HAL
open science

UN THÉORÈME DE DEMI-RECONSTRUCTION DES RELATIONS BINAIRES DE CARDINAL >12

Jean Guillaume Hagendorf, Gérard Lopez

To cite this version:

Jean Guillaume Hagendorf, Gérard Lopez. UN THÉORÈME DE DEMI-RECONSTRUCTION DES RELATIONS BINAIRES DE CARDINAL >12. 2017. hal-01501643v1

HAL Id: hal-01501643

https://hal.science/hal-01501643v1

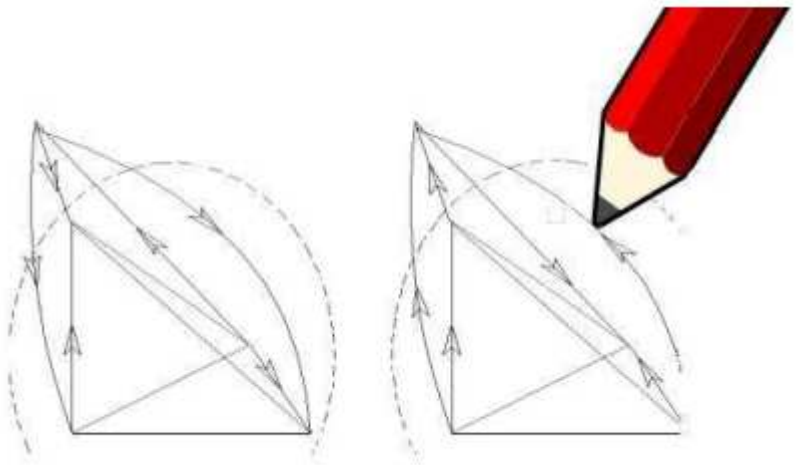
Preprint submitted on 4 Apr 2017 (v1), last revised 6 Mar 2021 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN THÉORÈME DE DEMI-RECONSTRUCTION DES RELATIONS BINAIRES DE CARDINAL >12

Par Jean Guillaume Hagendorf et Gérard Lopez



Résumé. Cet article est presque exclusivement dédié à la démonstration (longue et élaborée de 1991 à 1993) du théorème de demi-reconstruction suivant. Soient R et S deux relations binaires de même base de cardinal infini ou fini > 12. Si les restrictions de R et S à chaque partie propre de la base sont isomorphes ou chacune isomorphe à la duale de l'autre, alors R et S, elles-mêmes, sont isomorphes ou chacune isomorphe à la duale de l'autre.

Classification AMS : 05C60, 05C63.

Mots clés : Relation, Binaire, Dual, Hypomorphie, Demi-hypomorphie, Hémimorphie, Reconstruction, Demi-reconstruction.

Mathématicien:

Les mathématiciens discourant avec justesse [...] sur les choses de leur état [...] on en concluait autrefois qu'ils avaient nécessairement le sens droit et devaient raisonner juste. C'était un préjugé, on confondait le travail intellectuel, les spéculations de l'esprit, avec les opérations machinales [...]; et on était fort éloigné de soupçonner que le raisonnement dit mathématique n'avait absolument rien de commun avec le véritable raisonnement. Cette erreur était elle-même la conséquence de l'application vicieuse qu'on avait faite des termes de logique et de philosophie, tels que "raisonnement", "déduction" etc... à la science spéciale dont l'objet unique est l'appréciation exacte de l'étendue en tous sens. Aujourd'hui les esprits les plus éminents sont convaincus au contraire que les mathématiciens en dehors de tout ce qui concerne la mesure [...], sont les plus pitoyables raisonneurs que l'on puisse rencontrer, notamment en politique, en morale, en philosophie, et surtout dans le domaine des sentiments et des passions. Cela tient à ce que le mathématicien, habitué à voir l'unité quelle qu'elle soit [...], est nécessairement dévoyé, privé de boussole ou de phare, et ne saurait faire dès lors un pas assuré [...]. La logique rigoureuse veut qu'il en soit ainsi. Le mathématicien est fatalement par état, un esprit terre à terre; voilà pourquoi il est généralement athée ou matérialiste, ce qui a été un état de grand étonnement pour Voltaire. On voit que rien n'est plus naturel, plus facile à comprendre. Cette inaptitude logiquement démontrée des mathématiciens à raisonner juste est peut-être l'une des plus curieuses découvertes de l'esprit moderne. (C. Henricy)

Nouveau Dictionnaire Universel
de Maurice Lachatre
Librairie du Progrès
Février 1885

Préface de Roland Fraïssé

Je suis heureux de préfacer la démonstration du théorème de demi-reconstruction de Hagendorf et Lopez. Cette preuve est une des plus complexes, des plus astucieuses, et en tous cas la plus longue, de toute la théorie des relations, jusqu'à aujourd'hui. C'est une des grandes beautés de cette théorie des relations dont j'ai été l'instigateur: une proposition d'apparence élémentaire, simple à énoncer et à comprendre, réclame tant de travail et d'ingéniosité pour en venir à bout après avoir soulevé maints problèmes inattendus. J'espère que cet article contribuera à faire mieux apprécier cette théorie des relations si riche et pourtant si méconnue.

UN THÉORÈME DE DEMI-RECONSTRUCTION

DES RELATIONS BINAIRES DE CARDINAL >12

par Jean Guillaume Hagendorf

en collaboration avec Gérard Lopez

RÉSUMÉ.- Nous montrons que si R et R′ sont deux relations binaires de même base telles que sur chaque partie propre de la base les restrictions de R et de R′ sont isomorphes ou anti-isomorphes (c'est à dire chacune isomorphe au dual de l'autre) alors R et R′ sont isomorphes ou anti-isomorphes dès que le cardinal de la base est infini ou fini >12. Nous utilisons, pour ce faire, des argumentations théoriques, des manipulations artisanales, ainsi que des vérifications sur ordinateur qui aboutissent à une description des quelques 4000 types de relations binaires, toutes de cardinal fini ≤12, qui ne satisfont pas l'énoncé précédent.

ABSTRACT.- We prove that if R and R′ are two binary relations on the same basis such that for every proper subset of the basis the restrictions of R and of R′ are isomorphic or anti-isomorphic (that means each one isomorphic to the converse of the other) then R and R′ are isomorphic or anti-isomorphic whenever the cardinal of the basis is infinite or finite >12. We use theoretical arguments, hand-made manipulations and computer verifications which lead to a description of the about 4000 types of binary relations, all of finite cardinality ≤12, which do not satisfy the previous statement.

MOTS CLÉS: Relation - Reconstruction - Graphe

CODE MATIÈRE AMS (1991) : 05C60 - 04A05 - 06A05 - 06A06

ENGLISH SUMMARY

Half-reconstructibility of binary relations of cardinality >12

by *Jean Guillaume Hagendorf* in collaboration with *Gérard Lopez*

1) RECONSTRUCTION PROBLEMS.

Let us recall the general format of the reconstruction problems the formulation of which goes back to S. M. Ulam ([25]) et R. Fraïssé ([4]). Let R and R′ be two binary relations on the same basis E and let $\mathfrak{F}$ be a family of types of binary relations (relations considered up to an isomorphism). We suppose that R and R′ are isomorphic on any subset of the basis, if the type (relatively to R or R′) of this subset is in $\mathfrak{F}$. The question is to know whether or not R and R′ are isomorphic. In the case of a positive answer, R and R′ are said to be *$\mathfrak{F}$-reconstructible*. The most often used set $\mathfrak{F}$ is the set $\mathfrak{P}$ of all proper sub-types of R. The first positive and general result in this domain is one of Lopez:

Reconstruction THEOREM (Lopez [3], [15] or [16]). *The finite binary relations are (≤6)-reconstructible, where (≤6) denotes the set of the types of binary relations of cardinality ≤6.*

This theorem is improved in the following way:

Improved reconstruction THEOREM (Hagendorf). *The binary relations are $\mathcal{M}$-reconstructible, where $\mathcal{M}$ denotes a special set of types called patterns.*

These patterns (about 104) consist of the types which are not $\mathfrak{P}$-reconstructible (all of these are finite), the types of consecutivities on $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}^-$, and the types ω and ω^* of the linear orders on $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}^-$. The first theorem is deduced from the second by using the fact that the finite patterns are of cardinality ≤6.

2) THE HALF-RECONSTRUCTION PROBLEMS.

Introduced by Hagendorf, these problems are obtained by replacing, in the reconstruction problems, the word "isomorphic" by the locution "isomorphic or anti-isomorphic" (two binary relations are said to be *anti-isomorphic* if each of them is isomorphic to the converse of the other). Let R and R′ be two binary relations on the same basis E, and $\mathfrak{F}$ a family of types of binary relations. We suppose that R and R′ are isomorphic *or anti-isomorphic* on all the subsets of the basis, the type of which is in $\mathfrak{F}$. The question is to know if R and R′ are themselves isomorphic *or anti-isomorphic*. In the case of a positive answer, they are said to be $\mathfrak{F}$-half-reconstructible.

Our result is the following: *The binary relations of infinite or finite ≥13 cardinality are $\mathfrak{P}$-half-reconstructible (that means half-reconstructible from the proper sub-types).*

Let us give an idea of the proof which is difficult and quite long.

1st step. We show that the infinite patterns are half-reconstructible. We recall that those which are finite are of cardinality ≤6.

2nd step. We proceed by reductio ad absurdum and consider two relations R and R′, which are not patterns, which would be isomorphic or anti-isomorphic on any proper restriction (we say *hemimorphic*), but which would not be themselves isomorphic nor anti-isomorphic. We use the improved reconstruction theorem which states the existence of a pattern E in the basis of R, on which R and R′ should be isomorphic and not anti-isomorphic, and a pattern F on which R and R′ should be anti-isomorphic and not isomorphic. Hence these patterns are not self-converse (isomorphic to theirs converse); we can take them minimal. The restrictions of R or R′ on E∪F are called *double-patterns*. Since E and F each contain at most 6 elements, *if they are finite,* E∪F will contained at most 12 elements; we attempt then to prove that the basis of R is reduced to E∪F. We do not give more details in the more complex infinite case. The identity of the basis of R with E∪F should be a consequence of the following lemma the proof of which will be summarized now.

3rd step.

LEMMA OF INCOMPATIBILITY (Hagendorf). *On $E \cup F$, R and R' are nor isomorphic nor anti-isomorphic.*

Consequently $E \cup F$ cannot be a proper subset of the basis. This lemma is proved by giving a classification of the double-patterns in various kinds and by proving it for each of these kinds.

4th step.

CLASSIFICATION LEMMA (Hagendorf). *The double-patterns of cardinality ≥6 are classified in 3 kinds:*

The *cylinders*, characterized by the fact that the couples (e,f) where $e \in E$ and $f \in F$ verify $R(e,f)=R(f,e)$.

The *cones*, characterized by the fact that E-F is a singleton $\{e\}$ and that $R(e,f)=R(e,f') \neq R'(e,f)=R'(e,f')$ for any f and f' both in F (or the same, but inverting the roles of E and F).

The *beaks*, for which F-E consists of two elements f and f' such that $R(f,f') \neq R(f',f)$ and such that for any e and e' in E we have $R(f,e)=R(e,f)= R(e',f) \neq R(f',e)=R(e,f')=R(e',f')$ (or the same, but inverting the roles of E and F).

The double-patterns of cardinality ≤5 are classified in seven figures for which we do not give more details.

5th step.

Proof of the incompatibility for the cylinders, cones, beaks and figures.

We shall now give an outline of the proof of the classification lemma. Before stating the following lemma let us recall the definition of a class of difference.

DEFINITION (Lopez). Let R and R' be two binary relations on the same basis. Between two elements x and y of the basis, define the relation $S(x,y)$ by $R(x,y)=R'(y,x) \neq R'(x,y)=R(y,x)$. The symmetric relation S generates an equivalence relation T on the basis of R, the equivalence classes are called *(R,R')-classes of difference.*

6th step.

LEMMA OF MULTIPLICITY OF THE CLASSES OF DIFFERENCE (Hagendorf and Lopez). *Let R and R' be two hemimorphic binary relations of finite cardinality >3, which do not form a cone. Suppose that the restrictions of R and R' on some not self-converse pattern are isomorphic. Then the basis is made by at least two (R,R')-classes of difference.*

A more difficult but spectacular formulation is the following: *Let R and R' be two hemimorphic and isomorphic binary relations of finite cardinality whose basis is made by one (R,R')-class of difference. Then R and R' are self-converse.*

The general formulation which is valid in the infinite case, is too complex to be given here.

Taking this lemma into account, we can now give an outline of the proof of the classification lemma. Consider the class of difference D generated by the pattern F. As there exist several classes of difference, there exists an e outside of D. Suppose first that $R(e,d)\neq R(d,e)$ for an element d of D. We can then prove that for any d' of D we have $R(e,d)=R(e,d')\neq R(d,e)=R(d',e)$. The relations R and R' restricted to $F\cup\{e\}$ then form a cone for which the statement of the lemma of incompatibility has already been proved. If we always have $R(e,d)=R(d,e)$, a similar construction brings to a beak or to a cylinder.

The lemma of multiplicity of the classes is itself proved independently for each pattern. We suppose that two fixed elements of a pattern are connected by the relation obtained by composing the relation S with itself a *minimum* number of times. A complex construction then allows to still reduce this number of iterations, and hence to end with a contradiction.

UN THÉORÈME DE DEMI-RECONSTRUCTION

DES RELATIONS BINAIRES DE CARDINAL >12

par Jean Guillaume Hagendorf (Orsay)

en collaboration avec Gérard Lopez (Chambéry).

(février 1991 - février 1993)

INTRODUCTION

Cet article est presque uniquement consacré à la démonstration (longue) d'un théorème dit de *demi-reconstruction* établissant ce que j'appelle la *demi-reconstructibilité* des relations binaires de cardinal >12, plus précisément: *Si deux relations binaires de même base ont sur chaque partie propre de la base des restrictions isomorphes ou anti-isomorphes (c'est à dire chacune isomorphe au dual de l'autre) alors les relations elles-mêmes sont isomorphes ou anti-isomorphes et ceci dès que le cardinal de la base est infini ou fini ≥13.*

Le problème de la demi-reconstruction avait déjà été posé dans "la reconstruction des chaînes et des relations infinies" ([9]) et résolu dans le cas des chaînes de manière artisanale et fastidieuse. Pour le comprendre rappelons l'énoncé du théorème de Fraïssé-reconstruction de Lopez et les grandes lignes de sa preuve ([16] ou [3]). G. Lopez prouve que: "*Si R et R' sont deux relations binaires de même base telle que les restrictions de R*

et R′ sont isomorphes sur chaque partie propre de la base (on dit que R et R′ sont *Fraïssé-hypomorphes* ou simplement *hypomorphes*), *alors R et R′ sont isomorphes dès que card (R) >6* ", (on dira que les relations binaires de cardinal ≥7 sont *reconstructibles*). Le cas infini dans ce théorème a été démontré par J. G. Hagendorf. Je mets à profit le concept de *voisinage* introduit au §7 pour redémonter ici ce théorème par une technique un peu moins hétéroclite que celle de [16] ou [3], où j'utiliserai la structure des tournois finis sans diamants élucidée par G. Lopez et C. Rauzy en [17]. En fait je dresse la liste de *toutes* les relations binaires non reconstructibles après avoir redémontré que leurs cardinaux sont finis et ≤6.

Tout au long de la preuve du théorème de reconstruction de Lopez apparaissent des paires de relations qui ne sont pas isomorphes mais qui curieusement sont anti-isomorphes. D'où le problème que je me suis posé...

La démonstration repose sur la notion de (R,R′)-classe de différence introduite par G. Lopez: deux éléments de la base commune à R et R′ sont dits dans la même (R,R′)-classe s'ils sont reliés par un chemin de flèches orientées différemment suivant R et suivant R′. Rappelons les grandes lignes de la preuve de Lopez dans le cas de deux relations binaires R et R′ *hypomorphes*. Si la relation R à reconstruire est formée de plusieurs (R,R′)-classes, chacune étant une partie propre, il y a sur chacune isomorphie entre R et l'hypomorphe R′: il suffit de recoller les isomorphismes définis sur chaque classe puisqu'on montre que celles-ci sont des intervalles [les intervalles sont, par définition, des parties où les isomorphismes locaux se recollent]. S'il n'y a qu'une seule (R,R′)-classe dans la base de R, toutes les preuves reviennent à étudier d'une façon plus ou moins astucieuse chacune des classes d'hypomorphie (c'est à dire des classes de différence de relations binaires hypomorphes) car le type d'isomorphie de ces classes est relativement indépendant du choix de R′ et ne sort pas d'une liste finie de configurations au nombre d'une dizaine (plus des variantes), les relations non Fraïssé-reconstructibles se

trouvant presque toutes parmi ces classes d'hypomorphie.

J'avais dans [9] défini la notion de (R,R')-classe de différence pour des relations binaires R et R' seulement *hémimorphes* (isomorphes *ou anti-isomorphes* sur chaque partie propre de la base). Mais dans le cas de deux relations hémimorphes, les types des classes de différence sont trop nombreux puisque n'importe quelle relation binaire R connexe devient une (R,R^*)-classe de différence, c'est ce qui me laissait croire que dans le cas de l'hémimorphie le concept de classe de différence était inexploitable. Qui plus est, même dans le cas où la base de la relation est formée de plusieurs classes de différence, il est impossible de recoller un isomorphisme défini sur une des classes avec un anti-isomorphisme défini sur une autre classe, d'autant plus que ces classes ne sont plus vraiment des intervalles; on biaisera en introduisant la notion de *presque-intervalle*.

J'ai été longtemps bloqué par ces défauts que je croyais rédhibitoires jusqu'à ce que G. Lopez me convainque que malgré son caractère non intrinsèque (grande dépendance vis à vis de R') la notion de (R,R')-classe de différence se révèle très fructueuse même dans le cas de deux relations R et R' seulement hémimorphes. Mais la démarche à suivre s'avère longue et tortueuse. J'en donne plus bas un aperçu.

J'ai renvoyé au §7 l'établissement technique et rébarbatif de la liste complète des relations binaires non Fraïssé-reconstructibles (théorème d'exhaustivité de la liste des déformées) nécessaire à la preuve d'un *théorème de motifs-reconstruction* mentionné au §2.2.2 et indispensable dès le §2.4. Sont employées dans ce §7 des techniques reconstructivistes que j'ai tenu à éloigner des méthodes demi-reconstructionnistes toutes différentes des § 2 à 6. Le lecteur pourra se référer en permanence à ce §7 (§7.2 et §7.3) pour y retrouver la nomenclature ésotérique des classes d'hypomorphie, des déformées et des voisinages telle qu'elle a été échafaudée par Gérard Lopez, seul puis avec Claire Rauzy, sur une ébauche

de Michel Jean et achevée par Jean Guillaume Hagendorf qui a montré son caractère exhaustif. Elle est exposée dès le §2.1.

Passés les rappels du §1, le §2.0 donne, après les définitions de base, les principaux énoncés dont les preuves sont renvoyées aux §§ suivants. Je parle dans le §2.2 de la notion de "*motif de reconstruction*" (relations nécessaires et suffisantes pour reconstruire toutes les relations binaires) qui remplace avantageusement l'introduction au §5 de [9] des parties artiniennes et nœthériennes qui s'avère peu pertinente. Les motifs finis se révéleront être exactement les relations binaires non reconstructibles. L'isomorphie de deux relations sur les restrictions qui sont des motifs suffit à provoquer leur isomorphie sur la base totale, ce qui constitue, sous le nom de *théorème de motifs-reconstruction* déjà cité, une amélioration déterminante de l'ancien théorème de Fraïssé-reconstruction de Lopez figurant en [16]. Je montre dans le §2.3 que si une relation R n'est pas demi-reconstructible elle contient des configurations particulières (les *doubles motifs*) qui sont réunions de deux motifs non auto-duaux finis (donc chacun de cardinal ≤6); sur l'un des motifs il y a isomorphie et sur l'autre anti-isomorphie entre R et une relation R' hémimorphe à R. Par commodité on se limite en fait aux motifs non autoduaux minimaux appelés *grands motifs*. Le §2.4 démontre le théorème de demi-reconstruction en utilisant un lemme de *non-recollement* entre isomorphismes et anti-isomorphismes, affirmant que sur ces doubles motifs, R et R' ne sont ni isomorphes ni anti-isomorphes (en particulier les doubles motifs ne sont pas demi-reconstructibles); la démonstration de ce lemme sera entreprise dans les §3 et suivants.

Au §3.1 le lemme 2 dit de *classification des doubles motifs* (décomposé en 2·d, 2·bc, 2·abc) affirme que ces doubles motifs se réduisent à un petit nombre de configurations "interdites" (cylindres, cônes, becs etc···) que les autres lemmes (3·d, 3·c et 3·b) du §3.2 étudient l'une après l'autre pour y montrer le lemme de non recollement. Ce lemme 2 est finalement

démontré au §4.2 après les préparatifs des §4.1.A et 4.1.B.

L'idée motrice dans la preuve du lemme 2 de classification est que les deux motifs E et F dont la base est réunion sont moralement des intervalles. Une étape décisive, principalement imaginée par G. Lopez, et énoncée sous le nom de sous-lemme de *"multiplicité des classes"* (sous-lemme 2 du §4.1.A) voit sa longue preuve reléguée au §6. Son idée directrice (subtile à mettre en forme et qui s'est par la suite révélée partiellement inexacte) est qu'un double motif est en général formé de plusieurs classes de différence, ce qui constitue un outil majeur pour démontrer le lemme de non-recollement. Il m'a fallu rectifier la formulation initiale de ce sous-lemme — la rectification, elle même fausse, a été corrigée par G. Lopez dont la correction encore erronée a du été amendée par J. G. Hagendorf avant que nous puissions parvenir à un énoncé correct de ce sous-lemme.

Le dédale que j'ai ensuite imaginé, pour poursuivre la démonstration et pour en venir à bout est acrobatique et interminable. Il occupe en effet la plus grande partie de cet article et passe par une classification des relations binaires non demi-reconstructibles, qui ne laissera aucune place aux relations de cardinal >12:

Il existe des éléments x de $|R|$ extérieurs à la classe engendrée par le motif F, cette classe étant presque un intervalle, l'ensemble F, qui en est une partie, finit aussi par être peu ou prou un intervalle. Si x est lié à F par une arête orientée, on dessine donc, en reliant x à F des "cônes" (un motif majoré ou minoré par un extremum); si x est lié à F par des arêtes neutre, on dessine, en reliant F à la classe de différence engendrée par x, des "cylindres" (deux motifs incomparables) ou d'autres figures insolites (les "becs"), qui sont des configurations interdites au sein de la relation R.

Le lemme de non recollement, démontré jusque là sur chacune des principales configurations interdites, intervient alors pour dire que sur cet interdit, R et R', pourtant hémimorphes, ne sont ni isomorphes ni

anti-isomorphes et par conséquent cet interdit ne peut que coïncider avec R tout entier. Les relations binaires non demi-reconstructibles ne sont donc pas autre chose (à quelques exceptions près) que les doubles motifs et par suite leur cardinal ne saurait dépasser 12.

Je pourrai même affirmer, comme illustration du non recollement entre isomorphie et anti-isomorphie que l'existence, sur chaque partie, de l'une ou de l'autre, implique l'existence soit d'une isomorphie sur chaque partie soit d'une anti-isomorphie sur chaque partie (à partir du cardinal 13). La morale du théorème de demi-reconstruction est donc que la cohabitation entre isomorphismes sur certaines parties et anti-isomorphismes sur les autres parties ne peut (dès que le cardinal est assez grand) que se solder par l'écrasement complet d'un des deux camps par l'autre. C'est justement le nombre de classes de différence qui mesure la victoire des isomorphismes ou des anti-isomorphismes: l'unicité indique que suffisamment de flèches sont renversées par les anti-isomorphismes pour qu'on puisse parcourir toute la base avec de telles flèches, la multiplicité des classes consacre au contraire l'échec des anti-isomorphismes.

Le §5 s'occupe de quelques sous-lemmes techniques concernant les "petits" doubles motifs, sous-lemmes qui seront utilisés aussi bien pour le lemme de non recollement que pour celui de classification des doubles motifs. Quelques preuves peuvent être facilitées par l'usage d'un ordinateur.

Certains lemmes mentionnent après leur énoncé des "scolies" ainsi signalées car inutiles au théorème de demi-reconstruction lui-même, mais nécessaire si on veut répertorier toutes les relations binaires non demi-reconstructibles. J'ai finalement (§5.2) réussi à obtenir une description théorique complète des relations binaires non demi-reconstructibles de cardinal ≥6. Une description complète mais empirique est obtenue grâce à un ordinateur pour les autres cardinaux (§5.3). J'ai poussé la manie jusqu'à comptabiliser les types de relations non demi-reconstructibles et mon estimation (perfectible) montre qu'il y en a quelques 3990.

Au §7 j'établis, grâce aux deux théorèmes d'exhaustivité, la liste complète de toutes les relations binaires non reconstructibles puisque cette liste intervient de manière décisive dans la preuve du théorème de reconstruction. Pour ce faire j'utilise abondamment la notion de *voisinage* d'une relation binaire que j'avais déjà introduite en [9]. Le premier objectif de ce concept était de généraliser celui classique de voisinage dans une chaîne. Malgré son élégance intellectuelle il s'avérera que cette notion ne généralise pas grand chose car les voisinages finis ne seront, au bout du compte, pas autre chose que les classes d'hypomorphie auto-duales et ceux infinis sont des chaînes de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$. Néanmoins c'est un instrument commode de recherche des types des classes d'hypomorphie. En dehors des cycles, des consécutivités et des presque-chaînes (relations qui sont des classes d'hypomorphie manifestes et que je qualifie de *lopeziennes*), la liste complète des classes d'hypomorphie est composée de 66 types dont une quarantaine était connue pour diverses raisons. J'en déduis la liste complète des 92 types non reconstructibles qui du coup s'identifient avec les motifs de reconstruction finis. Quarante six d'entre eux sont des *grands* motifs servant à constituer les doubles motifs.

