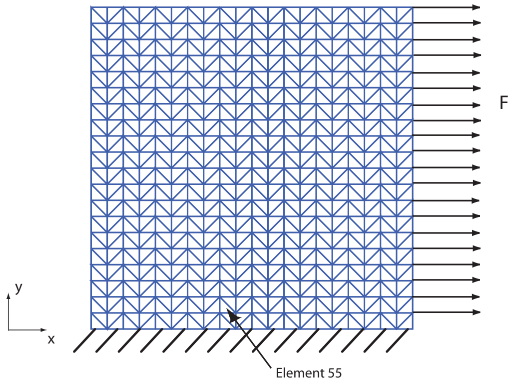

Figure 1. *La plaque étudiée.*

l'équation $\mathbb{K}(\theta)\underline{x} = \underline{F}(\theta)$, où $\mathbb{K}(\theta) \in \mathcal{K}_{m(\theta)}$ et $\underline{F}(\theta) \in \mathcal{F}_{m(\theta)}$. Pour une quantité d'intérêt $\alpha(\theta)$ (de valeur EF $\overline{\alpha}$), par exemple une contrainte locale, on calcule la méconnaissance effective :

$$-\Delta\alpha^{-}(\theta) \leq \alpha(\theta) - \overline{\alpha} \leq \Delta\alpha^{+}(\theta) \tag{4}$$

La quantité d'intérêt α est une fonction de $\mathbb{K}$ et $\underline{f}$: $\alpha = \mathbb{L}(\mathbb{K}, \underline{f})$, de valeur EF $\overline{\alpha} = \mathbb{L}(\overline{\mathbb{K}}, \overline{\underline{f}})$. On a donc :

$$\Delta\alpha^{+}(\theta) = \sup_{\substack{\mathbb{K}(\theta)\in\mathcal{K}_{m(\theta)} \\ \underline{F}(\theta)\in\mathcal{F}_{m(\theta)}}} [\mathbb{L}(\mathbb{K}, \underline{f}) - \overline{\alpha}] \tag{5a}$$

$$\Delta\alpha^{-}(\theta) = -\inf_{\substack{\mathbb{K}(\theta)\in\mathcal{K}_{m(\theta)} \\ \underline{F}(\theta)\in\mathcal{F}_{m(\theta)}}} [\mathbb{L}(\mathbb{K}, \underline{f}) - \overline{\alpha}] \tag{5b}$$

Si les méconnaissances de base sont suffisamment petites, après linéarisation on obtient des expressions simples (non détaillées ici) des bornes $\Delta\alpha^{-}(\theta)$ et $\Delta\alpha^{+}(\theta)$ de méconnaissance effective en fonction de l'opérateur de méconnaissances $\underline{m}$.

3. Un exemple de propagation de méconnaissances anisotropes

3.1. *Le modèle associé*

Nous appliquons ici la propagation à une plaque orthotrope (voir Figure 1) avec des méconnaissance anisotropes sur les rigidités. La plaque étudiée est en matériau NIDA : il est constitué d'un coeur et de 7 plis de matériau composite (voir Table 1 pour les paramètres matériau).

La structure étudiée est soumise à un effort quasi-statique F (voir figure 1). La description des méconnaissances sur les rigidités adoptée est anisotrope. L'opérateur de méconnaissances est supposé diagonal.

Tableau 1. *Composition de la plaque.*

Partie	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}	ρ
coeur	215 GPa	7.5 GPa	2.88 GPa	0.30	1400 kg/m^3
plis	0.1 GPa	0.07 GPa	90 MPa	0.40	140 kg/m^3

3.2. *Résultats de la propagation*

La propagation est menée sous CAST3M. La quantité d'intérêt est ici la contrainte EF locale $\overline{\sigma}_{xx}$ moyennée sur un élément. La description des méconnaissances adoptée pour les plis est la même que pour le coeur : $m_{E_1}(\theta) = m_{E_{1_0}}(\theta)$, $m_{E_2}(\theta) = m_{E_{2_0}}(\theta)$ and $m_\gamma(\theta) = m_{\gamma_0}(\theta)$. Ces méconnaissances sur la rigidité suivent des lois gaussiennes. Les résultats de propagation de ce modèle avec $(m_{E_1}(\theta), m_{E_2}(\theta), m_\gamma(\theta))$ sur la contrainte moyenne sur l'élément 55 (voir Figure 1) sont présentés dans le Tableau 2.