Les §8 et suivants ne sont plus nécessaires à la preuve du théorème de demi-reconstructibilité:

Le §8 approfondit et étend le concept de voisinage. On intègre ainsi les monstrueux $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)$ et $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$ de C. Rauzy et G. Lopez ([17]) dans la classification complète des $(\leq k,\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*,)$-voisinages pour k=4,5,6. Du coup les $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)$ sans diamants sont bonnement les $(\leq 4,\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*)$-voisinages finis non lopeziens (que je caractérise très simplement comme étant des *manèges*), et les $\mathcal{D}(\mathbf{T}_n)$ sont les $(\leq 5,\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*)$-voisinages non lopeziens qui sont des tournois finis, les autres $(\leq 5,\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*,)$-voisinages faisant partie des $(\leq 6,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages – qui sont les voisinages déjà définis au §7. Je n'ai pas eu le temps d'aboutir à la $(\leq 4,-1,\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*)$-reconstructibilité des relations binaires *infinies*.

Au §9 je me suis risqué à parler du casse-tête des relations non binaires.

Au §10 je donne un énoncé bien pauvre de (-1)-reconstruction des chaînes ayant un point fixe.

Au §11 je donne, à propos des arbres, des contrexemples à des généralisations de propriétés des chaînes en laissant toutefois ouvert un problème qui pourra intéresser le lecteur.

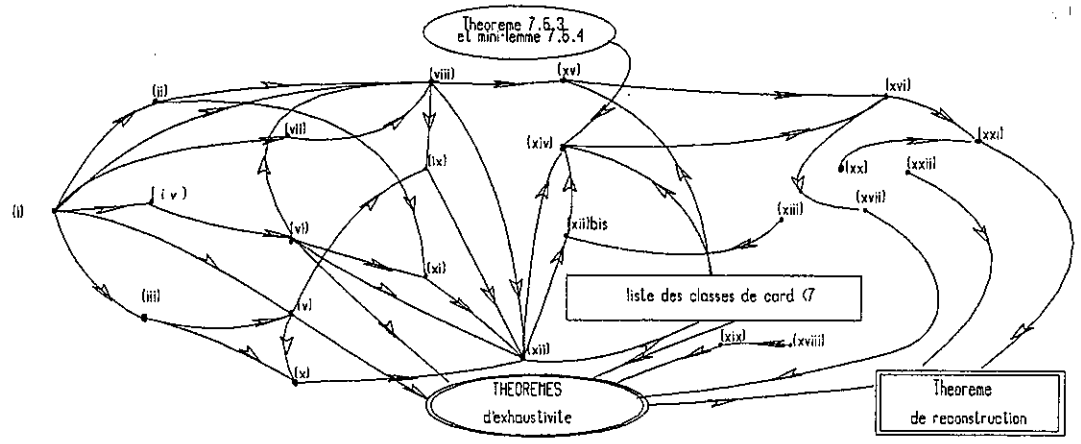
La problématique, l'architecture de la démonstration et le contenu des §1,2,3,4,5,6·A,6·C,8,9,10,11 sont dus à Jean Guillaume Hagendorf. L'énoncé du sous-lemme 2 de "multiplicité des classes" et sa preuve au §6·B sont dus à la collaboration des deux auteurs à la suite d'une idée de Gérard Lopez rectifiée par Jean Guillaume Hagendorf, et de multiples fois amendée par l'un et l'autre des auteurs. Le §7 a été conçu par J. G. Hagendorf, il s'appuie sur plusieurs lemmes de Gérard Lopez et Claire Rauzy ([17]) exposés au §7.4 et 7.6. La mise au point et la rédaction de l'ensemble ont été assurées par Jean Guillaume Hagendorf. Cette rédaction, vérifiée et simplifiée par les deux auteurs, et maintes fois révisée par J. G. Hagendorf, a bénéficié des multiples aménagements, restructurations, et autres bouleversements concédés à Gérard Lopez. Je remercie aussi pour ses relectures, Emmanuel Clarou dont j'ai retenu plusieurs suggestions concernant la numérotation des énoncés. Sans soublier Raphaële Herbin qui est responsable du bon anglais de l'"English Summary". Et enfin Helmut Siemon (Reichenberg) qui a porté à notre connaissance une analogie amusante entre notre théorème et celui de Loo Keng Hua concernant les semi-automorphismes d'un corps gauche.

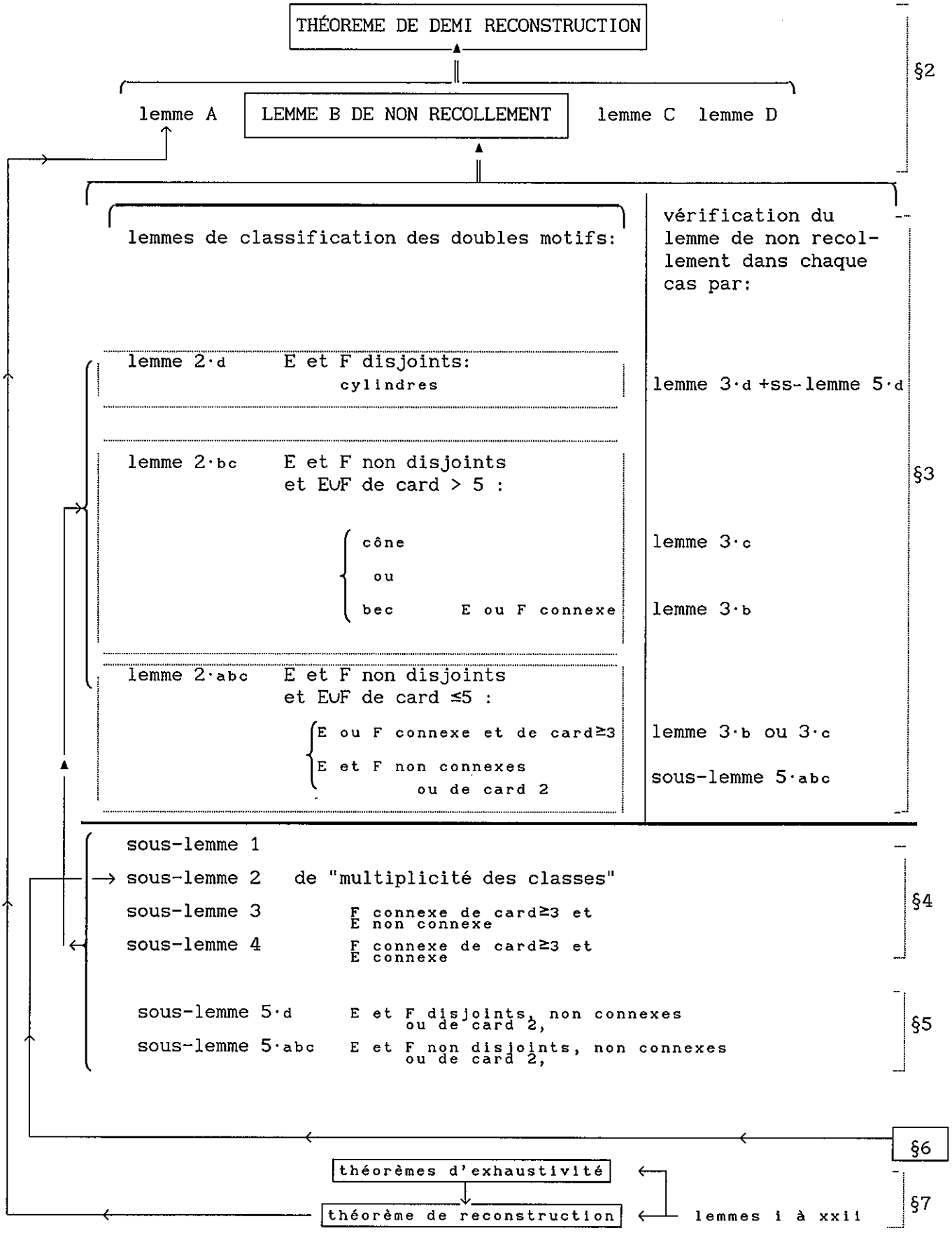
le §2 qui couvre l'ensemble de la démonstration contient quelques lemmes dont les preuves sont reportées aux §§ suivants. Le théorème de reconstruction est ainsi démontré au §7 et les autres lacunes comblées au §§3 et 4. Ces §§ 3 et 4 contiennent à leur tour des lacunes comblées aux §§5 et 6.

La soixantaine de lemmes, sous-lemmes, petits lemmes, pré-lemmes et mini-lemmes sont numérotés de manière globale sur tout l'article du §2 au §7 (c'est à dire sur la partie utile à la démonstration du théorème de demi-reconstruction) en respectant la hiérarchie suivante. Le théorème de demi-reconstruction est conséquence des lemmes A à D. Le lemme A utilise le théorème dit de motifs-reconstruction du §7.7, mouture améliorée par Hagendorf de l'ancien théorème de Fraïssé-reconstruction de Lopez. Le lemme B dit de non recollement est démontré à l'aide des lemmes 1 à 3. Ces lemmes sont parfois accompagnés de scolies inutiles à la démonstration du théorème de demi-reconstruction mais nécessaires au répertoriage des relations binaires non demi-reconstructibles du §5.3. Les preuves de ces lemmes utilisent les sous-lemmes 00 à 5. Le sous-lemme 2 est démontré au §6. La liste exhaustive des relations binaires non Fraïssé-reconstructibles nécessaire au lemme A et à la preuve du théorème de reconstruction est établie au théorème 2 (dit d'exhaustivité) du §7.7 grâce aux lemmes (i) à (xxii) qui servent aussi au théorème de reconstruction. Des "petits lemmes" sont numérotés de 00 à 5 et les mini-lemmes sont en général privés de numéro. Les pré-lemmes et les mini-lemmes numérotés suivent la numérotation des lemmes qu'ils préparent. Les propositions, ainsi dénommées parce qu'inutiles à la démonstration du théorème de demi-reconstruction (certaines mêmes utilisent ce théorème ou quelques uns des lemmes qui y mènent) sont numérotées de 0 à 6 sauf celles celles décrivant les propriétés des voisinages qui sont numérotées de (a) à (e).

La numérotation des propositions, théorèmes et corollaires du §8 à 11 est locale; le paragraphe 8 n'ayant pour objet que l'approfondissement du concept de voisinage.

Expliquons le schéma de la page suivante. Le lemme de non recollement du §2 est démontré de la façon suivante à partir du lemme 2 dit de classification des doubles motifs. Le lemme 2, décomposé en lemmes 2-d, 2-bc et 2-abc, classe les doubles motifs en trois espèces (les cylindres, les cônes, les becs) et "en allures" intervenant en 2-a ("a" pour Allure) , 2-bc ("b" pour Bec, "c" pour Cône) et 2-bcd ("d" pour cylinDre). Dans chacun des cas le lemme de non recollement est démontré indépendamment et certaines de ces démonstrations servent au lemme de classification lui-même. Pour les cylindres apparaissant au lemme 2-d, on utilise le lemme 3.d et le sous-lemme 5-d (c'est pourquoi, sur le schéma, la mention "lemme 3-d" apparaît dans la colonne de droite en regard de la mention "lemme 2-d". Pour les cônes apparaissant au lemme 2-bc, on utilise le lemme 3-c). Pour les becs on se sert, suivant le cas, du lemme 3-b ou du sous-lemme 5-abc etc... Les sous-lemmes 5-d et 5-abc apparaissent à la fois dans la preuve du lemme 2 de classification et du lemme B de non recollement. Le sous-lemme 2 est conséquence du §6 etc... L'enchaînement des lemmes (i) à (xxii) du §7.7, qui permet d'aboutir aux deux théorèmes d'exhaustivité, est détaillé sur le schéma ci-dessous. Le théorème 2 d'exhaustivité de la liste des déformées intervient dans le théorème de reconstruction.




THÉOREME DE DEMI RECONSTRUCTION
§2
lemme A
LEMME B DE NON RECOLLEMENT
lemme C
lemme D
lemmes de classification des doubles motifs:
vérification du lemme de non recollement dans chaque cas par:
lemme 2·d
E et F disjoints:
cylindres
lemme 3·d +ss-lemme 5·d
lemme 2·bc
E et F non disjoints
et E∪F de card > 5 :
§3
cône
ou
bec
E ou F connexe
lemme 3·c
lemme 3·b
lemme 2·abc
E et F non disjoints
et E∪F de card ≤5 :
E ou F connexe et de card≥3
E et F non connexes
ou de card 2
lemme 3·b ou 3·c
sous-lemme 5·abc
sous-lemme 1
sous-lemme 2
de "multiplicité des classes"
sous-lemme 3
F connexe de card≥3 et
E non connexe
sous-lemme 4
F connexe de card≥3 et
E connexe
§4
sous-lemme 5·d
E et F disjoints, non connexes
ou de card 2,
sous-lemme 5·abc
E et F non disjoints, non connexes
ou de card 2,
§5
§6
théorèmes d'exhaustivité
théorème de reconstruction
lemmes i à xxii
§7

Rappels: NOTATIONS et DÉFINITIONS

Nous rappelons les définitions classiques de [5] ou [22] et celles plus spécifiques de [9].

Nous appelons **relation binaire de base E** une application de E×E dans un ensemble arbitraire à deux éléments, qui pour toute la suite sera la paire {+,-}. Sauf indication contraire, on ne s'occupera ici que de relations *binaires*. Le cardinal de la base sera parfois abusivement qualifié de *cardinal de la relation*; on parlera ainsi de relation finie pour dire en fait que la base est finie.

Dans une relation binaire les éléments de la base sont souvent appelés **sommets** et les paires d'éléments de la base sont encore appelées **arêtes** et sont notées {x,y}, ou indifféremment **(x,y)** ou aussi bien (y,x) sans que cela ne sous-entende aucune dissymétrie entre x et y. Parler d'arête (x,y) ne sous-entend nullement [comme c'est le cas en théorie des graphes] que la relation vaut (+) sur ce couple mais ne fait que suggérer qu'on s'intéresse non à l'ensemble {x,y} mais à la restriction de la relation sur cet ensemble. Disons qu'une arête (x,y) de la base de R est **orientée** si R(x,y)≠R(y,x) [indépendamment des questions de réflexivité sur chaque extrémité] sinon elle sera dite **neutre** (on dira encore que x et y sont **incomparables**); on pourra encore appeler **flèche** une arête orientée. Définition évidente de **source** (ou **origine**) et de **but** d'une flèche: s est la source et b le but de la flèche (s,b) si R(s,b)=(+); [graphiquement une arête orientée sera représentée par une flèche dirigée de la source vers le but]. Définitions évidentes des **extrémités** d'une arête (neutre ou orientée). On dira qu'une arête et une de ses extrémités sont **incidentes**; deux arêtes incidentes au même sommet seront dites **adjacentes**. Une arête (x,y) neutre **(+,+)** [c.à.d. R(x,y)=R(y,x)=(+)] pourra être dite **pleine** [on

la représentera graphiquement par une arête pleine sans flèche], une arête neutre (-,-) pourra être dite **vide** [elle ne sera pas représentée graphiquement]. On appellera **nature** le caractère vide, plein ou orienté d'une arête: des arêtes sont dites *de même nature* si elles sont toutes orientées ou toutes pleines ou toutes vides. Les arêtes **liant** deux parties E et F de la base sont, par définition, les arêtes (e,f) où $e \in E$ et $f \in F$. Si elles sont toutes vides on pourra dire que E et F ne sont pas *reliés*.

On appelle **tournoi** une relation binaire sans arête neutre.

Dans une relation binaire symétrique (c'est à dire vérifiant R(x,y)=R(y,x) pour tous x,y) encore appelée *graphe symétrique* (ou *non orienté*) on dira que x et y sont *reliés* par R si R(x,y)=(+). Dans un graphe symétrique le **degré** d'un sommet est le cardinal de l'ensemble des arêtes qui lui sont incidentes; dans une relation binaire non symétrique ce terme désignera ici les cardinaux des ensembles des arêtes *orientées* incidentes, arrivantes ou partantes, affectées d'un "-" ou d'un "+" suivant le cas.

L'affirmation **R(a,b)=(+)** (ou encore R(a,b) *vraie*) se note souvent **a≤b (mod R)** [ou **modulo** R ou **suivant** R]. L'écriture a≤b≤c mod R *sous-entend la transitivité sur {a,b,c}* et signifie donc que a≤b, b≤c *et* a≤c mod R.

On note **R|(a,b)=(+,-)** ou encore **a<b (mod R)** pour dire que R(a,b)=(+) et R(b,a)=(-). R|(a,b)=(-,+) signifie que R|(b,a)=(+,-). R|(a,b)=(+,+) signifie que R(b,a)=R(b,a)=(+) etc... On parlera alors d'arêtes (+,-), (-,+), (+,+) etc... L'écriture "a<b<c" sous-entendra encore la transitivité sur {a,b,c} comme pour le signe ≤.

Si R|(a,b)=(+,-) on dira encore que b **R-majore** *a ou que a* **R-minore** b [ou le minore modulo R etc···]. Soit R une relation binaire. On appelle **R-majorant** d'une partie A de la base un élément *a* de |R| qui R-majore tous les éléments de A (sauf peut-être *a* lui-même s'il est dans A). On sous-entend donc que la majoration est stricte mais ne n'applique pas au majorant lui-même. Cette complication est due au fait que R n'est pas nécessairement anti-symétrique ni réflexif. On dit d'une partie B de la

base de R qu'elle R-**majore** une partie A si tout élément de B R-majore A. Définitions duales pour un R-**minorant**. On appelle R-**maximum** d'une partie A d'une relation binaire R un élément *a de A* qui R-majore tous les autres éléments de A. Définition duale pour un R-**minimum**. Un **extremum** d'une partie A de R en est par définition un maximum ou un minimum. On dira que *a* est un **prédécesseur immédiat de b (mod R)** si $R|(a,b)=(+,-)$ et s'il n'existe pas de c vérifiant $R|(a,c)=R|(c,b)=(+,-)$. Définition analogue d'un **successeur immédiat.**

Soit R et R' deux relations binaires de même base. On dit qu'une arête (a,b) **change** (en passant de R à R') si $R|(a,b)\neq R'|(a,b)$, on dira que (a,b) se **dualise** si $R|(a,b)=R'|(b,a)$, on dira qu'elle s'**inverse** si elle change et se dualise à la fois (ele est donc orientée); on dira qu'un extremum **change** s'il est maximum pour une des relations R ou R' et minimum pour l'autre. De même on parlera de "**minorant ou majorant changeant**" d'un ensemble pour dire d'un élément qu'il majore cet ensemble modulo une des relations R ou R' et le minore modulo l'autre.

Nous appelons partie <u>**propre**</u> de E une partie différente de E, et restriction <u>**propre**</u> d'une relation, une restriction à une partie propre de la base, alors que nous parlerons de restriction <u>**stricte**</u> pour dire que la relation ne se plonge pas dans cette restriction. Le signe $\subset\subset$ ou encore $\subsetneq$ désigne l'inclusion propre, alors que $\subset$ ou $\subseteq$ désigneront l'inclusion large.

En théorie de la reconstruction on appelle **chaîne** un ordre total partout réflexif ou partout irréflexif, on appelle **consécutivité** une restriction sur un intervalle fini ou infini de $\mathbb{Z}$ d'une des quatre relations suivantes: $R_1(x,y)=(+)$ ssi $y=x+1$, $R_2(x,y)=(+)$ ssi $y=x+1$ ou $y=x$, $R_3(x,y)=(+)$ ssi $y=x+1$ ou $y=x$ ou $|y-x|\neq 1$, $R_4(x,y)=(+)$ ssi $y=x+1$ ou $|y-x|\neq 1$. Un **cycle** est une relation binaire définie de la même manière sur $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ ($n\in\mathbb{N}$). Il sera éventuellement nécessaire de préciser "chaîne *réflexive*" pour retrouver le sens classique du mot "chaîne" en théorie des relations. Définition évidente des *extrémités* d'une consécutivité dont on dira qu'elle *relie* ces extrémités.

Dans cet article il sera parfois commode (au §5 et au §6) d'élargir le sens des mots "chaîne", "cycle" et "consécutivité", une **chaîne** (au sens **élargi**) sera une relation binaire transitive et anti-symétrique sans souci de réflexivité: sur certains sommets il pourra y avoir réflexivité et pas sur d'autres. Idem pour les cycles, les consécutivités et les presque-chaînes qu'on va maintenant définir. On précisera toujours en employant un de ces termes au sens élargi qu'il s'agit bien du sens *élargi* et non du sens *restreint* de la définition habituelle.

On appelle **presque-chaîne de presque-extrémités** a et b, une relation binaire de base E contenant a et b qui, sauf peut être sur le couple (a,b), est une chaîne d'extrémités a et b (voir précisions au §7.2). Une relation binaire sera dite une **presque-chaîne** si elle est une chaîne ou s'il existe deux éléments a et b pour laquelle elle est une presque-chaîne de presque-extrémités a et b. Dans cet article une presque-chaîne pourra donc être infinie; mais une presque chaîne infinie qui est une classe d'hypomorphie (voir plus bas) s'avérera être une chaîne.

On parlera de n-chaîne ($n\in\mathbb{N}$), de n-cycle ou de n-consécutivité pour dire que la **longueur** (c'est à dire la cardinalité) de la chaîne (ou du cycle etc$\cdots$) est n. Un chemin de n arêtes est donc pour nous de longueur n+1. On parlera de même de n-restriction ou de n-partie.

L'isomorphie est notée $\approx$. On appelle **type** de relation une relation prise à l'isomorphie près. Une relation sera souvent confondue avec son type ce qui ne présente que des avantages.

Etant données deux relations R et R' binaires sur un même ensemble de base E, G. Lopez [16] a introduit la relation binaire irréflexive $S_{R,R'}$ [S pour <u>s</u>ymétrique] dite **graphe de différence** (ou simplement **différence**) de R et R', définie sur la même base par "$S_{R,R'}(x,y)$ vraie (ou vaut +)" si et seulement si (x,y) est orienté (mod R *et* R') <u>et</u> $R(x,y)\neq R'(x,y)$. La relation binaire $S_{R,R'}$ est symétrique (on dit encore qu'elle est un *graphe non orienté*) et elle engendre une relation d'équivalence notée $T_{R,R'}$ [T pour

transitive] dont les classes seront appelées **(R,R')-classes de différence** ou pour faire plus court des **(R,R')-classes**; ce sont les composantes connexes du graphe non orienté $S_{R,R'}$ au sens (de la théorie des graphes) où deux éléments de la composante peuvent être reliés par une succession d'arêtes (+,+) du graphe. Une suite finie d'éléments de la base qui forment chacun avec son suivant immédiat (dans la suite) une paire orientée, dans un sens quelconque (et pas forcément toujours le même) dans R et en sens opposé dans R' sera dite un (R,R')-**chemin de différence** (ou plus simplement un (R,R')-chemin). Plus formellement on appelle **chemin** d'extrémités a et b dans une relation binaire R une suite $a=x_1,x_2,\cdots,x_n=b$ d'éléments de la base, telle que tout $(x_p,x_{p+1})_{(0<p<n)}$ soit une arête orientée de R; Si R' est une relation binaire de même base, une suite qui est un chemin dans R et dans R' sera donc dite un (R,R')-chemin de différence si pour tout p (0<p<n) on a $R(x_p,x_{p+1})\neq R'(x_p,x_{p+1})$. On parle encore de $S_{R,R'}$-chemin. Seuls interviendront dans cet article les chemins qui ne reviennent pas à leur point de départ, les autres chemins n'ayant pas (ici) d'intérêt. On peut donc parler des *deux extrémités* d'un chemin, on dira que *le chemin va d'une extrémité à l'autre*; définition évidente de la *première étape* d'un chemin d'au moins deux arêtes, qui est l'extrémité de la première arête autre que celle qui est déjà extrémité du chemin. Définition naturelle de deux éléments *successifs* d'un chemin. La **longueur** d'un chemin est le nombre de ses sommets.

Disons que deux relations binaires R et R' de même base E sont **hypomorphes** (ou plus précisément (≤-1)-hypomorphe) si pour toute partie *propre* F de la base, R|F et R'|F sont isomorphes.

Disons qu'une partie A de la base d'une relation binaire R est une **R-classe d'hypomorphie** s'il existe une relation binaire R' hypomorphe à R telle que la partie A est formée exactement d'une seule (R,R')-classe de différence (laquelle classe pourra être appelée une **(R,R')-classe d'hypomorphie**). Disons qu'une relation binaire R est une **classe**

d'hypomorphie (sous-entendue *d'elle-même*, ou *en soi*) si elle est une R-classe d'hypomorphie. Les deux relations binaires sur un singleton sont considérées comme hypomorphes et sont des classes d'hypomorphie; mais pas la relation binaire sur le vide. Disons qu'une relation binaire R est une **classe de voisinage** s'il existe une relation binaire R' hypomorphe *et isomorphe* à R telle que la base de R n'est formée que d'une seule (R,R')-classe de différence. On justifiera le terme de *voisinage* ainsi choisi en montrant qu'il s'agit là d'une généralisation du concept habituel de voisinage dans une chaîne. L'abréviation "*classe*" ne sera d'usage que pour les "*classes de différence*", dont les classes d'hypomorphie ou de voisinage ne sont que des cas particuliers.

On parlera aussi de *n*-hypomorphie ($n\in\mathbb{N}$) pour dire qu'il y a isomorphie sur les éventuelles parties de cardinal *n* [on convient de dire qu'il y a n-hypomorphie si le cardinal de la base est $<n$], de *fini*-hypomorphie (encore appelée $(<\omega)$-hypomorphie) pour dire qu'il y a n-hypomorphie pour tout n fini, de $(\leq n)$-hypomorphie pour dire qu'il y a p-hypomorphie pour tout entier $p\leq n$, de $(-n)$-hypomorphie pour dire qu'il y a isomorphie sur les éventuelles parties obtenues en enlevant n éléments à la base, de $(\leq -n)$-hypomorphie pour dire qu'il y a isomorphie sur les éventuelles parties obtenues en enlevant *au moins* n éléments à la base; la simple hypomorphie est donc la (≤ -1)-hypomorphie (aussi appelée *Fraïssé-hypomorphie* en particulier dans [9]).

On dira qu'une relation binaire est **lopezienne** si elle est, *au sens restreint*, une consécutivité, un cycle ou une presque-chaîne. En pratique cette définition ne sera appliquée qu'à des classes d'hypomorphie, pour celles-ci il y a équivalence avec le sens élargi sauf pour le cardinal 2 (voir §7). La relation binaire définie sur {a,b} par R(a,a)=R(a,b)=(+) et R(b,b)=R(b,a)=(-) n'est donc pas lopezienne. Sur les classes de voisinage il y a équivalence, pour la notion de consécutivité, cycle ou presque-chaîne, entre le sens restreint et le sens élargi.

Disons qu'une restriction I d'une relation binaire R est un **R-intervalle** si pour tout x de |R|, qui n'est pas dans I, chacune des valeurs R(x,i) et R(i,x) est indépendante du choix de i dans I. Cette définition diffère légèrement de celle de Fraïssé ([6]) mais lui est équivalente pour les relations binaires réflexives ou irréflexives. Les singletons, le vide et la base entière sont des intervalles dit **triviaux**. Si I est un R-intervalle ne contenant pas x la valeur R(x,i) indépendante du choix de i dans I sera notée **R(x,I)** et on dira que **(x,I)** est, (modulo R), neutre, orientée etc... Si cette valeur est en plus indépendante du choix de x dans un ensemble X on parlera de la valeur de **R(X,I)**. Des isomorphismes de R dans R' définis chacun dans un intervalle et à valeurs dans cet intervalle se recollent évidemment en un isomorphisme défini sur la réunion de ces intervalles.

On parlera abusivement d'"intervalle" d'une consécutivité pour désigner un intervalle de la chaîne canoniquement engendrée par cette consécutivité.

Une relation binaire R sera dite **réflexive** en un élément *a* de sa base si R(a,a)=+, on dira encore de manière imagée que R fait une *boucle* en *a* ou à la rigueur que *a* est réflexif (mod R). Si les relations binaires R et R' sont hypomorphes les (R,R')-classes de différence sont *partout irréflexives* (on dira simplement *irréflexives*) ou *partout réflexives* (même remarque) dès que la cardinal de R (c.à.d. de la base de R) est au moins 3; et, dès que ce cardinal vaut au moins 4, ces classes sont en plus des intervalles. En fait la 2-hypomorphie et la 3-hypomorphie suffisent respectivement à la véracité de ces affirmations quelque soit le cardinal de la base.

Démontrons le dans les deux lemmes suivants:

Lemme . Si R et R' sont deux relations binaires ≤2-hypomorphes, les (R,R')-classes de différence sont entièrement réflexives ou entièrement irréflexives.

Preuve. Soit a un élément où R est réflexif et b un élément où R est irréflexif. R|{a,b} devant être isomorphe à R'|{a,b}, R(a,b) est égal à R'(a,b) et a et b ne peuvent être liés par $S_{R,R'}$. □

Lemme . Si R et R′ sont deux relations binaires ≤3-hypomorphes, les (R,R′)-classes de différence sont des intervalles.

Preuve. Soit a et b deux éléments successifs d'un (R,R′)-chemin de différence et c un élément extérieur à la classe de a et b. L'élément c n'étant pas dans la même classe que a et b il faut que $R|(c,a)=R'|(c,a)$ et $R|(c,b)=R'|(c,b)$. On vérifie facilement à la main que l'isomorphie entre $R|\{a,b,c\}$ et $R'|\{a,b,c\}$ impose, (a,b) changeant par passage de R à R′, que $R|(c,a)=R'|(c,a)=R|(c,b)=R'|(c,b)$. □

Une relation binaire R′ est dite **déformée** de la relation binaire R si elle est hypomorphe mais pas isomorphe à R. Une relation binaire R qui est isomorphe à toute relation binaire qui lui est hypomorphe est dite **Fraïssé-reconstructible** (dans cet article on dira simplement **reconstructible**). Les relations déformées (d'une autre relation) sont donc les relations non reconstructibles.

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de types $\{\alpha,\beta,\cdots\}$. Deux relations R et R′ de même base sont dites *$\mathcal{T}$-hypomorphes* si elles sont isomorphes sur les restrictions de R et R′ à toute partie F de la base pour laquelle $R|F$ ou $R'|F$ est d'un des types de $\mathcal{T}$. Cette définition a évolué par rapport à la définition de [9], puisqu'elle s'est conformée au nouvel usage qui n'exige plus que les parties F soient propres.

La **duale** R^* d'une relation binaire R est définie par $R^*(x,y)=R(y,x)$ pour tous x et y de la base. Disons qu'une relation binaire est **autoduale** si elle est isomorphe à sa duale.

On note ω le type de la chaîne habituelle sur $\mathbb{N}$ qu'elle soit partout réflexive ou partout irréflexive; on notera ainsi de la même manière le type d'une relation binaire (partout) réflexive et celui de la relation (partout) irréflexive correspondante mais ces types compteront chacun pour 1 quand on les comptabilisera.

On note Ω le type de n'importe laquelle des quatre consécutivités (au sens restreint) sur $\mathbb{N}$ qu'elle soit réflexive ou irréflexive, que les arêtes neutres soient toutes vides ou toutes pleines. Même remarque que précédemment pour la comptabilisation des types.

Deux relations binaires R et R' de même base E sont donc par définition *$\{\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*\}$-hypomorphes* si pour toute partie F de la base, R|F et R'|F sont isomorphes dès que R|F ou R'|F est du type de la chaîne (partout réflexive ou partout irréflexive) sur $\mathbb{N}$ ou son opposée, ou encore du type de la consécutivité (partout réflexive ou partout irréflexive, les arêtes neutres étant toutes vides ou toutes pleines) sur $\mathbb{N}$ ou son opposée.

Dans une classe d'hypomorphie *non autoduale* R, on dira qu'une arête est **versatile** si elle est orientée et s'il existe R', de même base, isomorphe et hypomorphe à R, où cette arête est orientée différemment que dans R. Cette définition (artificielle) est *dans le cas des classes d'hypomorphie non autoduales* équivalente à la définition plus générale du §8.2. La présente définition suffira pour les §§ 2 à 7. La notion de versatilité sera étendue aux motifs de reconstruction (voir p.87).

Quand on parlera d'**avatar** ou **variante** d'un *motif de reconstruction* (voir §2) ou d'une classe d'hypomorphie, il s'agira de celles des autres formes (obtenues par dualisation, et/ou changement du statut de réflexivité ou d'irréflexivité de certains sommets, et/ou modification de la nature pleine ou vide de certaines arêtes neutres) qui sont *encore* des motifs de reconstruction ou des classes d'hypomorphie pourvues des *mêmes* arêtes versatiles. Ainsi D_{12} ayant une arête versatile n'est pas considéré comme une variante de D_{11} qui n'en a pas; c'est le seul cas avec D_{13}, D'_{12} et D'_{13} où la modification de la nature pleine ou vide de certaines arêtes neutres ne donne pas des avatars. Les avatars de ω et de Ω sont des chaînes et des consécutivités au sens restreint. On omettra souvent de souligner que telle propriété d'une classe d'hypomorphie ou d'un motif est satisfaite aussi pour ses avatars.

Dictionnaire des faux amis

Théorie des Relations ⇔ Théorie des graphes

Relation binaire R: R=application de E^2 dans {+,-}	1-graphe orienté G: G=(E,Γ) (Γ ensemble d'éléments de E^2)
base	ensemble des sommets
R(a,b)=+	(a,b) arc de G
modulo R	suivant G
dual=R^*	opposé
R réflexif en a	(a,a) boucle de G
arête (x,y) (ou {x,y})	paire *quelconque* {x,y} de sommets
arête (x,y) non vide	x et y voisins (i.e. (x,y) ou (y,x) arc de G)
arête orientée (=flèche)	arc non double
arête non vide	arête
arête pleine	arc double
(x,y) est une flèche	(x,y) ou (y,x) est un arc et pas les deux
chemin	chaîne d'arcs non doubles
(R,R')-chemin de différence	chaîne d'arcs non doubles avec (a,b) arc de G ⇒ (b,a) arc de G'
longueur=nb de sommets	longueur=nb d'arêtes
---- [pas d'équivalent] ----	connexe
connexe	deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne d'arcs non doubles
---- [pas d'équivalent] ----	chemin
voisin	---- [pas d'équivalent] ----
chaîne	ordre total
---- [pas d'équivalent] ----	chaîne
arbre	ordre tq ∀x,y x≤y *ou* y≤x *ou* x et y n'ont pas de majorant commum.

§2.0 . POSITION DU PROBLÈME ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME.

Nouvelles définitions.

Je dirai que deux relations binaires R et R′ de même base sont **demi-hypomorphes** ou encore **hémimorphes** si pour toute partie propre F de leur base commune on a $R|F \approx R'|F$ ou $R^*|F \approx R'|F$.

Je dirai qu'une relation binaire R est **demi-reconstructible** si toute relation de même base qui lui est hémimorphe lui est en plus isomorphe ou anti-isomorphe.

On souhaite montrer que toute relation binaire de cardinal infini ou fini >12 est demi-reconstructible. Ce sera le principal résultat de cet article.

THÉORÈME DE DEMI-RECONSTRUCTION. Si deux relations binaires sont hémimorphes et de cardinal infini ou fini ≥13 alors elles sont isomorphes ou anti-isomorphes.

En fait, on aura plus fortement démontré le résultat significatif suivant:

PROPOSITION 1. Soit R et R′ deux relations binaires sur une base de cardinal infini ou fini ≥13. Si pour chaque partie propre E de |R| on a $R|E \approx R'|E$ ou $R^*|E \approx R'|E$, alors on a, soit pour toute partie E $R|E \approx R'|E$, soit pour toute partie E $R^*|E \approx R'|E$.

On peut présenter la *synthèse* suivante entre la reconstruction et la demi-reconstruction:

THÉORÈME (LOPEZ-HAGENDORF). Soient R et R′ deux relations binaires de même base. Si sur chaque partie propre de la base les restrictions de R et R′ sont isomorphes, R et R′ le sont dès que card R>6; R et R′ sont isomorphes

ou anti-isomorphes dès que card R>4. Si les restrictions de R ou R′ sur les parties propres sont iso- ou anti-isomorphes, R et R′ le sont dès que card R >12.

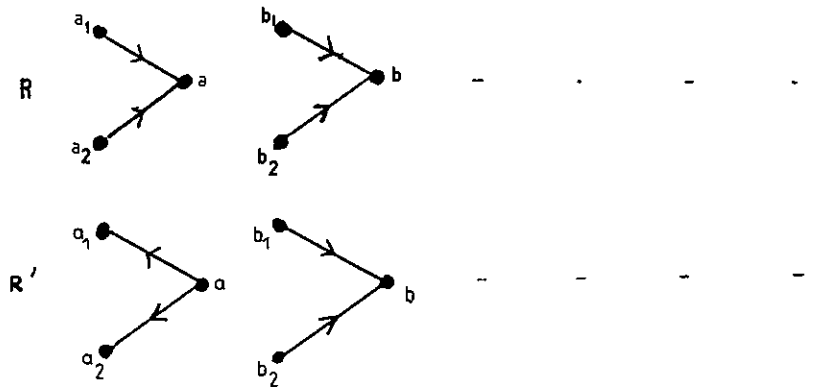
Le plan de la démonstration est exposée au §2.4.

J'ignore totalement ce qu'il en est de la demi-reconstruction des multirelations au plus binaires ne sachant même pas si cette question soulève des problèmes nouveaux!

Le lecteur courageux pourra à propos des relations ou des multirelations binaires se poser des problèmes de (-k)-demi-reconstruction (l'iso- ou anti-isomorphie sur les parties obtenues en enlevant k éléments entraîne-t-elle l'iso- ou anti-isomorphie sur le tout). Pour les relations binaires finies la demi-reconstruction revient (d'après la proposition 1bis du §2.4) à la (≤12)-demi-reconstruction. Le théorème des multi-couleurs de Pouzet ([20]) permet de conclure à la (-12)-reconstructibilité des relations binaires finies. J'ignore ce qu'il advient du cas infini, et tout autant si 12 est la plus petite valeur acceptable.

La (≤-k)-demi-reconstructibilité ($k\in\mathbb{N}$) est vraie pour les relations binaires de cardinal infini ou fini ≥12+k. Plus précisément si entre deux relations binaires R et R′ il y a isomorphie ou anti-isomorphie sur toute partie de la base obtenue en en enlevant au moins k éléments, alors il y a isomorphie ou anti-isomorphie sur le tout dès que le cardinal de la base est infini ou fini ≥12+k. C'est une conséquence évidente de la proposition 1 bis dans le cas fini. Dans le cas infini il faut reprendre la preuve avec k au lieu de 1 ce qui ne pose sans doute aucun problème.

A noter que la ($\leq k$)-hémimorphie entre deux relations binaires finies R et R' n'entraine pas la ($\leq k$)-hypomorphie entre R et R' ou entre R et R'^*, même pour des cardinaux arbitrairement grands, quand k est un entier <12. Ainsi considérons sur un ensemble $\{a,a_1,a_2\}\cup\{b,b_1,b_2\}\cup\{c,c_1,c_2\}\cup\cdots$ la relation R définie par $a>a_1$, $a>a_2$ et a_1 incomparable à a_2 mod R, de même avec b, b_1, b_2, c, c_1, c_2 $\cdots$, les liens entre les ensembles $\{a,a_1,a_2\}$, $\{b,b_1,b_2\}$, $\{c,c_1,c_2\}$ etc$\cdots$ étant vides. Mod R' on inverse uniquement les flèches de $\{a,a_1,a_2\}$. Entre R et R' restreints à toute partie à 5 éléments il y a, à chaque fois, isomorphie ou anti-isomorphie, mais pas isomorphie sur chacune de ces parties ni anti-isomorphie sur chacune de ces parties. Pour le cardinal k=11 prendre à la place de $\{a,a_1,a_2\}$, $\{b,b_1,b_2\}$, $\{c,c_1,c_2\}$ $\cdots$ des relations de R-type D_{20}, une d'entre elles devenant de R'-type D_{21}.



Néanmoins toutes ces questions mettent l'accent sur la cardinalité de la base et je ne suis pas sûr que cette cardinalité soit pertinente. Ainsi dans le cas de la Fraïssé-reconstruction le cardinal 7 n'a qu'un rôle accidentel dû au fait qu'aucun motif fini n'est de cardinal ≥ 7.

§2.1 NOMENCLATURE DES DÉFORMÉES.

Afin de rendre compréhensible le §2.2 suivant je donne ici la terminologie des déformées finies réflexives telle que l'a échafaudée G. Lopez (voir figures page 199). Ces déformées sont assez maladroitement désignées par D_0, D_1, D_2, $\cdots$ et par certains D'_n. Cette terminologie réapparaîtra, dans son contexte, au §7.2. Rappelons que les déformées sont par définition les relations (binaires) non Fraïssé-reconstructibles.

On verra au §7 (théorème 2 d'exhaustivité de la liste des déformées) qu'on obtient ainsi, aux variantes près, toutes les déformées finies de cardinal $\neq 1$. Il ne restera plus, pour obtenir toutes les déformées, qu'à rajouter le singleton (avec sa variante).

On notera systématiquement D' la relation qu'on obtient depuis D en remplaçant les arêtes non orientées (-,-) par des arêtes (+,+) et réciproquement, c'est à dire que D' est la négation de D^* (la négation étant par définition la relation obtenue en permutant les rôles de (+) et de (-)).

• Sur {a,b}, D_1 vaut toujours (+), D_0 est sa négation [i.e. la relation qui vaut (+) quand D_1 vaut (-) et réciproquement] (D_0 et D_1 sont des presque-chaînes, ce sont des relations non Fraïssé-reconstructibles mais pas des classes d'hypomorphie; je les mentionne pour justifier les trous dans la liste). D_2 vaut (+) sur (a,b) et (-) sur (b,a), c'est une chaîne et une classe d'hypomorphie.

• D_3 est le 3-cycle a<b,b<c,c<a et D_4 la 3-chaîne a<b<c.

• Sur {a,b,c}, D_7 est défini ainsi: $D_7(a,c)=D_7(b,c)=(+)$, D_7 vaut (-) ailleurs, D_9 est son dual. On peut définir D'_7 par: $D'_7(a,c)=D'_7(b,c)=(-)$ et

(+) partout ailleurs. Idem pour D'_9. D_8 est défini par $D_8(a,c)=D_8(c,b)=(+)$ et D_8 vaut (-) ailleurs; c'est une presque-chaîne (et une consécutivité) qui est Fraïssé-hypomorphe mais non isomorphe à D_7 ou à D_9. On peut définir D'_8.

• Sur $\{a,b,c\}$, D_{18} est défini par $D_{18}(a,b)=D_{18}(b,a)=D_{18}(b,c)=(+)$ et (-) ailleurs; D_{19} par $D_{19}(a,b)=D_{19}(b,a)=D_{19}(c,b)=(+)$ et (-) ailleurs. On constate que D'_{18} est isomorphe à D_{19}. Ce ne sont pas des classes d'hypomorphie.

• D_5 et D_6 de base $\{a,b,c,d\}$ sont appelés des **diamants**: D_5 et D_6 restreints à $\{a,b,c\}$ sont les cycles $a<b,b<c,c<a$ mod D_6, $b<a,c<b,a<c$ mod D_5; $D_5(d,a)=D_5(d,b)=D_5(d,c)=D_6(a,d)=D_6(b,d)=D_6(c,d)=(+)$; (-) partout ailleurs. Ces deux relations ont été trouvées par Michel Jean, et appelées *diamants* par Cyprien Gnanvo.

• Sur $\{a,1,2,3\}$, D_{10} est défini par: $D_{10}|\{1,2,3\}$ est la chaîne $1<2<3$ et $D_{10}(a,1)$ vaut (+) et (-) partout ailleurs. $D_{11}|\{1,2,3\}$ est la chaîne $1>2>3$ et $D_{11}(1,a)$ vaut (+) et (-) ailleurs. D_{10} et D_{11} sont duales. On peut définir D'_{11} et D'_{10} isomorphes aux négations de D_{10} et D_{11}.

• Sur $\{a,1,2,3\}$, D_{12} ne diffère de D_{11} que par le fait que $D_{12}(a,2)=D_{12}(2,a)=(+)$. D_{13} ne diffère de D_{10} que par le fait que $D_{13}(a,2)=D_{13}(2,a)=(+)$. On peut définir D'_{12} et D'_{13}.

• Sur $\{a,1,2,3,4\}$ définissons D_{14} ainsi: $D_{14}|\{1,2,3,4\}$ est la chaîne $1<2<3<4$, $D_{14}|\{a,1,3\}$ et $D_{14}|\{a,1,4\}$ sont des cycles, (-) ailleurs. D_{15} est le dual de D_{14}; on peut définir D'_{14} et D'_{15}.

• D_{22} ne diffère de D_{14} que par le fait que $D_{22}(4,1)=D_{22}(1,4)=(+)$. On peut définir le dual D_{23} ainsi que D'_{22} (isomorphe à D_{23}) et D'_{23} (isomorphe à D_{22}).

• Sur $\{a,1,2,3,4,5\}$ on définit D_{20} ainsi: $D_{20}|\{1,2,3,4,5\}$ est la chaîne $1<2<3<4<5$, $D_{20}|\{a,3,4,5\}$ est la chaîne $3<4<5<a$, $D_{20}|\{a,1,2\}$ est la chaîne $a<1<2$; D_{21} est le dual de D_{20}.

---

§2.2. APPROFONDISSEMEMENT DU THÉORÈME DE FRAÏSSÉ-RECONSTRUCTION.

L'étude de la demi-reconstruction exige l'approfondissement des travaux de G. Lopez sur la Fraïssé-reconstruction. G. Lopez avait montré que les relations binaires non Fraïssé-reconstructibles de cardinal ≥4 sont partout réflexives ou partout irréflexives ce qui permettait de ne plus s'inquiéter, pour reconstruire les relations binaires de cardinal ≥7, des problèmes de réflexivité en supposant par exemple tout réflexif. Rien d'aussi agréable ne se produit pour la demi-reconstruction et les problèmes de réflexivité nous donneront quelques fils à retordre.

Je vais donner une liste de types de relations binaires que j'appellerai *motifs de reconstruction*; intuitivement ce sont les relations binaires nécessaires et suffisantes pour Fraïssé-reconstruire une relation binaire quelconque. Les motifs qui sont finis et irréflexifs (ou réflexifs) figurent déjà dans l'article ([16]) de G. Lopez en tant que *déformés*, c'est à dire pas a priori pour les mêmes raisons (voir la liste des déformées réflexives au §2.1 et les figures aux pages 38-39). Mais il faudra encore se pencher sur les motifs qui ne sont ni réflexifs ni irréflexifs. Au §7.7 nous montrerons (théorèmes d'exhaustivité) que les motifs finis sont exactement les types des relations binaires finies non Fraïssé-reconstructibles.

Nous donnons des motifs de reconstruction une définition par une liste énumérative. Celle-ci sera immédiatement suivie par une caractérisation, hélas uniquement pertinente pour les motifs finis. Cette caractérisation est une conséquence du théorème 2 d'exhaustivité de la liste des déformées (démontré au §7.7) qui énumère les relations binaires non Fraïssé-reconstructibles, théorème que nous admettons provisoirement. Les §§2 à 6

démontrent le théorème de demi-reconstruction modulo cette caractérisation qu'il ne restera plus qu'à prouver au §7.

DÉFINITION . Appelons **motifs de reconstruction** les 104 types de relations binaires suivants: les types ω et Ω et leurs dix variantes ainsi que les types finis des relations binaires suivantes (toutes des *déformées* de cardinal <7) [se reporter à la liste du §7.2 (ou du §2.1) et aux figures des pages 38-39]:

1)– les 22 déformées irréflexives D_n ($0 \leq n \leq 15$ ou $18 \leq n \leq 23$) et les 9 déformées D'_n correspondantes ($7 \leq n \leq 15$),

2)– les 31 déformées réflexives associées aux précédentes,

3)– ainsi que les deux relations binaires sur un singleton,

4)– et les relations binaires ni réflexives ni irréflexives de cardinal <4 à savoir

a) *d'abord* les quatre relations binaires suivantes définies sur {a,b}: $D_{26}(a,a)=+$, $D_{26}(b,b)=-$, $D_{26}(a,b)=+$, $D_{26}(b,a)=-$; la duale $D_{27}=D^*_{26}$; $D_{28}(a,a)=+$, $D_{28}(b,b)=-$, $D_{28}(a,b)=+$, $D_{28}(b,a)=+$; et $D'_{28}(a,a)=+$, $D'_{28}(b,b)=-$, $D'_{28}(a,b)=-$, $D'_{28}(b,a)=-$ (il est clair qu'une relation binaire ni réflexive ni irréflexive contient une de ces quatre relations),

b) *et ensuite* les 8 relations binaires à 3 éléments suivantes : les variantes des relations à D_7, D_8, D^*_8, D_9 sur {a,b,c} (c étant sommet incident aux deux flèches (c,a) et (c,b)) pour lesquelles il y aura réflexivité sur a et c et pas sur b, et les variantes où il y a réflexivité uniquement sur a;

c) les 8 autres déformées associées obtenues à partir des précédentes du b) en changeant la nature pleine ou vide de l'arête neutre;

d) la variante de la chaîne D_4 où il y a réflexivité sur les extrémaux de D_4 et pas sur l'élément intermédiaire et celle où il y a

réflexivité uniquement sur l'élément intermédiaire de D_4 (2 motifs);

e) la variante du cycle D_3 où il y a réflexivité sur un élément et celle où il y a réflexivité sur deux éléments (2 motifs);

f) les quatre variantes de D_{18} et D_{19} sur lesquelles il y aura réflexivité aux deux extrémités de la flèche et pas ailleurs, et celles où il y aura irréflexivité sur les extrémités de la flèche et pas ailleurs. (L'arête orientée a ses extrémités toutes deux réflexives ou toutes deux irréflexives sans quoi la relation serait reconstructible contrairement à la caractérisation qui va suivre).

Soit bien en tout 104 types dont 92 finis!

Rappelons que les 3 variantes de ω sont obtenues par dualisation et/ou irréflexivisation. Les 7 variantes de la consécutivité Ω sur $\mathbb{N}$ sont obtenues par dualisation et/ou réflexivisation et/ou échange de toutes les arêtes vides par des pleines et réciproquement.

Admettons jusqu'au §7 où elle sera démontrée la caractérisation suivante qui sera une conséquence du théorème 2 d'exhaustivité de la liste des déformées du §7.3 ou 2.1, théorème lui-même démontré au §7.7.

CARACTÉRISATION . Les motifs de reconstruction sont constitués *exactement* des types ω et Ω et de leurs dix variantes, ainsi que de tous les types des relations binaires (finies) non Fraïssé-reconstructibles.

On sait ([16] et *Rappels*) que les relations binaires non Fraïssé-reconstructibles de cardinal infini ou fini ≥ 4 sont des classes d'hypomorphie qui, vu leur cardinal, sont partout réflexives ou partout irréflexives. Ceci explique que dans la liste énumérative des motifs il

soit inutile d'envisager le cas de types ni réflexifs ni irréflexifs de cardinal infini ou fini ≥4. En fait on verra au §7 que les relations binaires non reconstructibles sont toutes finies, mais ce résultat est encore inconnu dans [16].

Une représentation graphique des motifs se trouve au §2.2.2 p38-39.