Tableau 2. *Modèle avec opérateur de méconnaissances (bornes à 99%).*

bornes $[-\overline{m}_{E_1}^-, \overline{m}_{E_1}^+]$	bornes $[-\overline{m}_{E_2}^-, \overline{m}_{E_2}^+]$	bornes $[-\overline{m}_\gamma^-, \overline{m}_\gamma^+]$	bornes [-$\Delta\sigma^-_{\text{xx mod}}$, $\Delta\sigma^+_{\text{x}}$
± 7 %	± 7 %	± 7 %	$[-3,9\%;+4,4\%]\ \overline{\sigma}$
± 7 %	aucune	aucune	$[-3,9\%;+4,4\%]\ \overline{\sigma}$
aucune	± 7 %	aucune	$[-0,1\%;+1\%]\ \overline{\sigma}^{5}_{\text{x}}$
aucune	aucune	± 7 %	$[-0,002\%;+0,2\%]$
± 7 %	± 15 %	aucune	$[-3,9\%;+4,4\%]\ \overline{\sigma}$

Avant tout, il est intéressant de noter que l'ordre de grandeur de dispersion de la quantité d'intérêt est le même que celui de la valeur de méconnaissance de base. L'effet d'une méconnaissance $m_\gamma(\theta)$ est insignifiant comparé à celui d'une méconnaissance $m_{E_1}(\theta)$ ou $m_{E_2}(\theta)$: il ne modifie que le coefficient de Poisson et le module de distorsion de la structure, qui sont peu influents dans ce cas de chargement. L'effet de $m_{E_2}(\theta)$ est aussi moins important que celui de $m_{E_1}(\theta)$, ce qui signifie que, dans ce cas de chargement, et pour cette quantité d'intérêt, le module d'Young E_1 a un rôle majeur dans la rigidité de la structure. Dans ce cas, il n'est pas grave d'avoir une forte valeur de méconnaissance $m_{E_2}(\theta)$.

Tableau 3. *Modèle avec méconnaissances scalaires sur la rigidité pour la plaque orthotrope (bornes à 99%).*

bornes $[-\overline{m}_E^-, \overline{m}_E^+]$	bornes [-$\Delta\sigma^-_{\text{xx mod}}$, $\Delta\sigma^+_{\text{xx mod}}$]
± 7 % sur chaque élément	$\pm 85\%\ \overline{\sigma}^{55}_{\text{xx}}$

Le Tableau 3 présente les résultats de la propagation d'un modèle avec méconnaissances sur la rigidité de chacun des 800 éléments pour la plaque orthotrope . L'encadrement obtenu est plus large. Dans ce cas, la modélisation avec opérateur de méconnaissances offre alors de meilleurs résultats (voir Tableau 2).

4. Conclusion

Dans cet article, nous avons introduit une définition orthotrope des méconnaissances sur les rigidités. La propagation d'un tel modèle a été menée à bien sur une plaque orthotrope, permettant de montrer l'intérêt d'une telle définition.

5. Bibliographie

Ben-Haim Y., *Information-Gap Decision Theory*, Academic Press, London, 2001.

Hemez F. M., Doebling S. W., Anderson M. C., « A Brief Tutorial on Verification and Validation », *Proceedings of the 22th International Modal Analysis Conference (IMAC-XXII)*, Dearborn, Michigan, January 26-29, 2004.

Klir G., « Generalized Information Theory », *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 40, p. 127-142, 1991.

Ladevèze P., Sur une Théorie des Méconnaissances en Calcul des Structures, Programme raf 2001, EADS Launch Vehicles, Avril, 2002b.

Ladevèze P., « Model Validation or How to describe the lack of knowledge ? », *IACM expressions*, May, 2006.

Ladevèze P., « An anisotropic damage theory with unilateral effects : applications to laminates and to three- and four- dimensionnal composites », *Continuum Damage Mechanics of Materials and Structures*, O. Allix, F. Hild, p. 205-220, Elsevier Science Publishing Company, 2002a.

Ladevèze P., Puel G., Romeuf T., « Lack of knowledge in structural model validation », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, p. 4697-4710, July 2006, 2006.

Moore R., *Methods and Applications of Interval Analysis*, Studies in Applied Mathematics (SIAM), 1979.

Oberkampf W., Trucano T., Hirsh C., Verification, Validation and Predictive Capability in Computational Engineering and Physics, Technical report, Sandia Report 2003-3769, 2003.

Oden J., Belytschko T., Babuska I., Hughes T., « Research directions in computational mechanics », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, p. 913-922, 2003.

Popper K., *The Logic of Scientific Discovery*, Routledge Classics, Taylor and Francis, 2003.

Saltelli A., Tarantola S., Campolongo F., M.Ratto, *Sensitivity Analysis in Practice : A Guide to Assessing Scientific Models*, John Wiley and Sons, 2004.

Schuëller G. I., « Computational Stochastic Mechanics - Recent Advances », *Computers and Structures*, vol. 79, p. 2225-2234, 2001.

Walley P., *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman and Hall, 1990.