Les types des relations binaires D_{16}, D_{17}, D'_{16}, D'_{17}, D_{24}, D_{25}, D'_{24}, D'_{25} définies dans [16] ne sont pas des déformées comme l'affirme trompeusement G. Lopez ! Elles sont Fraïssé-reconstructibles et pour cela ne figurent pas parmi les motifs.

Les 104 motifs (dont 12 infinis) peuvent être regroupés par ordre de cardinalité croissante en variantes du singleton, de D_0, D_3, D_4, D_7, D_8, D_{18}, D_{26}, D_5, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{22}, D_{20}, ω, Ω.

On note $\overline{D}_8$ la 3-consécutivité 0<1, 1<2 où 0 est le seul élément à être réflexif et où (0,2) est vide. On note $\overline{D}_9$ la relation binaire sur {a,b,c} c<a, c<b où a est le seul élément à être réflexif et où (a,b) est vide.

Certains motifs ne sont pas des classes d'hypomorphie ainsi D_{18}, D_{19}, et aussi $\overline{D}_8$, $\overline{D}_9$ qui viennent d'être définies. Le résultat de Lopez disant que dans une relation binaire R de cardinal ≥4 les R-classes d'hypomorphie sont des intervalles, prouve que les motifs de cardinal ≥4 sont des classes d'hypomorphie; Voir mini-lemme *(xix)* au §7.

§2.2.1

Familiarisons-nous avec la structure des motifs de reconstruction avant d'en arriver aux définitions spécifiques à la demi-reconstruction.

On peut remarquer que si on enlève un élément bien choisi à un motif fini il reste une presque-chaîne (voir définition au §7.2).

Rappelons qu'on appelle **lopeziennes** les classes d'hypomorphie qui sont au sens restreint, des presque-chaînes, des consécutivités ou des cycles. Mentionnons que D_{26} et D_{27} sont des classes d'hypomorphie non lopeziennes puisque, n'étant ni réflexives ni irréflexives, elles ne sont, au sens restreint, ni des 2-chaînes ni des 2-consécutivités. Idem pour $\overline{D}_8$ et variantes. Les classes d'hypomorphie qui sont – même au sens élargi – des presque-chaînes, des consécutivités ou des cycles le sont en fait au sens restreint dès que leur cardinal est ≥ 3.

Constatons que les classes d'hypomorphie non autoduales ne sont pas Fraïssé-reconstructibles ce qui justifie, d'après la caractérisation donnée plus haut, qu'elles soient des motifs: En effet elles admettent leur duale comme déformée sauf D_{12} qui admet D_{13} comme déformée et de même pour les variantes.

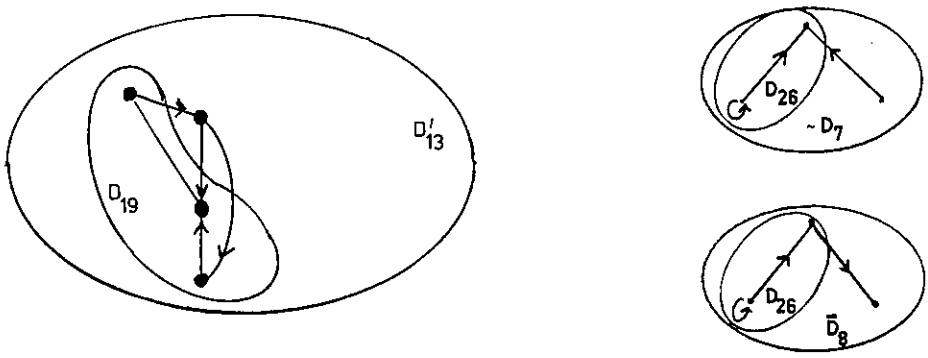
Mais certaines classes autoduales comme le 3-cycle, la 3-chaîne ou la 3-consécutivité (au sens restreint) sont néanmoins non Fraïssé-reconstructibles, ce sont d'ailleurs les seules dans cette situation.

Les autres motifs finis présentés ci-dessus ne diffèrent des déformés de G. Lopez (§2.1) que par un problème de réflexivité ou d'irréflexivité sur certains sommets.

La 3-chaîne (au sens élargi) $0<1<2$ où 0 seul est réflexif est Fraïssé-reconstructible et donc ne figure pas parmi les motifs, elle est pourtant hémimorphe à un 3-cycle dont un seul élément est réflexif lequel est un

motif. On vérifie à la main qu'une relation binaire hémimorphe à un motif dont le cardinal atteint ou dépasse 4 est encore un motif.

Certaines paires de motifs peuvent être imbriquées comme le montre l'exemple de D_{19} qui peut être inclus dans une relation de type D'_{13}. De même D_{26} peut être inclus dans $\overline{D}_8$ ou dans certaines variantes de D_7 ou D_9. Ce sont les seuls cas d'imbrication entre motifs (on peut pour le voir s'aider des lemmes *(i) (ii) (iii)*):



Ces inclusions ne seront plus possibles entre les grands motifs qu'on va maintenant introduire et qui, par définition, seront incomparables par inclusion.

§2.2.2 MOTIFS ET GRANDS MOTIFS

G. Lopez et J. G. Hagendorf ont démontré un théorème de *Fraïssé*-reconstructibilité stipulant que les relations binaires de cardinal infini (Hagendorf, 1990) ou fini ≥7 (Lopez, 1978) sont Fraïssé-reconstructibles c'est à dire reconstructibles par leurs parties propres (voir [9], [3] et [16]). Ce problème avait été initialement posé par R. Fraïssé en [4] dès 1970. Quand on parlera du *théorème de reconstruction* sans autre précision il ne s'agira pas de ce théorème là mais du théorème de *motifs*-reconstruction (reconstruction par les motifs) qu'on va maintenant énoncer en anticipant ainsi le §7.7:

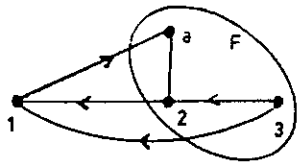
THÉORÈME de reconstruction. Si deux relations binaires R et R' de même base sont isomorphes sur chaque restriction F (propre ou pas) de la base où R|F ou R'|F est un motif alors R et R' sont isomorphes.

Le théorème de (motifs-)reconstruction n'affirme donc pas que toutes les relations binaires sont (Fraïssé-)reconstructibles, il entraîne seulement cette (Fraïssé-)reconstructibilité pour les relations binaires de cardinalité finie ≥7 puisque les motifs finis sont tous de cardinal ≤6.

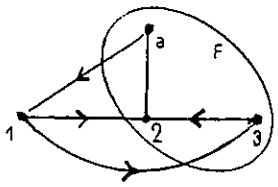
L'intérêt de ce théorème tient au fait qu'on dispose au §2.2 de la liste complète des motifs. Cette liste a été échafaudée, pour d'autres raisons, par G. Lopez sur une ébauche de Michel Jean avant que J. G. Hagendorf ne montre son caractère (presque) exhaustif pour le théorème de reconstruction. G. Lopez recherchait en fait des exemples de déformées, le lemme *(xxii)* nous permet de prendre ces déformées comme motifs de reconstruction.

L'énoncé du théorème de reconstruction est tout aussi valable pour l'anti-isomorphie.

L'exemple suivant est une curiosité: sur {a,1,2,3} les relations $R=D_{12}$ et R' de type D'_{13}, déduite de D'_{13} par échange des noms des sommets "2" et "3" sont hémimorphes mais ni isomorphes ni anti-isomorphes, le théorème de reconstruction affirme donc l'existence d'un motif E où il n'y a pas isomorphie entre R et R'; cette partie E n'est autre que |R| elle-même, mais sur E il n'y a pas pour autant anti-isomorphie puisque E n'est pas une partie propre de |R|; une partie propre F où il n'y a pas anti-isomorphie est {a,2,3}.



R



R'

Il semble, mais aucun des deux auteurs n'a eu le courage de le vérifier complètement, que les preuves de la Fraïssé-reconstructibilité des relations binaires irréflexives de cardinal fini ≥7 figurant en [3] et [16] n'utilisent que l'isomorphie sur les déformées, ce qui constituerait une nouvelle preuve du caractère exhaustif de la liste des déformées irréflexives de G. Lopez figurant en [16] (dans le cas fini tout au moins et avec la double réserve que d'une part, certaines "déformées" de [16] ne sont qualifiées de *déformées* que par erreur et que d'autre part, certaines classes d'hypomorphie y sont oubliées [comme V_6, V_7 ou S_3], qui ne sont heureusement pas des déformées!).

NOTA. L'ensemble des motifs est *optimum* parmi les ensembles $\mathcal{T}$ de types d'isomorphie de relations binaires, qui ont la propriété du théorème de reconstruction à savoir l'isomorphie entre R et R' de même base est assurée dès qu'il y a isomorphie sur chacun des types de l'ensemble $\mathcal{T}$, à ceci près que, par exemple, l'isomorphie sur les singletons réflexifs est logiquement équivalente à l'isomorphie sur les singletons irréflexifs et qu'il n'est pas nécessaire de faire figurer les deux types dans $\mathcal{T}$ malgré la dissymétrie fâcheuse ainsi introduite. La situation est la même avec le doublon formé par le cycle D_3 et la chaîne D_4. Idem pour D_7, D_8, D_9, et pour D_0, D_1, D_2: l'isomorphie sur deux de ces types entraîne l'isomorphie sur le troisième dès qu'est acquise l'isomorphie sur les parties de cardinal strictement inférieur à celui de la base. Idem avec les quatre types D_{26} D_{27} D_{28} et D'_{28} (l'isomorphie sur trois d'entre eux entraîne l'isomorphie sur le quatrième) et pour les autres paires de types finis non autoduaux mais duaux l'un de l'autre: D_5 et D_6, D_{10} et D_{11}, D_{18} et D_{19} etc... De même la ≤ 3-hypomorphie entraîne l'équivalence entre l'isomorphie sur un avatar de Ω et l'isomorphie sur son dual. Les types ω et ω^*, eux, sont tous deux nécessaires.

Montrons maintenant le caractère optimal de cet ensemble $\mathcal{T}$: les motifs finis doivent figurer dans l'ensemble $\mathcal{T}$ puisqu'ils ne sont pas reconstructibles, ω ou ω^* doit s'y trouver aussi puisque ces deux types ne peuvent être distingués par leurs restrictions finies (même argument pour Ω *ou* Ω^*); on a vu au §3 de [9] des exemples montrant que la $\leq\omega$-hypomorphie n'entraînait pas la $\leq\omega^*$-hypomorphie ce qui implique la nécessité d'avoir ω <u>*et*</u> ω^* dans l'ensemble des types.

Dans [9] (§3 à §6) on a reconstruit à grands frais les ordres, les préordres et même les relations transitives à partir de ω, ω^* et des relations binaires de cardinal ≤ 3. Le théorème de reconstruction précédent rend évidents ces résultats de [9] puisque les seuls motifs à être transitifs sont précisément ω, ω^* et des relations de cardinal ≤ 3 ! Le §7 de [9] qui imite la preuve de Lopez de [16] est lui aussi périmé par le §7.7, du présent article plus théorique et plus profond qui affirme que ω, ω^*, $\omega^*+\omega$ sont les seules classes d'hypomorphie infinies.

DÉFINITION . Appelons **grands motifs** les motifs qui ne sont pas auto-duaux mais dont toute restriction stricte est autoduale. Autrement dit les motifs non auto-duaux *minimaux*.

(Rappelons qu'on entend par restriction *stricte* d'une relation R une restriction dans laquelle R ne se plonge pas.)

Les grands motifs sont donc deux à deux incomparables par plongement.

Les seuls motifs non-autoduaux à ne pas être des grands motifs sont $\overline{D}_8$ et $\overline{D}_9$ (ou variantes) qui contiennent un motif non auto-dual de type D_{26}, et D_{13} qui contient un motif non autodual de type D_{19} (et leurs variantes).

Il y a en tout 46 grands motifs finis et 70 motifs finis non auto-duaux.

Les 46 grands motifs finis sont constitués par:

- D_{26} et D_{27}
- les 8 variantes de D_{18} (les extrémités de l'arête orientée ont même statut de réflexivité)
- 8 des variantes de D_9
- les 4 variantes de D_5
- les 8 variantes de D_{10}
- les 8 variantes de D_{14}
- les 4 variantes de D_{22}
- les 4 variantes de D_{20}.

Les 24 autres motifs non autoduaux finis sont constitués par:

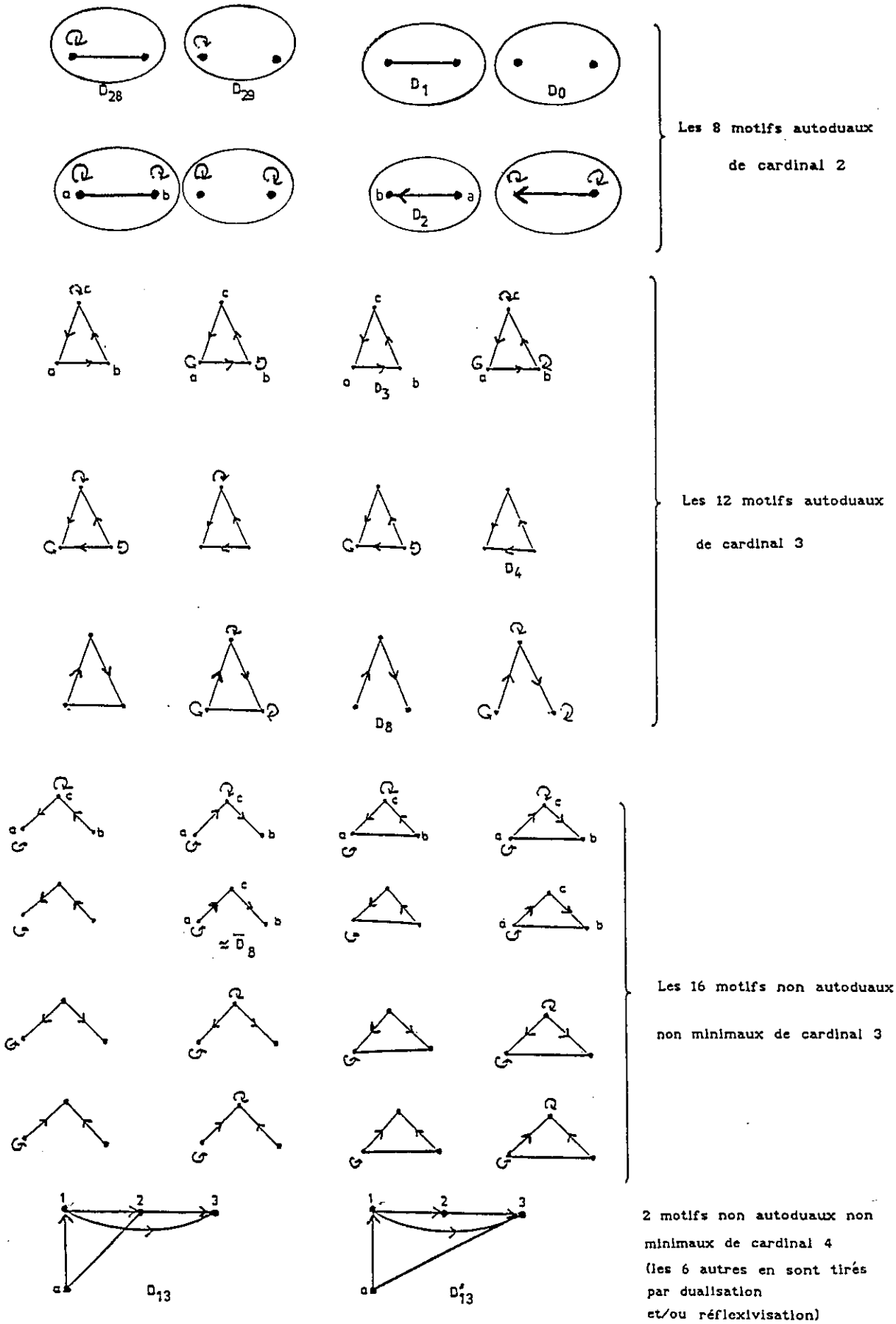
- 8 des variantes de D_8
- les 8 autres variantes de D_9
- les 8 variantes de D_{12}.

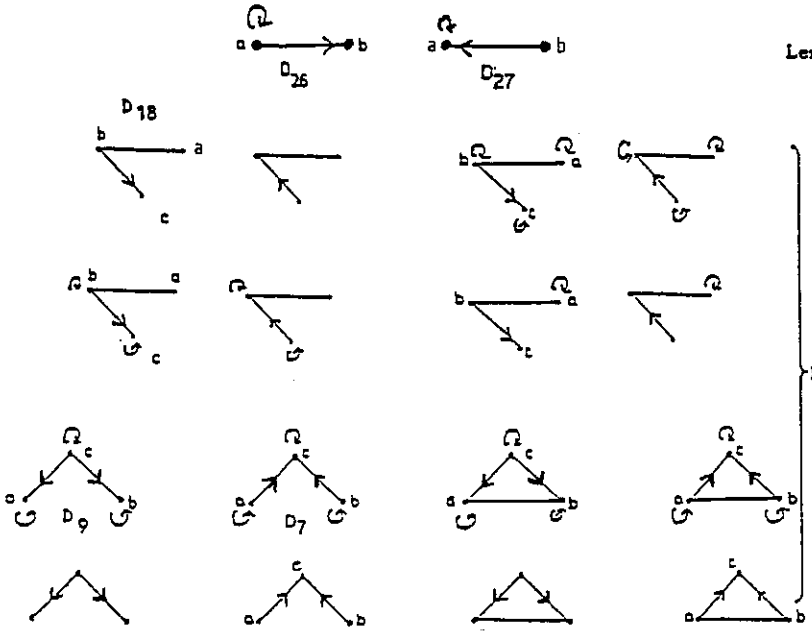
Les 26 motifs auto-duaux se trouvent parmi les chaînes, consécutivités et cycles de cardinal ≤3 soit:

- les 2 variantes du singleton
- les 2 2-chaînes au sens restreint
- 6 des variantes de D_0
- les 8 variantes auto-duales de la 3-consécutivité
- les 4 3-cycles
- les 4 3-chaînes autoduales.

Chacun de ces motifs est hypomorphe à son dual sauf les variantes de D_{12}. D_{12} est hypomorphe à une isomorphe de D'_{13} et D_{13} est hypomorphe à une isomorphe de D'_{12}. Le dual d'un grand motif fini en est un déformé, ce dual est, à l'isomorphie près, le seul déformé qui soit aussi un grand motif.

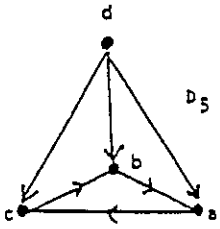
DIAGRAMMES REPRÉSENTATIFS DES DIFFÉRENTS MOTIFS ET GRANDS MOTIFS.

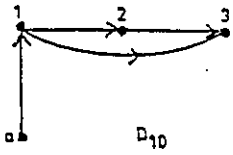




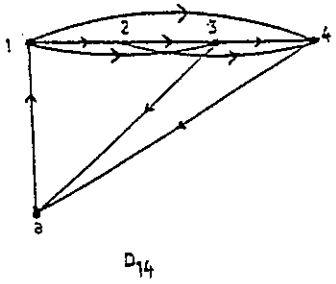
Les 2 grands motifs de cardinal 2

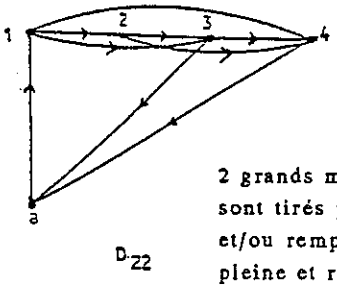
Les 16 grands motifs de cardinal 3



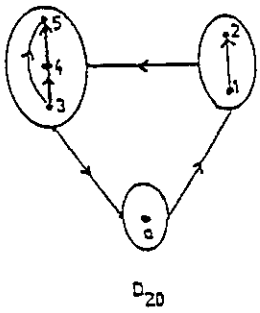


2 grands motifs de cardinal 4 (les 10 autres en sont tirés par dualisation et/ou réflexivisation et/ou remplacement de toutes les arêtes vides par des pleines).





2 grands motifs de cardinal 5 (les 10 autres en sont tirés par dualisation et/ou réflexivisation et/ou remplacement de l'arête vide par une pleine et réciproquement).



1 grand motif de cardinal 6 (les 3 autres en sont tirés par dualisation et/ou réflexivisation).

§ 2.2.3. Connexité

Introduisons la notion de connexité qui sera essentielle pour la suite.

DÉFINITION . Une relation binaire est dite **connexe** si deux éléments quelconques x,y de la base peuvent être reliés par un chemin [fini] $(x,x_1,x_2,\cdots,y)$ de flèches $(x,x_1),(x_1,x_2),\cdots$ dont l'orientation est quelconque.

On conviendra que les singletons ne sont *pas* connexes (pas plus que l'ensemble vide). *Le sens du mot "connexe" est donc ici différent de celui qu'il prend dans le cadre de la théorie des graphes symétriques.*

Remarque importante. Constatons tout de suite que dans chaque grand motif il existe une *unique* partie connexe maximale pour l'inclusion, on l'appellera *la* **composante connexe** du motif. D'ailleurs les seuls grands motifs non connexes sont les variantes de D_{18} et D_{19}.

Petit lemme (00) . Si deux motifs non autoduaux de même base sont isomorphes ils sont identiques sur tout éventuel grand motif strictement inclus dans la base.
Vérification à la main.

PROPOSITION 0 . Si une relation binaire R n'est pas isomorphe à sa duale, elle contient un grand motif.

PREUVE . Si R et R^* ne sont pas isomorphes il existe d'après le théorème de reconstruction un motif où R et R^* ne sont pas isomorphes. Si ce motif est

infini il est du type de ω ou Ω (ou variante) qui sont des grands motifs et la démonstration est terminée. Supposons-le donc fini. Prenons en un minimal (pour l'inclusion). Il est donc non autodual. C'est par conséquent un grand motif. □

Petit lemme 0 . Les grands motifs connexes sont caractérisés (parmi *toutes* les relations binaires) par la conjonction des 3 propriétés suivantes:

i) ils sont connexes,

ii) leurs restrictions strictes sont autoduales,

iii) ils ne sont pas autoduaux.

(Cette caractérisation est donnée pour les relations binaires quelconques: on n'exige pas qu'elles soient préalablement des motifs).

PREUVE. En effet, dans le cas fini, les relations binaires R vérifiant ces trois propriétés ont leurs restrictions propres autoduales (d'après *(ii)*) et sont donc hypomorphes à leur duale R^*; étant connexes elles ne forment avec cette duale qu'une seule (R,R^*)-classe de différence. Chaque relation binaire infinie R possédant ces propriétés est fini-hypomorphe à sa duale R^* et ne forme avec elle qu'une seule (R,R^*)-classe, elle doit être une consécutivité infinie ou une chaîne infinie de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$ (voir §7.7 lemme *(xxi)*); la condition *iii)* élimine alors le type $\omega^*+\omega$ et R ne peut plus être autre chose qu'un grand motif. □

Le précédent énoncé peut s'améliorer:

PROPOSITION 0' . Les grands motifs sont caractérisés (parmi *toutes* les relations binaires) par la conjonction des 2 propriétés suivantes:

i) leurs restrictions strictes sont autoduales,

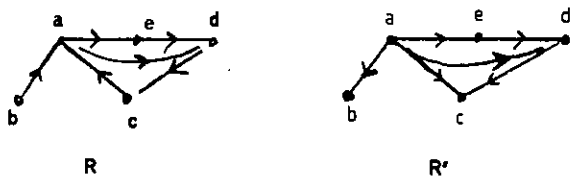
ii) ils ne sont pas autoduaux.

(Cette caractérisation est donnée pour les relations binaires quelconques: on n'exige pas qu'elles soient préalablement des motifs).

Les grands motifs sont donc les *relations binaires non autoduales minimales*.

PREUVE . Admettons qu'une relation binaire R vérifie les conditions *i)* et *ii)*. D'après la proposition 0, R contient en vertu de *ii)*, un grand motif G. Ce grand motif G n'est pas autodual donc n'est pas une restriction *stricte* de R (d'après *i*)) et R se plonge donc dans G. La relation R, si elle n'était pas un grand motif serait différente de G et ne pourrait donc qu'être infinie. Le grand motif G serait donc aussi infini et ne pourrait qu'être de type ω ou Ω ou variante lesquels sont connexes. Une relation R se plongeant dans ω ou Ω ou variante et contenant aussi un type ω ou Ω ou variante, ne pourrait alors qu'être isomorphe à ω ou Ω ou variante et par conséquent être aussi connexe, cas résolu par le petit lemme 0. □

EXEMPLE . Soit R défini sur {a,b,c,d,e} (a,b,c,d,e distincts) par b<a, c<a, a<e<d, d<c, arêtes vides ailleurs et R' identique à R sauf que a<c, a<b. Alors R' et R ne sont pas isomorphes et contiennent le seul motif R|{a,b,c} sur lequel elles ne sont pas isomorphes (remarquons que celui-ci n'est pas un intervalle).



On conviendra dans tous les exemples à venir dans cet article que les éléments désignés par des lettres différentes sont distincts!

§2.3 Allures et doubles-motifs.

Remarquons que les motifs de cardinal ≥4 (exceptés D_{12}, D_{13} et variantes) sont demi-reconstructibles.

On peut facilement obtenir des relations non demi-reconstructibles jusqu'au cardinal 12 en réunissant deux grands motifs: par exemple soit U et V deux relations binaires de bases disjointes et de type D_{20}, notons R la juxtaposition des deux, obtenue en ne reliant pas les éléments de U avec ceux de V (c'est à dire en les reliant par des arêtes vides). Soit R' la juxtaposition obtenue de même avec U et V^*. Bien que R et R' ne soient ni isomorphes ni anti-isomorphes, on a pour toute partie propre F de $|U|\cup|V|$, $R|F \approx R'|F$ (si $F \supseteq |U|$) ou $R^*|F \approx R'|F$ (si $F \supseteq |V|$) et les deux à la fois si F n'inclut ni $|U|$ ni $|V|$. Cet exemple est une illustration de ce qu'on appellera des interdictions de 1ère espèce ou *cylindres*.

Rappelons qu'on parle de *variante* d'un motif pour désigner les variantes *qui sont encore des motifs*; on ne peut donc pas, si on veut être sûr d'obtenir un nouveau motif, altérer inconsidérément la réflexivité de n'importe quel sommet d'un motif donné, ainsi la 3-consécutivité où seul le deuxième sommet est réflexif n'est pas un motif est n'est donc pas une variante de $\overline{D}_8$.

D_{13} et D_{12} fournissent un exemple de motif de cardinal 4 où il y a isomorphie sur chaque partie propre mais ni iso- ni anti-isomorphie sur le tout.

De même pour la 3-chaîne *au sens élargi* (a,b,c) où il y a réflexivité uniquement sur les premier et second éléments a,b et la 3-chaîne *au sens*

élargi de même base obtenue en inversant les positions des deuxième et troisième éléments [on appelle *premier* élément le plus petit, et *troisième* le plus grand]; (ces chaînes ne sont pas des motifs). On a $E=\{a,c\}$ et $F=\{b,c\}$.

Notons à ce propos qu'un iso- ou un anti-isomorphisme d'une 3-chaîne sur elle-même conserve le second élément; cette remarque nous servira bien des fois.

Nous allons donner des exemples de paires de relations binaires R et R' hémimorphes mais ni iso- ni anti-isomorphes (R et R' constituent donc des paires de contrexemples à la demi-reconstructibilité). On pourra à chaque fois se convaincre de visu que R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes, on le vérifiera au §5.0. Cette conviction sera plus loin étayée par un lemme de non recollement plus général.

On remarquera à chaque fois que la base est réunion de deux grands motifs (non nécessairement disjoints) E et F (c'est à dire que $R|E$ et $R|F$ sont des grands motifs) vérifiant $R'|E \approx R|E$ et $R'|F \approx R^*|F$. On appellera **allure** le type de (R,R',E,F) dans ces exemples.

Plus formellement nous dirons qu'un quadruplet $(\overline{R},\overline{R}',\overline{E},\overline{F})$ est de même **allure** qu'un des exemples (R,R',E,F) donnés si les relations binaires $\overline{R}$ et $\overline{R}'$ sont de base $\overline{E}\cup\overline{F}$, ($\overline{R}$ et $\overline{R}'$ hémimorphes, isomorphes sur $\overline{E}$, anti-isomorphes sur $\overline{F}$) et s'il existe une injection de $\overline{E}\cup\overline{F}$ sur $E\cup F$, qui est un isomorphisme de $\overline{R}$ sur R et de $\overline{R}'$ sur R', et qui transforme $\overline{E}$ en E et $\overline{F}$ en F.

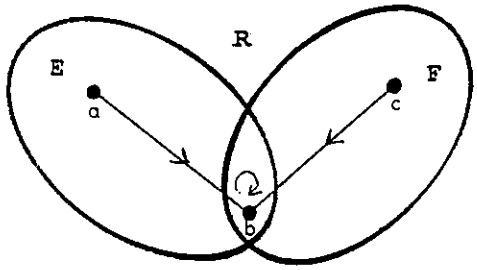
Ces allures seront désignées par (α) (β) (γ) (δ) (ε) (η) et (ζ).

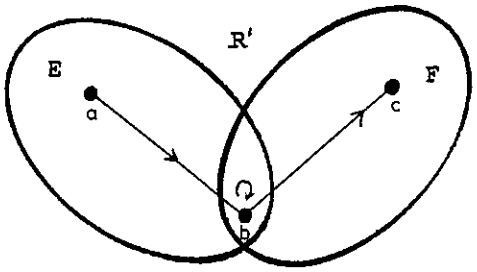
On dira parfois plus simplement que (R,R') est d'une certaine allure (α), (β) etc $\cdots$ s'il existe E et F tels que (R,R',E,F) est de l'allure indiquée. A noter que les différentes allures ne sont pas exclusives les unes des autres puisque un couple (R,R') peut être représentant à la fois de l'allure (η) et de l'allure (ζ).

• On dira des premiers exemples qui vont suivre, où le *cardinal de la base vaut 3, qu'ils sont de même* <u>*allure (α)*</u>: *$R|E$ ($\approx R'|E$) et $R|F$ ($\approx R'^{*}|F$) sont de type D_{26} ou D_{27} (ou variantes)*. Les arêtes reliant E-F à F-E sont a priori quelconques tant que sont respectées l'hémimorphie sur E∪F, l'isomorphie sur E et l'anti-isomorphie sur F; on ne le répétera plus pour les autres allures.

Exemple. Soit $|R|=\{a,b,c\}$ avec $R(a,b)=R(c,b)=R(b,b)=(+)$ et $(-)$ ailleurs; R' ne diffère de R que par $R'(b,c)=(+)$ et $R'(c,b)=(-)$; En posant $E=\{a,b\}$ et $F=\{b,c\}$ on a $R|E\approx R'^{*}|F\approx R|F\approx D_{27}$.

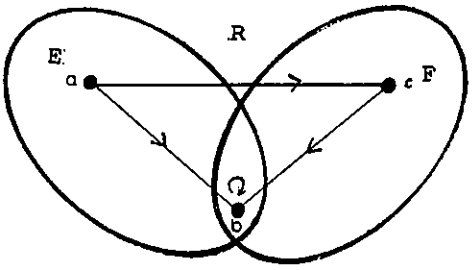
allure (α):

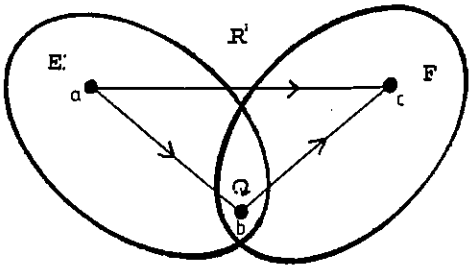




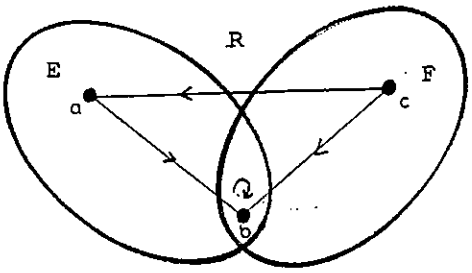
Autre exemple qui ne diffère de celui-ci que par $R(a,c)=(+)$, $R(c,a)=(+)$.

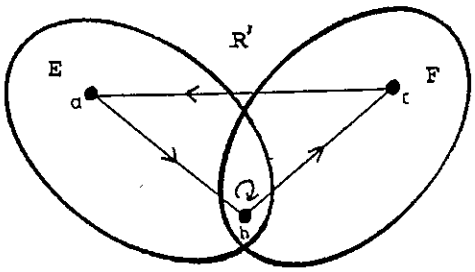
On peut encore poser $R|(a,c)=R'|(a,c)=(+,-)$ ce qui donne encore des relations non demi-reconstructibles classées dans l'allure (α):





Même chose en posant $R|(a,c)=R'|(a,c)=(-,+)$. R est alors une 3-chaîne et R' un 3-cycle:





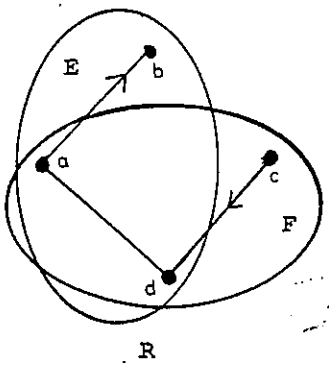
Idem si $R|(a,c)\neq R'(a,c)$.

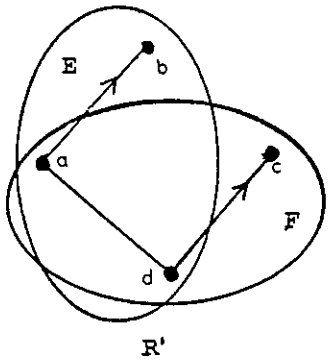
Variation en rendant {a,c} réflexif et {b} irréflexif.

• Nouvelle série d'exemples *de cardinal 4* qu'on dira ce coup-ci d'<u>*allure (β)*</u> avec *$R|E$ et $R|F$ de type D_{18} ou D_{19} (ou variantes), $E\cap F$ étant formé de deux éléments liés par une arête neutre et chacun de ces éléments étant extrémité d'une flèche de $R|E$ ou d'une flèche de $R|F$.* (En conséquence l'arête joignant les singletons F-E et E-F est neutre.)

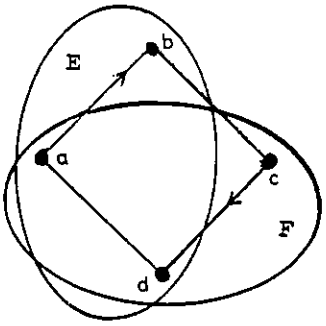
Exemple: sur {a,b,c,d}, R est défini par $R(a,b)=R(a,d)=R(d,a)=R(c,d)=(+)$ et (-) ailleurs, R' ne diffère de R que par le fait que $R'(c,d)=(-)$ et $R'(d,c)=(+)$. En posant $E=\{a,b,d\}$, $F=\{a,c,d\}$ on a $R|\{a,b,d\}\approx R'|\{a,b,d\}\approx D_{18}$ et $R^*|\{a,c,d\}\approx R'|\{a,c,d\}\approx D_{18}$.

allure (β):

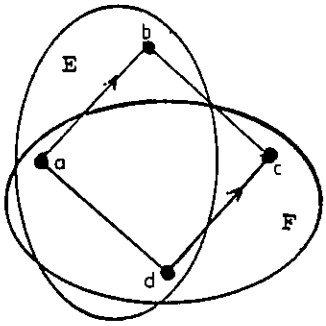




Autre exemple toujours d'*allure* (β) en rendant pleine l'arête (b,c) de l'exemple précédent. Dans cet exemple on pourrait prendre F={b,c,d}.



R

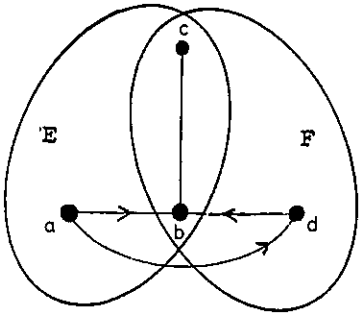


R'

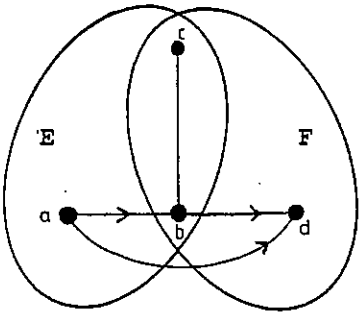
• Nouvel exemple maintenant de relations binaires non demi-reconstructibles à *4 éléments*, qu'on dira d'<u>*allure* (γ)</u>: *$R|E$ et $R|F$ sont de type D_{18} ou D_{19} (ou variantes), $E \cap F$ est encore formé de deux éléments liés par une arête neutre mais un de ces éléments est à la fois extrémité d'une flèche de $R|E$ et d'une flèche de $R|F$.* (En conséquence l'arête joignant les singletons E-F et F-E est orientée.)

Exemple: soit E={a,b,c} et F={b,c,d}, sur E∪F on a R|(a,b)=(+,-)= R|(d,b)=R|(a,d), (b,c) plein et, (a,c) et (c,d) vides; R' ne diffère de R que par R'|(d,b)=(-,+).

Allure (γ):

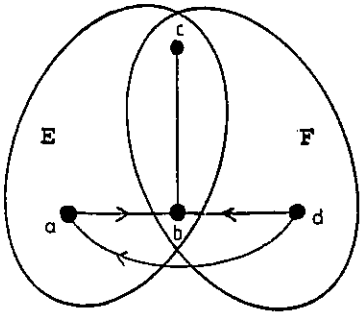


R

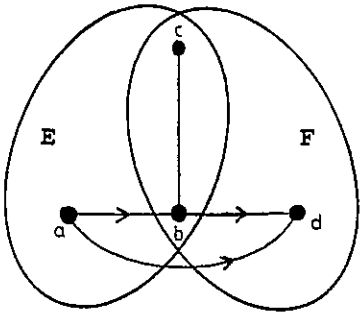


R'

Autre exemple ne différant du précédent que par le changement de sens de (a,d) dans R:



R



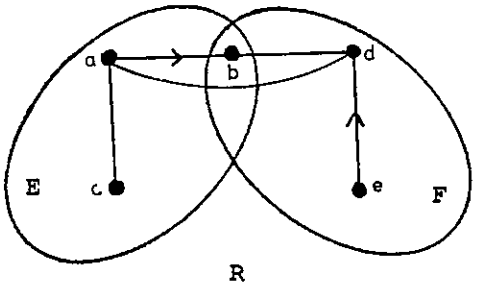
R'

• Passons à des exemples de relations binaires non demi-reconstructibles à *5 éléments*, qu'on dira d'<u>*allure (δ)*</u>: *R|E et R|F sont de type D_{18} ou D_{19} (ou variantes) et E∩F est réduit à un élément qui est sommet d'une flèche de R|E* <u>*ou*</u> *d'une flèche de R|F mais pas des deux.*

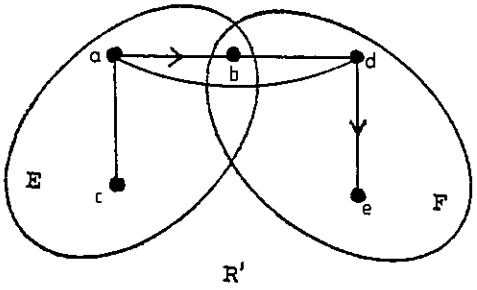
Anticipons le §5.3 en signalant que (a,d) [avec les notations de la figure suivante] doit être plein et que (c,d) et (c,e) doivent être tous deux neutres.

Exemple: E={a,b,c}, F={b,d,e}, R|(a,b)=R|(e,d)=(+,-), R|(a,c)=R|(a,d)= R|(b,d)=(+,+), (-,-) ailleurs; R' ne diffère de R que par R'|(e,d)=(-,+).

allure (δ):



R



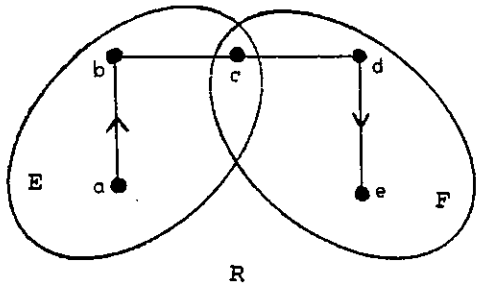
R'

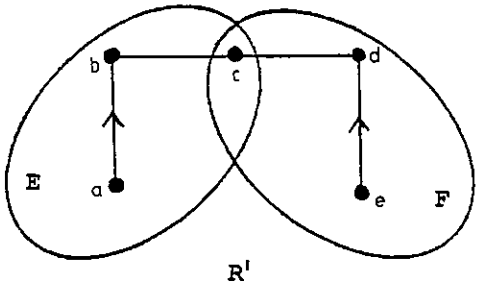
On aurait pu prendre F={a,d,e} ce qui aurait donné un exemple analogue.

• Nouvel exemple encore à *5 éléments* dont l'<u>*allure*</u> sera cette fois notée <u>(ε)</u>: *$R|E$ et $R|F$ sont de type D_{18} ou D_{19} (ou variantes) et $E \cap F$ est réduit à un élément qui cette fois ci n'est sommet d'aucune flèche de $R|E$ ni de $R|F$.*

Exemple: E={a,b,c}, F={c,d,e}, R|(a,b)=R|(d,e)=(+,-), R|(b,c)=R|(c,d)=(+,+), (-,-) ailleurs; R' ne diffère de R que par R'|(d,e)=(-,+).

Allure (ε):

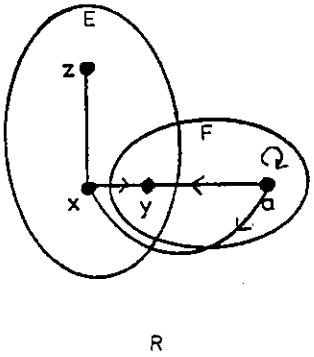


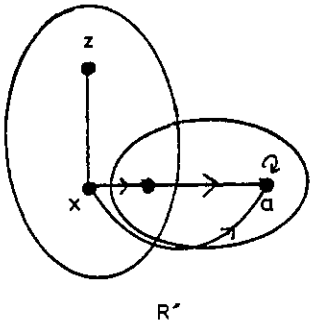


• Donnons maintenant des exemples *de cardinal 4* dits d'<u>allure (η)</u>: <u>soit</u> *$R|E$ est de type D_{18} et $R|F$ de type D_{26} (ou variantes), E et F ayant en commun un sommet d'une des arêtes orientées de $R|E$;* <u>soit</u> caractérisation analogue en échangeant les rôles de E et de F.

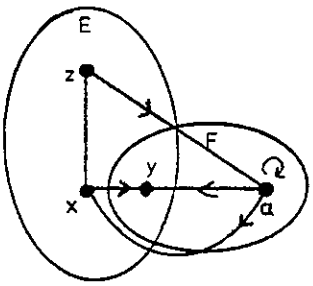
Par exemple E={x,y,z} R|(x,y)=(+,-), (x,z) plein et (z,y) vide, F={a,y}, R|(a,y)=(+,-), réflexivité en a seul, et R|(a,x)=(+,-); mod R' (a,y) et (a,x) s'inversent.

Allure (η):

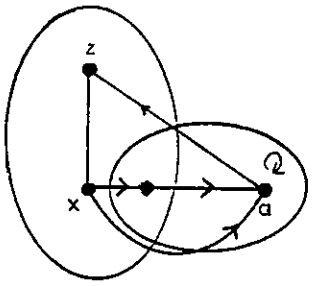




Voici un autre exemple qui ne diffère du précédent que par R|(z,a)=R'|(a,z)=(+,-).



R

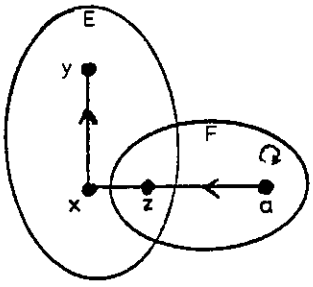


R'

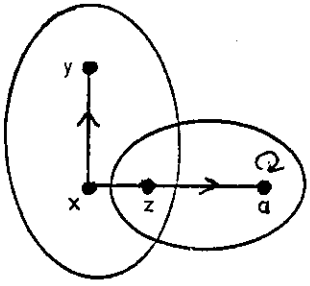
Voici pour terminer les exemples de *cardinal 4* dits d'<u>allure (ζ)</u>: *R|E est de type D_{18} et R|F de type D_{26} (ou variantes), E et F ayant en commun le sommet de R|E incident aux deux arêtes neutres de E;* <u>ou</u> caractérisation analogue en échangeant les rôles de E et de F.

Choisissons par exemple E={x,y,z}, R|(x,y)=(+,-), (x,z) plein et (z,y) vide, F={a,z}, réflexivité en a seul.

On peut lier a à y ou z de diverses façons en conservant l'hémimorphie. Par exemples (a,x) et (a,y) vides.

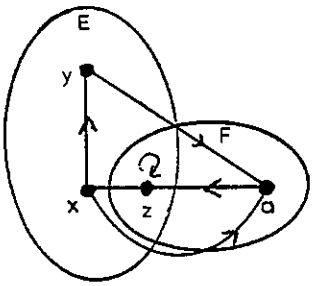


R

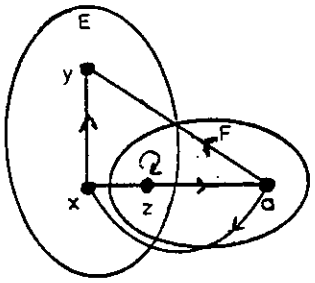


R'

Autre exemple, $R|(x,a)=R'|(a,x)=R|(y,a)=R'|(a,y)=(+,-)$.



R



R'

Remarquons que dans le cas où x et y sont réflexifs, on peut, dans l'exemple précédent prendre $F=\{y,a\}$ et faire de (R,R') un exemple aussi de l'allure (η).

. . .

Pour alléger le discours introduisons la notion de *double motif*, les doubles motifs sont à la demi-reconstruction ce que les motifs sont à la reconstruction. *Toutes les allures qu'on a vues seront des cas particuliers de doubles motifs.*

DÉFINITION . On dira que (R,R',E,F) est un **double motif** si R et R' sont deux relations binaires hémimorphes de même base telles que cette base soit réunion d'un grand motif E et d'un grand motif F vérifiant $R|E \approx R'|E$ et $R|F \approx R'^{*}|F$.

Dans cette définition nous disons simplement "grand motif E" pour dire que $R|E$ est un grand motif *et donc aussi* $R'|E$ (et réciproquement). Idem pour F.

Remarquons que de la définition même découle que E et F sont distincts de $|R|$. En effet l'éventualité $E=F=|R|$ rendrait $R|E(=R|F)$ autodual et le cas d'imbrication $E \neq F=|R|$ n'est pas possible puisque les grands motifs sont incomparables par plongement.

On verra plus loin que l'hémimorphie impose aux doubles motifs des contraintes qui n'apparaissent pas dans la définition, en particulier la finitude.

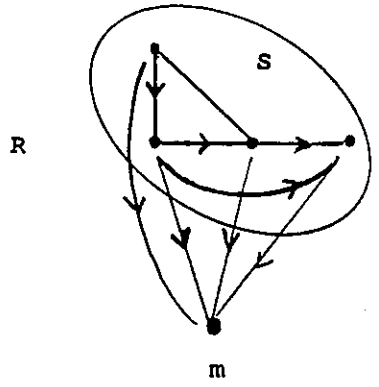
Par abus de langage on dira que la birelation (R,R') est un **double motif** *s'il existe E et F tels que (R,R',E,F) soit un double motif. Au §2.4 suivant on abusera encore plus en disant que la relation binaire R est un* **double motif** *s'il existe R' tel que la birelation (R,R') soit un double motif au sens précédemment défini. Le terme "double motif" qualifie donc tantôt des birelations tantôt des relations; cet abus bien qu'apparemment exagéré se révèle fort commode car il est souvent inconscient, en effet la*

relation R' s'avère, une fois qu'on s'est pénétré de la théorie, peu importante et il arrive qu'on l'oublie involontairement; c'est d'ailleurs ce qui se passait déjà pour la théorie de la reconstruction (voir la justification de cet abus au §5.2).

On verra que les relations binaires qui sont les doubles motifs sont avec les motifs D_{12}, D_{13}, et les motifs de cardinal 1, 2 ou 3 les seules relations binaires non demi-reconstructibles (d'ailleurs dans une version antérieure de cet article les doubles motifs avaient été définis de façon à englober toutes les relations binaires non demi-reconstructibles, mais l'introduction des grands motifs a poussé à l'abandon d'une telle définition puisque D_{12}, D_{13} et les motifs non demi-reconstructibles de cardinal ≤ 3 ne sont pas des grands motifs).

La 3-chaîne (au sens élargi) $0<1<2$ où 0 seul est réflexif est un double motif ($E=\{0,1\}$, $F=\{0,2\}$) sans être un motif.

Remarquons que la paire (R,R') accouplant les deux relations binaires R et R' formée chacune d'une relation $S\approx D_{13}$ à laquelle on adjoint un R-majorant m qui aussi est un R'-minorant, n'est pas un double motif, à cause de la restriction U de type D_{18} de S qui, unie à m constitue une partie $U\cup\{m\}$ sur laquelle il n'y a ni iso- ni anti-isomorphie entre R et R'. Ceci vient du fait que D_{13} bien que non auto-dual n'est pas un grand motif.



§2.4 . PLAN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DEMI-RECONSTRUCTIBILITÉ.

Dans ce sous-paragraphe on démontre le théorème de demi-reconstruction à partir du théorème de motifs-reconstruction et du lemme de non recollement; Le lecteur fatigué (déjà?) ou ne s'intéressant pas à la technique pourra s'arrêter à la fin de ce paragraphe s'il admet ces deux énoncés. Mais les raisons profondes du théorème de demi-reconstruction, qui se trouvent dans le lemme de non recollement, lui auront échappé...

Les lemmes suivants seront donc nécessaires à la démonstration du théorème de demi-reconstructibilité.

LEMME A . Les relations binaires non demi-reconstructibles soit sont hémimorphes à des motifs, soit contiennent des relations qui sont des doubles motifs.

PREUVE. Soient R et R' deux relations binaires de même base. Si $R \not\cong R'$ le théorème de reconstruction impose l'existence d'une partie F de la base, où $R|F$ ou $R'|F$ est un motif sur lequel R et R' ne sont pas isomorphes. Si R n'est pas anti-isomorphe à R', autrement dit si R^* n'est pas isomorphe à R, le théorème de reconstruction impose l'existence d'une partie E de la base où $R|E$ ou $R'|E$ est un motif sur lequel R^* et R' ne sont pas anti-isomorphes, autrement dit où R et R' sont anti-isomorphes. Si en plus R et R' sont hémimorphes et si E et F sont des parties *propres* de la base alors, sur E, où il n'y a pas anti-isomorphie, il doit y avoir isomorphie, et sur F, où il n'y a pas isomorphie, il doit y avoir anti-isomorphie. Qui plus est l'isomorphie sur E et l'absence d'anti-isomorphie sur E impose à E d'être non auto-dual par conséquent il contient un grand motif sur lequel

d'après le petit lemme 00 il y a isomorphie entre R et R', et de même pour F qui contient un grand motif sur lequel il y a anti-isomorphie. $R|E\cup F$ est alors bien un double motif inclus dans $|R|$. Si au contraire E (ou aussi bien F) est une partie non propre alors $E=|R|$ et R ou R' est un motif. □

Bien que ce soit inutile pour la suite on peut raffiner ce lemme A:

LEMME A' . Les relations binaires non demi-reconstructibles soit *sont* des motifs, soit contiennent des relations qui sont des doubles motifs.

PREUVE. Il suffit de raffiner la preuve du lemme A dans le cas où R est hémimorphe à un motif sans contenir un double motif. On raffine en prenant, si R est fini, des parties E et F minimales pour l'inclusion parmi les parties sur lesquelles y a isomorphie (sur E) ou anti-isomorphie (sur F) entre R et R'. Si la partie E obtenue est identique à $|R|$ cela veut dire qu'il y a anti-isomorphie entre R et R' sur toute partie propre de E qui est un motif mod R ou mod R'. D'après le théorème de reconstruction R et R'^* sont donc hypomorphes et si l'un d'eux est un motif, l'autre aussi. Si R est infini on invoque le lemme D. □

De telles situations où un motif R est hémimorphe à une relation binaire R' qui n'est pas un motif se produisent: ainsi si R est un 3-cycle $a<b, b<c, c<a$ avec réflexivité uniquement sur a et si R' est la 3-chaîne $a<b<c$ avec réflexivité uniquement sur a.

En fait il n'y a pas beaucoup de motifs qui sont non demi-reconstructibles : uniquement D_{12}, D_{13} et variantes ainsi que *tous* les motifs de cardinal 1, 2 ou 3.

Le lemme A' affirme donc qu'une relation binaire R non demi-reconstructible qui n'est pas un motif contient une partie $E\cup F$ telle que

$R|E\cup F$ est un double motif. Grâce au lemme de "non recollement" ce lemme A' peut être amélioré en affirmant que $E\cup F$ est en fait toute la base de R:

LEMME A" . Les relations binaires non demi-reconstructibles soit *sont* des motifs, soit *sont* des doubles motifs.

L'énoncé du lemme de non recollement suivant peut s'interpréter en disant qu'un isomorphisme et un anti-isomorphisme ne peuvent pas se recoller. La conséquence de ce lemme est que les relations binaires non demi-reconstructibles sont des motifs ou *sont* des doubles motifs et par suite leur cardinal s'il est fini ne saurait dépasser 12.

LEMME B dit DE NON RECOLLEMENT . Soit (R,R') un double motif. Alors R n'est ni isomorphe ni anti-isomorphe à R'.

Ce lemme sera démontré dans les §§ suivants sous une forme dite "avec hypothèse forte" obtenue en renforçant l'hypothèse de la façon indiquée ci-après. Disons d'abord que (R,R',E,F) est un double motif **renforcé** quand (R,R',E,F) est un double motif et quand en plus $R|E$ et $R'|E$ sont *identiques* si E est infini, et $R|F$ et $R'|F$ chacun *identique* au dual de l'autre si F est infini.

LEMME B' de non recollement *avec hypothèse forte*. Soit (R,R') un double motif renforcé. Alors R n'est ni isomorphe ni anti-isomorphe à R'.

Le lemme suivant montrera l'équivalence des deux formes du précédent lemme en prouvant l'inexistence de double motifs infinis.

LEMME C . Les doubles motifs sont finis.

PREUVE. On admet le lemme de non recollement avec hypothèse forte. Soit (R,R',E,F) un double motif. Montrons d'abord que l'isomorphie sur E et l'anti-isomorphie sur F impliquent la finitude de $E\cap F$. En effet cette intersection si elle était infinie contiendrait un type ω (ou variante), ou un type Ω (ou variante) ou encore une partie infinie de Ω (ou d'une variante). Les deux premiers cas sont irréalisables car ni ω ni Ω ne contiennent de type qui leur est opposé. Reste le dernier cas, dans lequel E et F sont tous deux nécessairement de R-type Ω (ou variante). Mais alors l'isomorphie entre R et R' sur E est l'identité, et l'anti-isomorphie est la dualisation. Les deux sont bien sûr incompatibles sur l'intersection. Est donc acquis que $E\cap F$ est fini ou vide. Continuons en convenant qu'un ensemble vide est minoré ou majoré par n'importe quel élément.

1) Supposons d'abord que $R|E$ est une chaîne de type ω. Par la technique de Ramsey prenons dans E un e_1, R-majorant de $E\cap F$ et extérieur à $E\cap F$, puis dans E-F un élément $e_2>e_1$ mod R *et* mod R', puis un $e_3>e_2$ mod R et mod R' etc... Notons E_1 l'ensemble $\{e_2,e_3,\cdots\}$ (e_1 n'en fait pas partie).

2) Supposons maintenant que $R|E$ est une consécutivité de type Ω; il y a identité entre R et R' sur E; notons E'_1 l'ensemble des éléments de E-F qui sont R-majorants de $E\cap F$ modulo la chaîne de type ω canoniquement associée à $R|E$; notons E_1 l'ensemble des éléments de E'_1 qui ont un "prédécesseur immédiat" dans E'_1 (on exclut donc le "premier" élément).

3) Construction analogue aux précédentes quand $R|E$ est de type ω^* ou Ω^*.

4) Supposons enfin que E est fini; on pose $E_1=E$.

Recommençons avec F la construction qui vient d'être faite en 1) 2) 3) et 4) pour E et extrayons donc ainsi une partie F_1 de F.

Si $E\cup F$ est infini, $E_1\cup F_1$ en est une partie propre et $(R|(E_1\cup F_1),R'|(E_1\cup F_1),E_1,F_1)$ est un double motif renforcé. Le lemme B' dit alors que $R|(E_1\cup F_1)$ et $R'|(E_1\cup F_1)$ ne sont ni isomorphes ni anti-isomorphes contrairement à l'hypothèse d'hémimorphie entre R et R'. □

LEMME D . Les motifs infinis sont demi-reconstructibles.

PREUVE. On vérifie d'abord que les consécutivités infinies sont demi-reconstructibles.

Le cas des consécutivités étant acquis passons à celui des chaînes.

Soit R une chaîne infinie de type, disons ω, et R' une relation binaire qui lui est hémimorphe et qui est donc une chaîne. Si R' n'était ni de type ω ni de type ω^* elle contiendrait, étant infinie, des parties strictes d'un de ces types disons ω. Soit A une partie stricte de la base de R'-type ω. Envisageons plusieurs cas. 1) A n'est pas cofinal à $|R'|$; alors R' inclut une partie propre B de R'-type $\omega+1$, or ni $\omega+1$ ni son opposé $1+\omega^*$ ne se plonge dans ω — absurde. 2) A est cofinal à R'. Deux sous-cas se présentent. a) R' contient une partie D de R'-type ω^*. Alors apparaît dans R' une partie propre de R'-type $\omega^*+\omega$ ce qui est absurde car ce dernier type pas plus que son dual (qui est lui-même) ne se plonge pas dans ω. b) S'il n'y a pas dans $|R'|$ de partie D de type ω^* alors R' est bien ordonné. Soit R' est de type ω et la preuve est finie; soit il est de type $>\omega$ mais un tel type, pas plus que son dual ne se plonge dans ω — absurde. □

Voici démontré *(en admettant le lemme de non recollement)* le principal résultat de cet article:

THÉORÈME DE DEMI-RECONSTRUCTIBILITÉ . Si deux relations binaires sont hémimorphes et de cardinal ≥13 alors elles sont isomorphes ou anti-isomorphes.

PREUVE. C'est une conséquence immédiate des lemmes A à D et du fait que les motifs finis sont de cardinal ≤6 et donc les doubles motifs de cardinal ≤12. □

La suite de ce §2 est inutile à la preuve du théorème de demi-reconstruction. Nous y donnons comme autres conséquences du lemme de non recollement les trois résultats significatifs suivants qui, sous la forme de propositions 1 à 1ter, améliorent et précisent le théorème de demi-reconstruction:

PROPOSITION 1. Soit R et R′ deux relations binaires sur une base de cardinal infini ou fini ≥13. Si pour chaque partie propre E de |R| on a $R|E \approx R'|E$ ou $R^*|E \approx R'|E$ alors on a soit pour toute partie E (propre ou pas) $R|E \approx R'|E$ soit pour toute partie E (propre ou pas) $R^*|E \approx R'|E$.

PREUVE . Par l'absurde en supposant l'existence d'un motif E sur lequel il n'y a pas anti-isomorphie entre R et R′ et un motif F sur lequel il n'y a pas isomorphie.

Dans le cas où |R| est fini prenons E et F minimaux. L'égalité E=|R| est incompatible avec la cardinalité finie ≥13 de R. Si E≠|R| et F≠|R| alors R|E∪F est un double motif, il n'y a donc d'après le lemme de non recollement ni iso- ni anti-isomorphie sur E∪F ce qui impose E∪F=|R| — incompatible avec la cardinalité de R.

Dans le cas où |R| est infini. Le lemme de non recollement avec hypothèse forte dit que sur E∩F il y aurait, si cette intersection était finie, identité et dualité ce qui est impossible. Cette intersection est donc finie (éventuellement vide). Un des grands motifs E ou F au moins est infini, disons E. E-F est aussi infini. On a par suite isomorphie (mod R et mod R′) entre une partie E′ de E-F (disons un "intervalle final" si R|E est par exemple de type Ω) et E. E′ est donc encore un grand motif et (R|(E′∪F),R′|(E′∪F),E′,F) est un double motif. D'après le lemme de non recollement il n'y a ni iso- ni anti-isomorphie entre R et R′ sur E′∪F; c'est absurde puisque E′∪F est une partie propre de |R|. □

Dans l'énoncé de la précédente proposition on peut évidemment, au lieu d'imposer l'iso- ou anti-isomorphie sur toutes les parties propres E, se restreindre à celles qui sont des motifs. On ne peut par contre se contenter des grands motifs: prendre pour R la réunion d'une relation binaire quelconque Q disjointe et non reliée à une partie P du type de la chaîne D_4; modulo R', Q reste identique mais R'|P devient du type du cycle D_3; il y a isomorphie sur les grands motifs (ils ne peuvent qu'être inclus dans Q) mais ni iso- ni anti-isomorphie sur le tout.

La proposition suivante permet de préciser ce que pourraient être des "motifs de demi-reconstruction", c'est à dire les types sur lesquels il faut et il suffit qu'il y ait iso- ou anti-isomorphie pour qu'il ait iso- ou anti-isomorphie sur le tout. De même que pour la reconstruction, où ω et Ω font partie des motifs bien qu'étant reconstructibles, on trouvera parmi les "motifs de demi-reconstruction" infinis des relations demi-reconstructibles, ce seront, outre ω et variantes, les réunions infinies de deux grands motifs, Ω étant lui exclu de ces motifs de demi-reconstruction ...

PROPOSITION 1bis. Soit R et R' deux relations binaires de même base. Pour que R et R' soient, ou bien isomorphes sur chaque partie (propre ou pas) de la base, ou bien anti-isomorphes sur chaque partie (propre ou pas) de la base, il faut et il suffit qu'il y ait isomorphie ou anti-isomorphie sur chaque partie (propre ou pas) de la base sur laquelle R ou R' est, soit réunion infinie de deux grands motifs sans être un motif, soit un double motif (donc fini) soit un motif non demi-reconstructible (donc fini et de cardinal ≤ 3 sauf pour D_{12}, D_{13} et avatars), soit une variante de ω (partout réflexive ou partout irréflexive).

PREUVE. Supposons que R et R′ ne sont ni iso- ni anti-isomorphes vérifiant les hypothèses d'isomorphie ou anti-isomorphie sur leurs parties qui sont soit un double motif soit un motif non demi-reconstructible soit etc... D'après le théorème de reconstruction il existe dans |R| un motif E minimal pour l'inclusion stricte où il n'y a pas anti-isomorphie entre R et R′ et conversement un motif F où il n'y a pas isomorphie. Si sur E il n'y a pas isomorphie non plus cela veut dire, d'après l'hypothèse, que E est demi-reconstructible, il existe donc une partie stricte de E sur laquelle il n'y a ni iso- ni anti-isomorphie, partie nécessairement non auto-duale et contenant donc à son tour un grand motif sur lequel, d'après le théorème de reconstruction, il n'y aurait pas isomorphie contrairement à la minimalité de E. Sur E il y a donc isomorphie et de même sur F anti-isomorphie entre R et R′. D'après le petit lemme 00 E et F sont des grands motifs. Si R et R′ restreints à $E \cup F$ sont hémimorphes, $E \cup F$ est un double motif sur lequel il doit donc par hypothèse y avoir isomorphie ou anti-isomorphie contrairement à ce qu'affirme le lemme de non recollement. Il n'y a donc pas hémimorphie entre $R|E \cup F$ et $R'|E \cup F$. Sur une partie propre P de $E \cup F$ il n'y a donc ni iso- ni anti-isomorphie entre R et R′. Avec R|P et R′|P on peut donc reprendre le précédent raisonnement utilisé pour R et R′ et prouver ainsi l'existence d'un grand motif E_1 où il y a isomorphie et d'un grand motif F_1 où il y a anti-isomorphie, avec $E_1 \cup F_1 \subsetneq E \cup F$. En itérant on a une contradiction si la réunion $E \cup F$ est finie. Si ce n'est pas le cas l'énoncé affirme qu'il y a iso- ou anti-isomorphie sur cette réunion sauf si cette réunion est un motif. Or les seuls motifs infinis sont les variantes de ω et Ω. Le seul cas encore à voir est par conséquent celui où cette réunion est une consécutivité infinie. Or les consécutivités infinies sont demi-reconstructibles à partir des ≤3-embles (ensembles à au plus 3 éléments) car la ≤3-hémimorphie entre Ω et une relation de même base implique que cette relation est de type Ω ou Ω^*. Justement les ≤3-embles d'éléments

consécutifs de Ω (ils suffisent à cette demi-reconstruction) sont des motifs non demi-reconstructibles. □

Exemple: Considérons une relation R de base $E\cup\{f\}$ ($f\notin E$), $R|E$ étant la chaîne irréflexive de type ω, $R|\{f\}$ étant réflexif et f majorant E; mod R' les arêtes liant E et f s'inversent. L'absence d'iso- ou anti-isomorphie entre R et R' est alors due au fait que $|R|$ est réunion infinie d'un grand motif E est d'un grand motif $\{e,f\}$ de type D_{26} (pour un e quelconque de E). R et R' sont donc iso- ou anti-isomorphes sur toutes les parties strictes. C'est une situation analogue à la reconstruction infinitiste: ω et ω^* sont isomorphes sur toute partie stricte mais pas sur le tout.

Le théorème de demi-reconstruction des chaînes du §3 de [9] dont la preuve était plus que laborieuse est devenue une conséquence facile de la proposition 1bis. En effet, dans une chaîne, les réunions infinies de deux motifs qui ne sont pas elles-mêmes des motifs ne peuvent être que de type $\omega+\omega^*$ ou $\omega^*+\omega$. Or il va de soi que ces deux types sont demi-reconstructibles à partir des parties de types ω ou ω^*.

Une autre conséquence du lemme de non recollement sera la proposition suivante qui précise la nature des relations binaires non demi-reconstructibles.

PROPOSITION 1ter . Les relations binaires non demi-reconstructibles sont soit des doubles motifs soit les motifs de cardinal ≤ 3 soit des variantes de D_{12} (donc de cardinal 4).

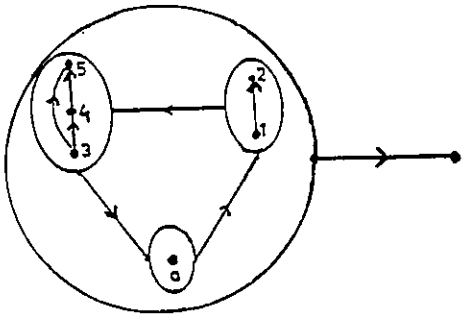
(Le lemme de non recollement prouvera encore que, réciproquement, les doubles motifs sont non demi-reconstructibles.)

PREUVE. Soient R et R' deux relations binaires hémimorphes mais non

isomorphes ni anti-isomorphes de même base. D'après le théorème de reconstruction du §2.2 il existe une partie E de $|R|$ sur laquelle il n'y a pas anti-isomorphie entre R et R' et une partie F sur laquelle il n'y a pas isomorphie. Si E et F sont des parties propres de $|R|$ alors sur E il n'y a pas anti-isomorphie ni sur F isomorphie entre R et R'; $R|E\cup F$ et $R'|E\cup F$ sont bien des doubles motifs. L'absence, d'après le lemme de non recollement, d'iso- ou d'anti-isomorphie sur $E\cup F$ prouve que $|R|=E\cup F$ et donc que R et R' sont des doubles motifs. Si E ou F est égal à $|R|$ alors R est un motif et les seuls cas où R' hémimorphe à un motif R n'est ni iso- ni anti-isomorphe à R sont ceux où R est de cardinal ≤ 3 ou des variantes de D_{12}. □

Illustrons cette proposition en remarquant qu'un 3-cycle (au sens élargi) R défini par $a<b$, $b<c$, $c<a$ avec exactement 1 élément réflexif *a* est non demi-reconstructible puisque qu'hémimorphe à la 3-chaîne (au sens élargi) R' définie par $a<b<c$ avec le même élément réflexif *a*. Ce 3-cycle est un motif mais pas la 3-chaîne laquelle est reconstructible. Néanmoins cette dernière est bien un double motif, plus précisément (R,R',E,F) est un double motif si on pose $E=\{a,b\}$ et $F=\{a,c\}$.

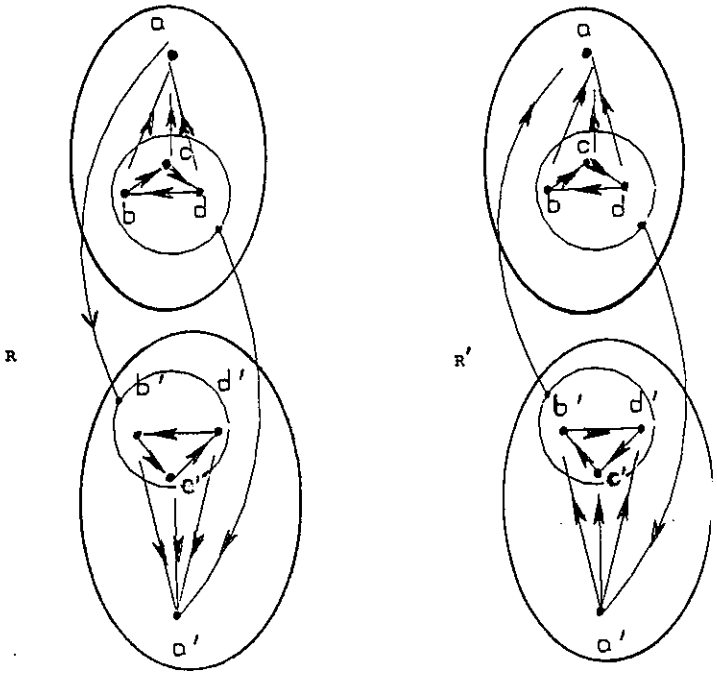
On verra comme conséquence du lemme 1 du §3 que les relations binaires connexes de cardinal (fini) ≥ 8 sont demi-reconstructibles puisque parmi les interdits d'une des trois espèces (voir §3.1) seuls les cônes sont connexes et les cardinaux des cônes sont ≤ 7; quant aux allures (§2.3) leurs cardinaux sont ≤ 5. Donnons deux relations binaires R et R' connexes, hémimorphes, sur une base à 7 éléments qui ne sont ni isomorphes ni anti-isomorphes: R et R' sont isomorphes et de type D_{20} sur un ensemble E à 6 éléments et le septième élément est un R-majorant et R'-minorant changeant de E:



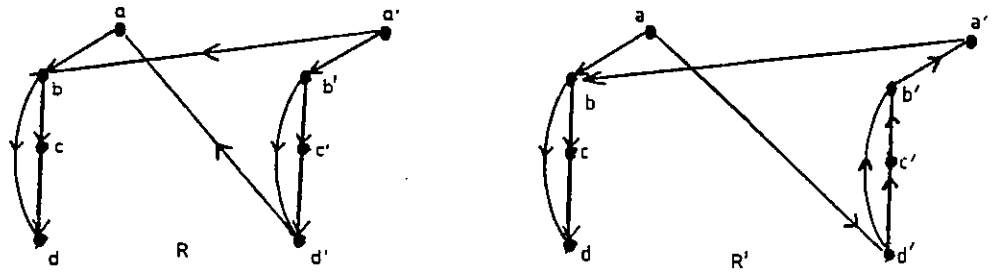
R

Illustrons le fait que les hypothèses du lemme de non recollement sont les meilleures possibles.

L'hémimorphie requise dans l'énoncé du lemme de non recollement est indispensable, sans elle la conclusion est fausse: Considérons la relation R réunion du diamant E={a,b,c,d} où b<c, c<d, d<b (mod R) a majorant {b,c,d} et du diamant F={a',b',c',d'} où b'<c', c'<d', d'<b' (mod R) a' majorant {b',c',d'} avec a' majorant {b,c,d} et a étant majoré par {b',c',d'}; soit R' identique à R sauf inversions sur le cycle (b',c',d') et sur (a,b'), (a,c') et (a,d'). E et F sont des grands motifs mod R et mod R'. La permutation qui échange a et a' ainsi que b' et d' est un isomorphisme de R sur R'; R et R' sont bien isomorphes mais pas hémimorphes car leurs restrictions à {a,b,c,d,b'} ne sont pas isomorphes, pas plus qu'anti-isomorphes.

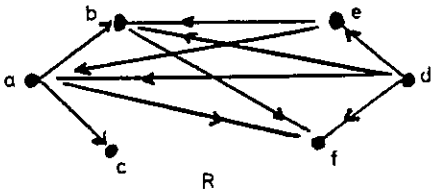


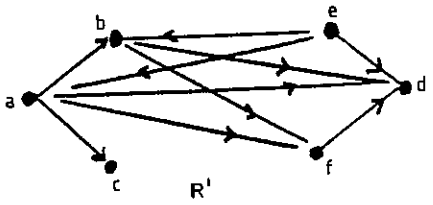
Autre exemple pour montrer la nécessité de l'hémimorphie, $E=\{a,b,c,d\}$, $F=\{a',b',c',d'\}$ avec $R|E$ et $R|F$ de type D_{10} c'est à dire $a<b$ (mod R) et $b<c<d$ (mod R); $a'<b'$ (mod R) et $b'<c'<d'$ (mod R); $a'>b'$ (mod R') et $b'>c'>d'$ (mod R') avec en plus $d'<a$, $a'<b$ (mod R) et $a'<b$ et $a<d'$ (mod R'); R et R' sont isomorphes par $a \leftrightarrow a'$ et $b' \leftrightarrow d'$ mais il n'y a ni iso- ni anti-isomorphie sur $\{b,a',b',c',d'\}$.



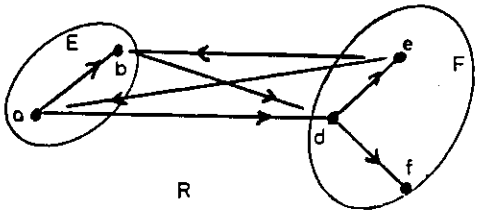
Il est tout aussi indispensable que E soit un motif *non autodual*. En effet si E est autodual on peut définir R en orientant toutes les arêtes de E vers F (disjoint de E), dans le même sens. R' ne différant de R que par dualisation sur F. Il y a bien hémimorphie mais la conclusion du lemme est contredite. Cette situation où les arêtes liant E et F sont toutes orientées dans le même sens n'est même pas la seule possible: ainsi si $R|E$ est défini par $a<b$ sur $E=\{a,b\}$ et $R|F$ par $d<e$, $d<f$, e incomparable à f sur $F=\{d,e,f\}$ disjoint de E et sur les couples à cheval sur E et F par $e<b$, $e<a$, $d<a$, $d<b$, $f>a$, $f>b$; R' ne diffère de R que par $d>a$ et $d>b$ et dualisation de R sur F. Sur $E \cup F$ R et R' sont hémimorphes, elles sont presque des chaînes et n'en diffèrent que par le fait que les 2ème et 4ème éléments mod R sont incomparables alors que pour R' ce sont les 1er et 3ème: il y a bien anti-isomorphie entre R et R'. Une impossibilité ne naît que quand on rajoute un c à E pour en faire un grand motif. Exemples analogues pour les autres grands motifs. Comme toute partie propre d'un grand motif est auto-duale, une démonstration par l'absurde du lemme

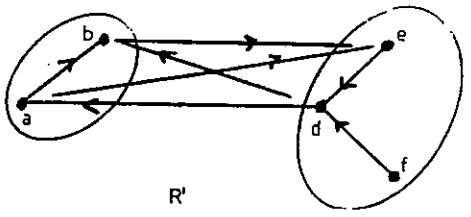
de non recollement ne peut donc aboutir à une contradiction qu'au tout dernier élément et ne peut par conséquent se faire de proche en proche ce qui explique sa difficulté.





Autre exemple: R|E est défini par a<b sur E={a,b}; R|F par d<e, d<f, e incomparable à f, sur F={d,e,f} disjoint de E; et défini sur les couples à cheval par e<b, e<a, d>a, d>b, f incomparable à a et à b; R' est dual de R sur F et sur les arêtes liant E à F, et identique à R sur E. Sur E∪F, R et R' sont alors hémimorphes et en fait anti-isomorphes.





Il est également nécessaire que E soit un *grand* motif sans quoi les hypothèses d'hémimorphie ne peuvent même pas être réalisées. En effet E contiendrait un grand motif E', sur E'∪F le lemme de non recollement s'applique et dit que R et R' n'y sont ni iso- ni anti-isomorphes !

§3. DÉMONSTRATION DU LEMME DE NON RECOLLEMENT.

Ce § comportera un certain nombre de lemmes démontrés grâce à des sous-lemmes eux mêmes exposés au §4.

§3.1.

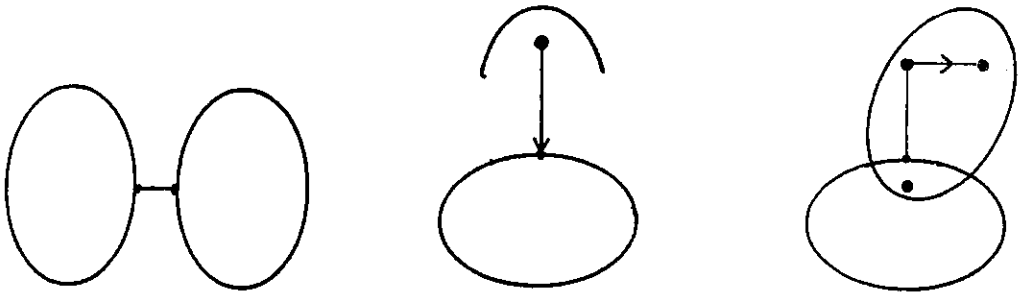
On va dans le lemme 2 affirmer que les doubles motifs se ramènent en général à un petit nombre d'*interdictions* (ou *interdits*) ou configurations *interdites* : cylindres cônes, becs etc... Les lemmes qui suivront démontreront l'énoncé du lemme de non recollement pour chacune de ces configurations.

DÉFINITIONS .

Soit (R,R',E,F) un double motif. Rappelons que cela signifie que R est une relation binaire dont la base est la réunion de deux parties E et F distinctes de la base $|R|$ telles que $R|E$ et $R|F$ sont des grands motifs, et que R' de même base que R est hémimorphe à R et vérifie les conditions: $R'|E \approx R|E$ et $R'|F \approx R^*|F$. Donnons les définitions suivantes.

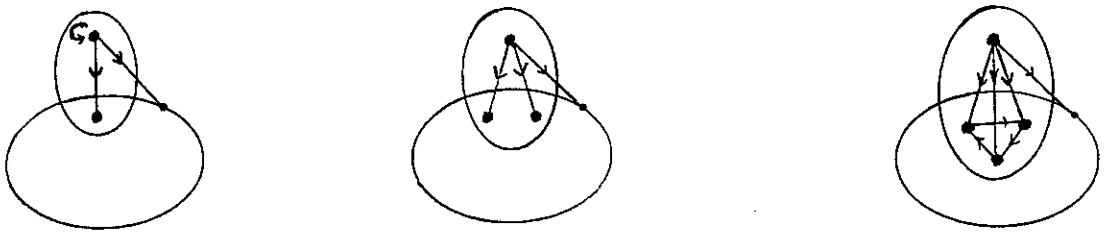
- On dira que (R,R',E,F) est un **interdit de première espèce** ou un **cylindre** si $E \cap F$ est vide et si les arêtes reliant E et F sont toutes neutres;
- On dira que (R,R',E,F) est un **interdit de deuxième espèce** ou un **cône** si
  soit F-E est un singleton extremum changeant de R et de R'
  soit E-F est un singleton extremum non changeant de R et de R';
- On dira que (R,R',E,F) est un **interdit de troisième espèce** ou un **bec** si F-E est formé de deux éléments a et b tels que (a,b) est orienté, et tels que (e,a) est plein et (e,b) vide pour tout e de E
  ou de même en permutant les rôles de E et F.

[Graphiquement pour signifier que tous les sommets d'une *patate* sont reliés de la même manière à tous les sommets d'une autre patate, on ne représentera qu'une seule arête touchant en ses extrémités la circonférence de chaque patate. Idem quand une des patates est réduite à un seul sommet.]



cylindres cônes becs

Différents types de cônes:

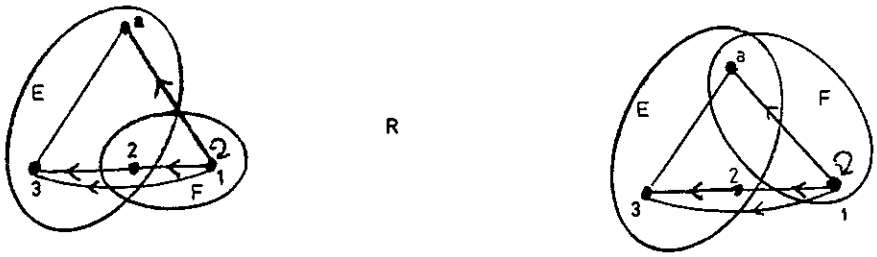


Remarquons que si (R,R',E,F) est un cône, F (ou respectivement E) ayant alors un R-extremum ne peut donc être qu'un diamant ou D_7 ou D_9 ou D_{26} ou D_{27} ou variante. Si (R,R',E,F) est un bec, F (ou E) est alors de type D_{18} ou D_{19} ou variante (les extrémités de la flèche étant toutes deux réflexives ou toutes deux irréflexives) et est formé des deux éléments de F-E (ou

resp. E-F) [qui sont les extrémités de la flèche] et d'un troisième de E-F (ou resp. F-E).

Pour alléger le discours on dira souvent de manière abusive que (R,R') (au lieu de (R,R',E,F)) est un cylindre, cône etc··· ce qui n'est pas sans danger puisque R', E et F ne sont pas toujours déterminés de manière unique comme le montre l'exemple suivant:

Soit E={a,2,3}, F={1,2} on a 1<2<3 mod R et 2<3<1 mod R', (a,2) est vide (a,3) plein, R|(1,a)=R'|(a,1)=(+,-), réflexivité en 1 et pas ailleurs. Alors on peut aussi bien choisir pour F l'ensemble {1,2} ou {a,1}:



On peut vérifier heureusement que quelque soit le choix de R', E et F, la nature (cylindre, cônes etc···) de (R,R',E,F) ne change pas, bien que cela soit sans importance dans la démonstration du théorème de demi-reconstruction et ne serve qu'à la classification, au §5.2, des types binaires non demi-reconstructibles. On vérifie aussi que chacune des espèces est exclusive des autres (et exclusive des allures (α) à (ε), mais pas des allures (η) ou (ζ) dont certains représentants peuvent aussi être des cônes). Par exemple un bec (R,R',E,F) ne peut être aussi un cylindre (R,R',E,F') même en prenant pour F' la paire des extrémités de la flèche de F car ces extrémités sont toutes deux réflexives ou toutes deux irréflexives.

On abusera parfois encore plus, quand cela ne présente pas de risque, en disant que R ou même $|R|$ est un cylindre (ou un cône etc$\cdots$) quand le choix de R', E et F est évident. La cohérence de ces abus de langage est expliquée au §5.2.

Pour rendre plus lisible le réseau des implications entre les différents lemmes, ceux-ci seront repérés par un numéro comprenant la lettre *a* pour les lemmes concernant les **A**llures et respectivement les lettres *b,c,d* pour ceux concernant les **B**ecs, les **C**ônes et les cylin**D**res.

PRÉ-LEMME 1·c . Soit R et R' deux relations binaires hémimorphes de base $E\cup\{f\}$ ($f\notin E$) où E est un grand motif sur lequel il y a isomorphie entre R et R' et où f est R-majorant *changeant* de E. Alors (R,R') est un double motif (et donc un cône).

PREUVE. Il faut, pour le montrer, voir que $|R|$ est réunion de deux grands motifs. En effet si le statut de réflexivité de f est différent de celui d'un élément e de E alors {e,f} est de R-type D_{26} ou D_{27} et s'inverse dans R'. Supposons donc que ce statut est le même pour toute la base. Si E contient une arête neutre (a,b) alors {f,a,b} est de R-type D_7 qui est bien un grand motif sur lequel il y a anti-isomorphie. E n'est pas une chaîne et s'il ne possède pas d'arête neutre, il doit contenir un 3-cycle (a,b,c). {f,a,b,c} est alors un diamant qui est bien un grand motif sur lequel il y a anti-isomorphie. Si E est une chaîne de R-type, disons ω, alors pour un $x\in E$ $R|(|R|-\{x\})$ est de R-type $\omega+1$ tandis que $R'|(|R|-\{x\})$ est de R'-type $1+\omega$; les deux types $\omega+1$ et $1+\omega$ n'étant ni iso- ni anti-isomorphes on contredit l'hémimorphie. □

Énoncé analogue si f est un R-majorant non changeant d'un grand motif F sur lequel il y a anti-isomorphie entre R et R'.

Les cylindres, cônes et becs sont des doubles motifs particuliers. On vise à démontrer une réciproque qui classifiera les doubles motifs:

LEMME 2 *de classification des doubles motifs* . Soit (R,R',E,F) un double motif. (R,R',E,F) est alors soit un cylindre soit un cône soit un bec soit d'une des allures $(\alpha),(\beta),(\gamma),(\delta),(\varepsilon),(\eta),(\zeta)$.

Grâce à ce lemme on pourra démontrer le lemme de non recollement en le vérifiant indépendamment pour les cylindres, les cônes, les becs et les différentes allures.

Découpons ce lemme 2 en trois autres (2·d, 2·bc et 2·abc) suivant que E et F sont disjoints ou bien non disjoints avec card R>5 ou bien non disjoints avec card R≤5:

LEMME 2·d . Soit (R,R',E,F) un double motif. Si *F est disjoint de E* alors (R,R',E,F) est un cylindre fini.

On peut apporter une précision par la scolie suivante:
SCOLIE . Si en plus E et F sont tous deux connexes de cardinaux >2 alors les arêtes liant E et F sont toutes pleines ou toutes vides.

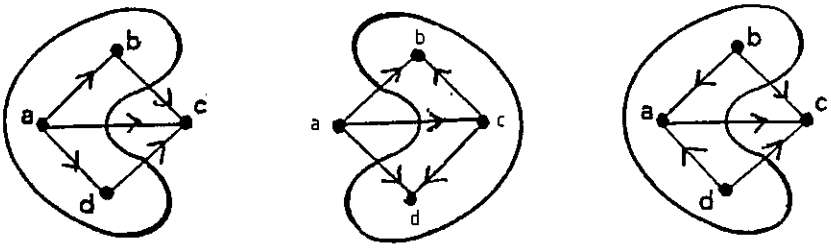
LEMME 2·bc . Soit (R,R',E,F) un double motif. Si E n'est pas disjoint de F et si card (R) >5 alors soit (R,R',E,F) est un cône soit (R,R',E,F) est un bec. Dans les deux cas R est de base finie.

LEMME 2·abc . Soit (R,R',E,F) un double motif. Si E n'est pas disjoint de F et si card (R) ≤5 alors (R,R',E,F) est soit un cône soit un bec soit d'une des allures (α),(β),(γ),(δ),(ε),(η),(ζ).

Ces lemmes seront démontrés au §4.2 après les préalables des §4.1.A et 4.1.B.

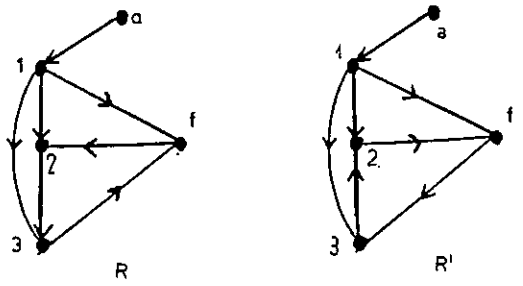
Illustration des interdictions de 2ème espèce ou cônes:

Soit D_{79} la relation connexe sur {a,b,c,d} définie par a<b<c; a<d<c, qui est bien la réunion de deux motifs de type D_7 et D_9 (le n° 79 rappelle l'accouplement de D_7 et D_9) sur respectivement F={b,c,d} et E={a,b,d}. Pour illustrer le lemme précédent on peut, pour R', prendre D_{77} obtenu en dualisant D_{79} sur {a,b,d}, ou D_{99} obtenu en dualisant D_{79} sur {b,c,d}. Remarquons que D_{79} est auto dual. D_{79} et D_{77} (aussi bien que D_{79} et D_{99}) sont demi-hypomorphes sans être ni isomorphes ni anti-isomorphes, c'est à dire non demi-reconstructibles. Ces relations sont des ordres et on sait (§5 de [9]) que dans les ordres le seuil de demi-reconstructibilité est 6 (i.e. les ordres infinis ou finis de cardinal ≥7 sont demi-reconstructibles [attention: dans le cas fini il revient au même de dire qu'ils sont demi-reconstructibles à partir des ordres de cardinal ≤6 mais dans le cas infini les ordres ω et ω^* interviennent aussi]).

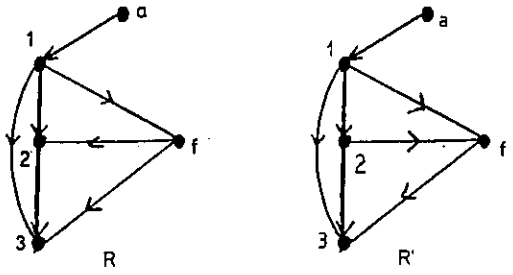


D_{79} D_{99} D_{77}

Dans l'énoncé du lemme 2·d il est nécessaire de supposer que E *et* F sont des grands motifs sans quoi des contrexemples sont faciles à trouver: soit R et R' de base $E\cup\{f\}$ vérifiant $R|E=D_{10}$ (avec les notations du §7.2) et $F=\{f,2,3\}$, $f\notin E$ avec $f<2, 1<f$ et $3<f$ mod R, et $f>2, 1<f$ et $3>f$ mod R' alors que $R'|E$ est identique à $R|E$ sauf que $3<2$ mod R' ($R|F$ est alors un cycle).



Second exemple où $R|E$ est *identique* à $R'|E$: $R|E$ est défini comme dans l'exemple précédent mais on a $1<f<2<3$ mod R et $1<2<f<3$ mod R'; on ne peut trouver alors de grand motif F contenant f et tel que $R'|F\approx R^*|F$.



Nous allons maintenant dans le §3.2 montrer le lemme de non recollement, de manière indépendante pour chacune des espèces (cylindres, cônes ou becs) qui ont été cernées aux lemmes 2·d à 2·abc précédents. Les lemmes 3·d, 3·c

et 3·b suivants ainsi que les sous-lemmes 5·abc et 5·d pourvoiront à ces démonstrations. La conclusion du lemme de non recollement étant déjà acquise pour chacune des allures $(\alpha),(\beta),(\gamma),(\delta),(\varepsilon),(\eta),(\zeta)$, le lemme de non recollement s'en suivra au §4.2.2 dès qu'aura été démontré le lemme 2 au §4.2.1.

§3.2 NON RECOLLEMENT DES CYLINDRES, CÔNES ET BECS.

On part ici de la classification donnée par lemmes 2·d, 2·bc et 2·abc et on va, dans chacun des cas de figures décrits par ces lemmes, démontrer la propriété de non recollement. Le non recollement des becs et des cônes intervenant d'ailleurs dans la preuve des lemmes 2·d à 2.abc en particulier aux sous-lemmes 3 et 4 !

Un certain nombre de démonstrations se feront de proche en proche en partant d'un élément de la base et en passant à un autre lié par une flèche au précédent. Ceci n'est possible que si sont vérifiées certaines conditions de connexité qui vont apparaître maintenant. Quand ces conditions ne seront pas remplies on renverra au §5 qui fait appel à d'autres procédures.

§3.2.1 Non recollement des cylindres (dont un grand motif est connexe):

LEMME 3·d . Soit (R,R',E,F) un double motif renforcé. Si (R,R',E,F) est un cylindre et si R|F est connexe alors R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes.

PREUVE. Raisonnons par l'absurde en admettant l'existence d'un iso- ou anti-isomorphisme φ de R dans R'. L'image de F par φ ne peut être à cheval sur E et F puisque F est connexe et pas $E \cup F$. Supposons d'abord que cette image est dans F; si elle couvre tout F une contradiction apparaît à l'examen de F ou de E suivant que φ est un iso- ou un anti-isomorphisme puisque dans le premier cas par exemple on a $R'|F \approx \varphi(R)|F \approx R|F \approx R'^{*}|F$ alors que F est un grand motif – une contradiction apparaîtrait en raisonnant de

même sur E si φ était un anti-isomorphisme; si au contraire un élément e de E a son image dans F, alors ce dernier qui est connexe aurait une image par φ^{-1} qui ne serait pas connexe. On a donc vu que l'image de F n'est pas dans F. Si maintenant l'image par φ de F est dans E, un élément e de E doit avoir son image par φ (qui est surjective) dans F; voyons que, si φ est par exemple un isomorphisme, E tout entier ne peut être envoyé par φ dans F qui serait alors égal à $\varphi(E)$: on aurait en effet $R'|F \approx R|E$, or on a déjà $R'|F \approx R^*|F$ et comme aussi $\varphi(F)=E$ on aurait $R'|E \approx R|F$ or on a déjà $R'|E \approx R|E$, finalement on obtiendrait $R|E \approx R|F \approx R^*|E$ ce qui est absurde car E est un grand motif – raisonnement analogue pour un anti-isomorphisme en remplaçant R par R^*. Cette absurdité permet de dire qu'un j de E a son image dans E et un e de E a son image dans F, comme précédemment, e et j ne peuvent donc être liés par un chemin de flèches, R|E ne peut donc qu'être de type D_{18} ou D_{19} ou variante; en dehors de e et j il reste alors exactement un élément k dans E dont l'image est dans F puisque (k,e) est orienté. L'image de F est dans {e,k} mais comme un grand motif a au moins deux éléments elle est égale à {e,k} et R|F est de type D_{26} ou D_{27}. Si φ est un isomorphisme on a $R'|F \approx R|\{e,k\} \approx R'|\{e,k\} \approx R|F$ et de même si φ est un anti-isomorphisme ce qui donne la contradiction ultime prouvant l'inexistence d'un iso- comme d'un anti-isomorphisme entre R et R'. □

On peut bien sûr dans cet énoncé remplacer l'hypothèse de connexité de R|F par la même hypothèse sur R|E. On verra au §5.1 que cette hypothèse de connexité est en fait inutile. En effet ce §5.1 étudie entre autres le cas où E et F sont disjoints et non connexes et montre que l'énoncé y est encore vérifié. On aura alors démontré que dans un cylindre (R,R',E,F) R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes.

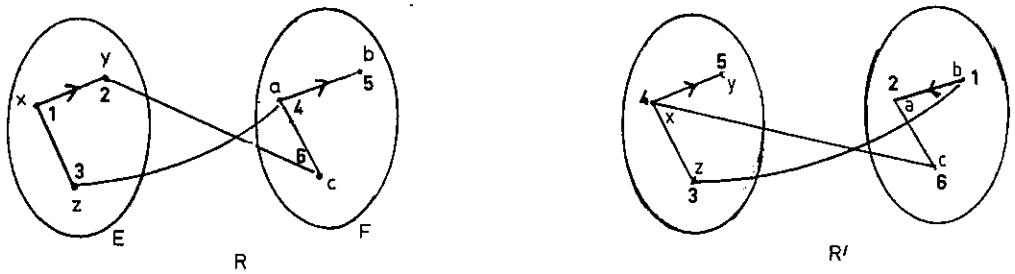
Remarque . L'énoncé précédent subsiste si E et F ne sont plus des grands motifs mais seulement non autoduaux. Mais il s'agit là d'une proposition qui est conséquence du théorème de reconstruction et du non recollement des cylindres qu'on admettra donc provisoirement même dans le cas non encore démontré par le lemme 3·d à savoir quand E n'est pas connexe. On utilisera même un mini-lemme à vérifier à la main sur les deux cas de motifs imbriqués déjà vus:

Mini-lemme . Si deux motifs sont hémimorphes et isomorphes alors ils sont isomorphes sur tout éventuel grand motif qui y est proprement inclus.

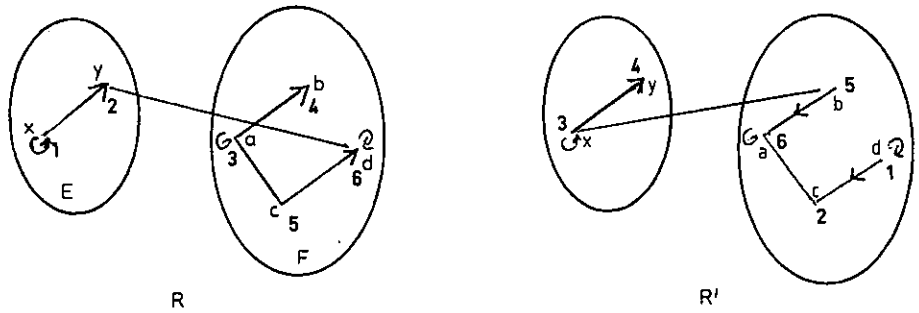
PROPOSITION 3 . Supposons que E et F sont des ensembles disjoints, que deux relations binaires hémimorphes R et R' sont de même base $E \cup F$, que $R|E \approx R'|E$ et $R^*|F \approx R'|F$, que les liens entre E et F sont neutres et que $R|E$ et $R|F$ ne sont pas auto-duaux; alors R et R' sont nécessairement ni isomorphes ni anti-isomorphes.

PREUVE . F n'étant pas autodual il n'y a pas isomorphie sur F entre R et R'. D'après le théorème de reconstruction il existe dans F un motif B où il n'y a pas isomorphie. Il y a donc sur B anti-isomorphie. D'après le dual du mini-lemme il y a aussi anti-isomorphie sur un grand motif K inclus dans B. De même il y a isomorphie sur un grand motif H inclus dans E. La restriction de (R,R') à $H \cup K$ est un cylindre et le non recollement des cylindres exige que $R|H \cup K$ et $R'|H \cup K$ ne soient ni iso- ni anti-isomorphes. Par suite $H \cup K = E \cup F$. (R,R') est donc un cylindre et la conclusion en découle. □

Par contre sans l'hémimorphie l'énoncé de la proposition 3 devient faux même si E et F sont des grands motifs. Prenons $E=\{x,y,z\}$ de type D_{18} (mod R et R') avec $R|(x,y)=(+,-)$, (x,y) plein et (y,z) vide, et $F=\{a,b,c\}$ de même R-type et de R'-type opposé avec $R|(a,b)=(+,-)$, (a,c) plein et (b,c) vide; on a (y,c) et (z,b) qui sont R-pleins et R'-vides, et (z,b) et (x,c) qui sont R'-pleins et R-vides; autres arêtes vides mod R et R'. Alors existe un isomorphisme φ de R sur R' qui envoie (x,y,z,a,b,c) sur (b,a,z,x,y,c).



Voici un contrexemple sans hémimorphie si E est un grand motif connexe. E={x,y} avec réflexivité en x seul et R|(x,y)=(+,-); F={a,b,c,d} avec réflexivité en a et d (mod R et R') avec R|(a,b)=R|(c,d)=(+,-) et (a,c) R- et R'-plein; R'|F est le dual de R|F; on a encore (y,d) R-plein et R'-vide, (x,b) R'-plein et R-vide; autres arêtes vides. Alors existe un isomorphisme φ de R sur R' qui envoie (x,y,a,b,c,d) sur (d,c,x,y,b,a).



Par contre l'énoncé de la proposition 3 est valable sans l'hypothèse d'hémimorphie si E et F sont des grands motifs connexes:

Proposition 3·1 . Supposons que E et F sont des ensembles disjoints, que deux relations binaires R et R' sont de même base E∪F, que $R|E \approx R'|E$ et $R^*|F \approx R'|F$, que les liens entre E et F sont neutres mod R et R', que R|E et R|F sont des grands motifs connexes; alors R et R' sont nécessairement ni isomorphes ni anti-isomorphes.

PREUVE. R|F n'étant pas autodual un isomorphisme éventuel φ de R sur R' ne conserve pas globalement F. F étant connexe son image par φ est entièrement dans E. Mais deux grands motifs ne pouvant être imbriqués, $\varphi(F)$ couvre tout E. Par suite $\varphi(E)=F$. On a alors $R|E \approx R'|E = R'|\varphi(F) \approx R|F \approx R'^*|F = R'^*|\varphi(E) \approx R^*|E$. Les extrêmes de cette suite d'isomorphies donnent une contradiction. □

E. Clarou a démontré un énoncé analogue à la proposition 3 en y remplaçant l'hémimorphie par l'hypothèse que les liens entre E et F sont neutres et de même nature mod R et mod R'.

§3.2.2 Non recollement des cônes:

LEMME 3·c . Soit (R,R',E,F) un double motif renforcé. Si ce double motif est un cône alors R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes.

Remarquons que de l'hypothèse du lemme 3·c découle que F-E est un singleton qui ne peut qu'être extremum changeant de R grâce aux deux petits lemmes suivants qui seront exploités dans la preuve du lemme 3·c.

On appellera *petit lemme 1* la conjonction des deux versions suivantes:

Petit Lemme 1 *finitiste*. Soient R et R' deux relations binaires hémimorphes, isomorphes sur un grand motif fini E de la base. Un éventuel R|E-minimum est alors aussi un R'|E-minimum. Énoncé analogue sur F.

Preuve par vérification sur la liste des grands motifs. □

Cet énoncé devient faux si E n'est plus un grand motif: soit E={a,b,c} et a<b<c mod R et c<a<b mod R', le R-minimum a n'est pas R'-minimum.

Petit lemme 1 *infinitiste*. Soient R et R' deux relations binaires hémimorphes, identiques sur un grand motif infini E de la base. Un éventuel R|E-minimum est alors aussi un R'|E-minimum. Énoncé analogue sur F.

Énoncé aussi faux avec un grand motif infini sur lequel il y a seulement *isomorphie* : $0<1<2<3<\cdots$ mod R et $1<0<2<3<\cdots$ mod R', 0 est un R-minimum mais pas un R'-minimum.

Remarquons que si R et R' sont deux relations binaires hémimorphes, anti-isomorphes sur un grand motif fini F de la base, les flèches ne se renversent pas toutes par passage de R à R'. Prendre pour R un diamant et pour obtenir R' inverser les flèches incidentes au sommet mais sans toucher au cycle: seules les flèches issues du sommet sont inversées. On peut voir comme conséquence du lemme suivant, que les flèches incidentes à l'extremum sont toujours inversées dans le grand motif fini sur lequel il y a anti-isomorphie.

Petit Lemme 2 . Un grand motif R (fini ou pas), autre que D_{26} ou D_{27}, a au plus un extremum.

Evident sur la liste des motifs. □

PREUVE du LEMME 3·c.

Cette démonstration va en fait plus fortement montrer que si F-E est réduit à un seul élément extremum de R alors R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes, c'est à dire qu'on n'exige pas que le R-extremum soit aussi R'-extremum. La proposition 5 montrera que ce cas n'est pas plus général, mais cette amélioration apparente sera tout de même exploitée pour montrer que les cônes sont des interdits de non demi-reconstruction (§3.1.1).

La PREUVE se fait en plusieurs phases:

1ère phase. Si E n'a que deux éléments E-F est un singleton ainsi que $E\cap F$ et F-E. F a alors 2 éléments et R en a 3. Suivant la nature réflexive ou pas de l'élément de F-E et son caractère maximum ou minimum quatre cas sont

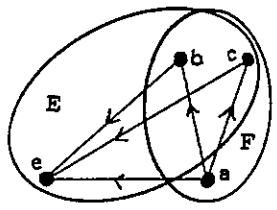
à envisager et tous aboutissent au fait que F est soit auto-dual soit même pas un motif – absurde.

2ème phase. Si F possède deux éléments prouvons qu'il en va de même de E. Nions la conclusion en admettant l'existence d'un isomorphisme φ de R sur R'. L'unique élément f de F-E est par exemple R-maximum de $|R|$, son image par φ ne peut donc être f et elle est par conséquent R'-maximum de E et donc d'après le petit lemme 1 un R-maximum puisque $R|E \approx R'|E$ quand E est fini et $R|E=R'|E$ quand E est infini. De même $\varphi^{-1}(f)$ est R-minimum de E. Le petit lemme 2 donne la conclusion. Si maintenant φ est un anti-isomorphisme il ne peut conserver E donc ne conserve pas f. $\varphi(f)$ est donc un R'-minimum de E et de même $\varphi^{-1}(f)$ un R-maximum de E. Même conclusion que précédemment.

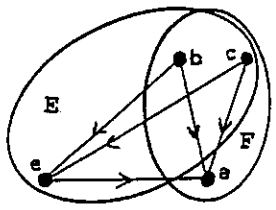
3ème phase. Si E et F ont tous deux au moins 3 éléments. Soit f l'unique élément de F-E maximum par exemple de R. Remarquons que par anti-isomorphie entre $R|F$ et $R'|F$, f est le R'-minimum de F (petit lemme 1). Supposons, par l'absurde, l'existence d'un isomorphisme φ de R sur R'. L'image par φ de f ne peut être f car alors f serait R'-maximum de F. L'image de f par φ est donc dans E et est un $R'|E$-maximum. De même $\varphi^{-1}(f)$ est R-minimum et donc R'-minimum et se trouve dans E. Donc E possède à la fois un maximum et un minimum contrairement à ce qu'affirme le petit lemme 2. Supposons maintenant l'existence d'un anti-isomorphisme φ de R sur R'. Montrons d'abord que l'image de E ne peut être dans E. Si E est fini cette image lui est égale contrairement au fait que E n'est pas auto-dual. Si E est infini de type ω il ne contient pas d'image de ω^*. De même pour Ω. f est donc dans l'image de E par φ et par suite $\varphi(f)$ est dans E et en plus est minimum de R'. Si on a fait l'hypothèse que f est un R'-extremum on peut conclure dès ici en disant que f est le R'-minimum et non $\varphi(f)$. Sans cette hypothèse on peut tout de même affirmer que $\varphi(f)$ est un $R'|E$-minimum, par suite c'est un $R|E$-minimum puisque $x<f \bmod R$ pour tout x dans E. L'élément $\varphi(\varphi(f))$ est

donc un R'-maximum. D'après le petit lemme 2 $\varphi(\varphi(f))$ ne peut être que f. Alors f est un R'-maximum donc un R'|F-maximum ce qui est contraire à l'anti-isomorphie sur F (petit lemme 2). □

Remarquons que dans un double motif (R,R',E,F) le R-extremum éventuel de E n'en est pas nécessairement un R'-extremum: soit e un élément R-majorant F={a,b,c}, avec E={e,b,c}, R|(a,c)=R|(a,b)=(+,-) et (b,c) vide. Et en passant à R' seuls s'inversent (e,a), (a,b) et (a,c): l'élément e n'est alors pas un R'-extremum (voir précisions à la proposition 5):



R



R'

Dans le lemme 3·c le mot "renforcé" se révélera inutile quand on aura démontré qu'il n'y a pas de double motif infini.

Comme à propos du lemme 3·d on peut se poser la question suivante: est-il suffisant que R|E soit non autodual sans exiger que R soit un double motif? Réponse positive cette fois, quand R est fini, obtenue avec l'aide de Mekkia Kouider. On démontre plus précisément:

Proposition 3*bis*. Soit R et R' deux relations binaires de même base finie E∪{a} (a non dans E), supposons que a soit R-minimum et R'-maximum et que R et R' soient isomorphes sur E. Alors si R et R' sont isomorphes ce sont des chaînes finies.

Preuve. On peut supposer R et R′ identiques sur E. Soit f un isomorphisme supposé exister de R sur R′. f(a) ne peut être a lui-même. f(a) est donc dans E dont et est R′-minorant (et donc R-minorant de E). f(f(a)) ne peut être f(a). f(a) R-minorant E, f(f(a)) ne peut être *a* que si E est un singleton (et donc une chaîne), il est donc dans E-{f(a)} dont il est R′-minorant. Continuons cette construction de proche en proche avec f(f(f(a))) ···

Si ce processus aboutit en un nombre fini d'étapes à un $f^n(a)=a$ en épuisant |R| alors R est une chaîne dont a est R-minimum et R′-maximum (chaque élément de |R| a même statut de réflexivité).

Si ce processus aboutit en un nombre fini d'étapes à un $f^n(a)=a$ mais sans que la base soit épuisée, on posera F={f(a),f(f(a)),f(f(f(a))),···}. F est globalement invariant par f. F R-minore E-F, en particulier $f^{-1}(a)$ R-minore E-F et son image par f (à savoir a) R′-minore E-F contrairement à l'hypothèse. □

Si |R| est infini l'énoncé de cette dernière proposition 3bis est inexact. Prenons en effet R et R′ de base E∪{a}, R|E et R′|E étant identiques et de type $\omega+\omega^*$, et soit *a* un élément R-minorant et R′-majorant E; R et R′ sont alors isomorphes. Dans cet exemple E est autodual et R ne fournit donc pas encore une réponse négative à la question précédemment posée quand la base est infinie; il suffit pour obtenir le contrexemple S et S′ désiré de rajouter alors à R|E et R′|E un type D_7 , inséré (mod R *et* R′) entre le ω et le ω^*. S et S′ de base $|R|\cup|D_7|$ sont alors isomorphes bien que S|E ne soit pas auto-dual.

§3.2.3 Non recollement des becs.

La vérification du lemme de non recollement sur les becs va être coupée en deux suivant que les deux motifs sont non connexes ou qu'un seul des deux motifs est non connexe (on a vu dans la définition des becs qu'un des grands motifs y était non connexe).

Le premier cas est conséquence triviale du sous-lemme 5·abc du §5.
Le lemme suivant résoud le second cas et prouve le non recollement des becs quand un seul des deux motifs est connexe.

LEMME 3·b . Soit (R,R',E,F) un double motif qui est un bec. Supposons que F est connexe. Alors R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes.
PREUVE. Supposons $E=\{m,n,k\}$ non connexe et F connexe, avec $E\cap F=\{k\}$, (m,f) étant vide et (n,f) plein pour tout f de F. Montrons que $R|F\cup\{m,n\}$ ne peut être ni iso- ni anti-isomorphe à $R'|F\cup\{m,n\}$. Un iso- ou un anti-isomorphisme conserve globalement F puisque celui-ci est connexe, seul un anti-isomorphisme peut échanger $R|F$ et $R'|F$ mais les arêtes pleines ne pouvant être envoyées par un anti-isomorphisme sur des vides, m et n devraient rester fixes ce qui entraînerait $R'|(m,n)=R^*|(m,n)$ — absurde car (m,n) ne change pas. □

§4 . DÉMONSTRATION du LEMME 2 de CLASSIFICATION des DOUBLES MOTIFS.

Rappelons que ce lemme 2 classifie les doubles motifs en cylindres, cônes, bec, et allures (α) à (ζ).

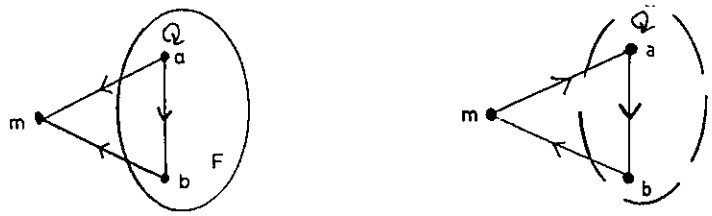
§4.1.A

Ce paragraphe contient de nombreux sous-lemmes techniques dont les preuves sont différées au §4.1.B, c'est pourquoi j'en donne préalablement l'idée générale. Le sous-lemme 2 affirme qu'un double motif (R,R',E,F) est en général formé de plusieurs (R,R')-classes de différence. Il existe donc des éléments m extérieurs à la classe engendrée par F. Le sous-lemme 1 dit qu'une (R,R')-classe de différence (en particulier celle engendrée par F) est presque un m-intervalle pour tout m qui lui est extérieur. C'est à dire que les arêtes liant m à cette classe sont soit toutes orientées dans le même sens ce qui permet de construire un cône au sein de R, soit toutes neutres ce qui permet de construire suivant le cas cylindres ou becs. C'est ce que précisent les sous-lemmes 3 et 4.

DÉFINITIONS. Soit R une relation binaire contenant une partie I et un élément $m \notin I$. I est appelé un m-**presque-intervalle** de R si pour tous i,j de I, R|(m,i) est égal à R|(m,j) quand R|(m,j) est orienté et R|(m,i) est neutre quand R|(m,j) l'est; on parlera respectivement de m-presque-intervalle *orienté* ou de m-presque-intervalle *neutre*. On parlera de m-**intervalle** (plus précisément de *R-m-intervalle*) si R|(m,i) est constant quand i parcourt I, on notera R|(m,I) cette valeur constante. I est dit un **intervalle** de R (encore dit *R-intervalle*) s'il est un m-intervalle (mod R) pour tout m de |R|-I. Cette définition est légèrement différente de celle

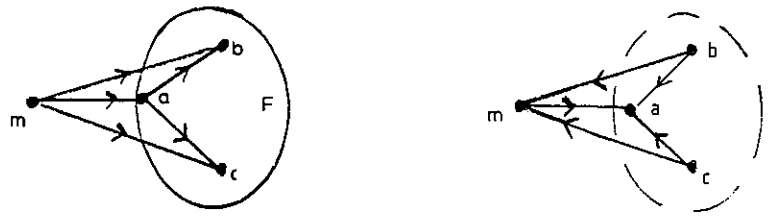
de Fraïssé en [6] qui est plus lâche mais revient au même pour les relations binaires partout réflexives ou partout irréflexives (voir §4 de [9] lemme 1). *On convient, pour ne pas alourdir l'écriture que les m-intervalles dont on parlera le seront modulo R* <u>*et*</u> *R', sauf spécification contraire.*

Le terme "<u>*et*</u>" est nécessaire puisque la notion de m-intervalle n'est pas conservée par hémimorphie. Par exemple sur une base {m,a,b}, avec a<b<m mod R et b<m<a mod R' et avec réflexivité en a et pas en b ni en m: F={a,b} qui est un R-m-intervalle n'est pas un R'-m-intervalle bien que R et R' soient hémimorphes.



R R'

Exemple analogue de base {m,a,b,c} avec R|(a,b)=R|(a,c)=(+,-) et (b,c) neutre, m est R-minorant de a, b et c, et mod R' tout s'inverse sauf (m,a): F={a,b,c} qui est un m-intervalle mod R n'en est pas un mod R' bien que R et R' soient hémimorphes.



R R'

On peut d'ailleurs rajouter à la base un élément f qui sera R-maximum et R'-minimum et avoir ainsi de nouvelles relations de base {f,m,a,b,c} qui seront hémimorphes, dont {m,a,b,c} sera partie propre sur laquelle il y aura anti-isomorphie, et F bien qu'étant un m-intervalle mod R n'en sera toujours pas un mod R'.

Pour démontrer ces lemmes 2·d, 2·bc et 2·abc du § 3 quelques sous-lemmes seront nécessaires:

Nous allons réutiliser la notion d'arête versatile qui avait (voir rappels ou §8.2) déjà été définie dans une classe d'hypomorphie (non autoduale dans la définition du §1); pour éviter d'inutiles précautions de langage on parlera d'arête versatile d'un grand motif même s'il n'est pas une classe d'hypomorphie, on conviendra seulement dans ce cas qu'aucune arête du motif n'est versatile. Sont concernés les motifs D_{18} ou Ω mais pas ω qui est une classe d'hypomorphie (voir §7.8) dont toute arête est versatile.

Rappelons la définition de la versatilité:

Dans une classe d'hypomorphie R non autoduale de base E on dira d'une arête qu'elle est **versatile** si elle est orientée et s'il existe R' hypomorphe et isomorphe à R où cette arête s'inverse.

Par exemple dans un diamant les arêtes du cycle sont versatiles et pas celles incidentes à l'extremum.

L'importance de la notion de versatilité tient au fait que si R et R' sont anti-isomorphes sur un grand motif F, toutes les arêtes de F ne sont pas nécessairement inversées, seules celles qui sont non versatiles s'inversent obligatoirement; Penser au diamant D_5 qui par anti-isomorphie se transforme en D_6 mais en pouvant éventuellement conserver son cycle.

SOUS-LEMME 00 . Deux grands motifs hémimorphes et isomorphes ne diffèrent qu'éventuellement sur les arêtes versatiles. Deux grands motifs hémimorphes et anti-isomorphes ne diffèrent chacun du dual de l'autre qu'éventuellement sur les arêtes versatiles.

PREUVE . Chaque restriction propre d'un grand motif de cardinal fini ≥5 étant auto-duale d'après le petit lemme 0, les grands motifs de l'énoncé sont hypomorphes et isomorphes et on vérifie alors la conclusion. Vérification directe pour les autres cardinaux (en particulier infinis). □

Le sous-lemme 0 suivant rassemble une version finitiste et une version infinitiste.

SOUS-LEMME 0 version finitiste . Dans un grand motif connexe fini il existe un chemin composé de flèches toutes non versatiles passant par tous les éléments.

Vérification évidente sur la liste des motifs. □

Le chemin dont l'énoncé affirme l'existence peut repasser plusieurs fois par le même sommet ou la même arête. En fait seul sert le fait que deux éléments quelconques sont liés par un chemin (qui dépendra des éléments) mais qui lui pourra être choisi de manière à ne pas repasser deux fois par le même sommet.

La version suivante est évidente.

SOUS-LEMME 0 version infinitiste . Dans un double motif renforcé (R,R',E,F), la restriction R|E, si elle est une chaîne infinie (donc de

type ω ou ω^*) peut être parcourue par un chemin de flèches non changeantes, et F s'il est une chaîne infinie peut être parcouru par un chemin de flèches qui changent.

Le précédent énoncé suffira souvent pour traiter les grands motifs qui sont des chaînes infinies comme les autres grands motifs.

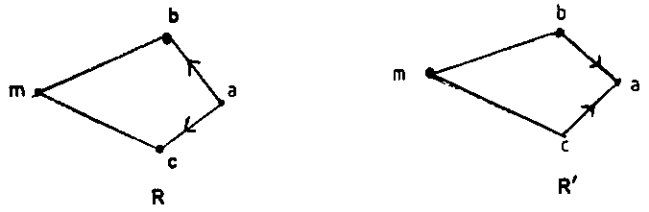
Le sous-lemme suivant énonce une situation analogue à celle connue dans la théorie de la reconstruction (voir le deuxième lemme des rappels du §1), mais tout de même différente par l'intervention du vocable "*presque*".

SOUS-LEMME 1 . Soit R et R' deux relations binaires hémimorphes de cardinal infini ou fini ≥4 et D une (R,R')-classe de différence. Pour tout m extérieur à D, D est un m-*presque*-intervalle neutre ou un m-intervalle orienté (mod R et mod R').

PREUVE. Soit (i,j) une flèche de D choisie changeante, et qui vérifie par exemple R|(m,i)=(+,-), m n'étant pas dans D. La flèche (m,i) ne doit pas changer sinon m serait dans D et l'hémimorphie sur {m,i,j} exige alors que R|(m,j)=(+,-)=R|(m,i). L'élément m n'étant pas dans D, (m,j) ne doit pas non plus changer et {i,j} est donc aussi un m-intervalle (mod R'). Si maintenant (m,i) est neutre alors (m,j) doit l'être aussi car sinon cette même démonstration prouverait (en permutant les rôles de i et j) que (m,i) est orienté. □

Donnons un exemple où la classe dont parle cet énoncé n'est pas un intervalle: R est de base {m,a,b,c}, on a R|(a,b)=R|(a,c)=(+,-), (m,c) et

(m,b) sont pleins et (m,a) vide ainsi que (b,c); R′ est le dual de R. {a,b,c} est alors une (R,R′)-classe qui n'est pas un m-intervalle.



Si R n'a que 3 éléments la classe n'est même plus nécessairement un intervalle: soit R la relation définie sur {a,b,c} par R|(a,b)= R|(a,c)=(+,-) et (b,c) vide; mod R′ seul (a,b) s'inverse. La classe {a,b} n'est pas un c-intervalle.

Les sous lemmes 00 et 0, malgré leurs numéros ridicules, sont tout à fait importants: il découle d'eux le résultat suivant:

SOUS-LEMME 2bis . Soit (R,R′,E,F) est un double motif renforcé. Alors F, s'il est connexe, n'est formé que d'*une seule* (R,R′)-classe de différence.

Ce sous-lemme fort utile sera confronté au sous-lemme 2 suivant qui dira que E∪F est, lui, formé en général de *plusieurs* (R,R′)-classes. En effet l'anti-isomorphie sur F a pour conséquence (sous-lemmes 00 et 0) que tous les éléments de F sont dans une même (R,R′)-classe de différence; l'"incompatibilité" entre un anti-isomorphisme sur F et un isomorphisme sur

E peut s'exprimer intuitivement en disant que l'isomorphie sur E empêche l'anti-isomorphie sur F de se propager à toute la base; cette isomorphie interdit donc à la (R,R')-classe de différence engendrée par F de couvrir toute la base, celle-ci est du coup nécessairement formée de *plusieurs* classes de différence. Ce sous-lemme capital affirme donc que dans un double motif (R,R') cohabitent *en général* plusieurs (R,R')-classes de différence, les seules exceptions étant, comme on le verra grâce à la proposition 4, celle où (R,R') est un cône et celles où (R,R') est d'allure (α), (η) ou (ζ). L'existence d'une seule classe signifie intuitivement que l'anti-isomorphisme défini sur F se propage suffisamment pour mettre toute la base dans la même classe; l'existence de plusieurs classes consacre au contraire la défaite de l'anti-isomorphisme face à l'isomorphisme.

SOUS-LEMME 2 dit <u>de *multiplicité des classes*</u>. Si les relations binaires R et R' de même base sont hémimorphes et si sur un grand motif E *proprement inclus* dans |R| on a R|E≈R'|E, alors *l'origine et le but d'une flèche non versatile de R|E ne peuvent pas être tous deux dans la même (R,R')-classe de différence* sauf dans les deux circonstances suivantes:

1ère exception) card(E)≥3 et |R|-E est un singleton dont l'unique élément est majorant ou minorant changeant de la composante connexe de E;

2ème exception) card(E)=2 et |R|-E est un singleton auquel cas une des relations est une 3-chaîne et l'autre un 3-cycle (aux sens élargis); et dans chacune des deux exceptions R et R' ne sont ni isomorphes ni anti-isomorphes.

PREUVE du sous-lemme 2 renvoyée au §6.B.

Remarquons que si E est toute la base de R l'énoncé est banalement vrai. En effet R|E et R'|E étant isomorphes sont tous deux des grands motifs, un (R,R')-chemin ne peut donc d'après le sous-lemme 00 qu'être constitué d'arêtes versatiles; dans un motif, de tels chemins de longueur >2 reliant deux sommets distincts liés par une arête non versatile n'existent pas comme le montre un examen de la liste des motifs et donc deux tels sommets sont dans des (R,R')-classes différentes.

On verra au §6.A que l'énoncé du sous-lemme 2 reste vrai pour les extrémités d'une arête non orientée.

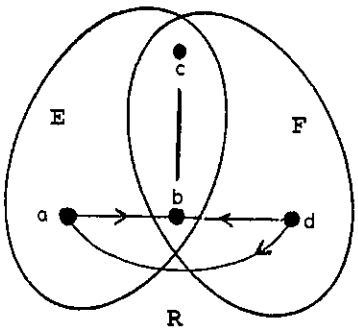
Le sous-lemme 2 serait plus facile à comprendre sous la forme suivante qui ne parle pas d'arête versatile mais qui est malheureusement plus difficile à démontrer et pas toujours suffisante pour nos besoins:

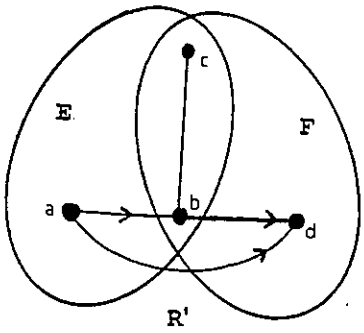
PROPOSITION 4 . Dans un double motif renforcé (R,R',E,F) une arête non changeante (orientée ou pas) incluse dans E ne peut avoir ses extrémités dans la même (R,R')-classe de différence que si (R,R',E,F) est un cône ou d'allure (α) (γ) (η) ou (ζ).

Cette proposition sera démontrée au §6.A.

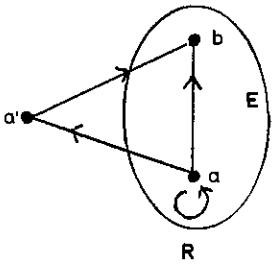
Voici un exemple illustrant la première exception à la conclusion du sous-lemme 2: E={a,b,c} et |R|={a,c,d,b}, (b,c) est plein, (c,a) et (c,d) vides, R|(a,b)=(+,-)=R|(d,a)=R|(d,b), R' change (a,d) et (b,d) [allure (γ)], a et b sont alors dans la même classe de différence car d est extremum de la composante connexe {a,b} de E. On peut aussi orienter (d,c) par R|(c,d)=(+,-) à condition de faire changer cette orientation: (R,R')

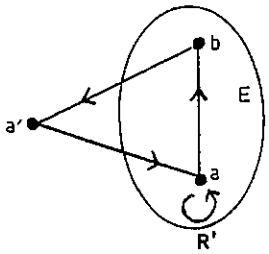
est un cône d'extremum d.





En voici un autre illustrant la deuxième exception: $E=\{a,b\}$, $|R|=E\cup\{a'\}$, $R|(a,b)=(+,-)$, $R(a,a)=(+)$, $a<a'<b$ mod R et, mod R' on a le cycle (a',a,b) [allure (α)]. Les éléments a et b sont bien dans la même (R,R')-classe.





Pour démontrer le lemme 2 de classification on envisagera successivement plusieurs hypothèses relatives à la connexité des grands motifs ou à leurs cardinalités, hypothèses qui devront recouvrir tous les cas possibles. Ces hypothèses seront celles des sous-lemmes 3, 4 et 5. La réunification des conclusions donnera le lemme 2. Ce découpage n'a que peu de justification mathématique, il évite seulement des énoncés et des preuves trop longs et par là incompréhensibles.

Les preuves des sous-lemmes 3 et 4 suivants sont reléguées au sous-paragraphe 4.1.B.

SOUS-LEMME 3. Si (R,R',E,F) est un double motif renforcé, si E est non connexe et si F est connexe de cardinal >2, alors ce double motif est un cylindre, un cône ou un bec.

Plus précisément on a les possibilités suivantes:

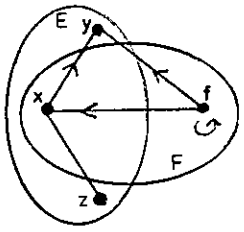
• Soit (R,R',E,F) est un cône, E-F est alors un singleton, F est un m-intervalle orienté [mod R et R'] pour l'unique m de E-F [*ou* de même en permutant E et F],

• Soit F est un m-intervalle neutre pour tout m de E-F [*ou* de même en permutant E et F] et,

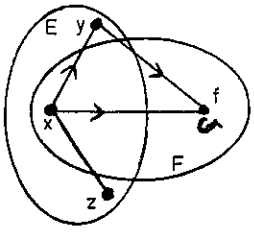
· ou bien (R,R',E,F) est un cylindre

· ou bien (R,R',E,F) est un bec.

Exemple où les conclusions sont inexactes car card R=2: E={x,y,z} avec R|(x,y)=(+,-), (x,z) plein et (z,y) vide mais F={x,f} avec R(f,f)=(+) R(x,x)=(-), R|(f,x)=(+,-)=R|(f,y) et R'|(f,x)=(-,+)=R'|(f,y) alors que les autres arêtes sont vides. On se trouve alors dans l'allure (γ) qui n'est d'aucune des 3 espèces.



R



R'

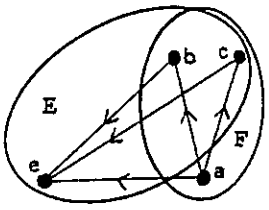
Le sous lemme 4 reprend les mêmes hypothèses que le sous-lemme 3 précédent sauf que E sera supposé connexe. Les conclusions sont encore valables mais en plus, dans le cas où E et F sont disjoints et E de cardinal ≥3 les arêtes liant E et F sont nécessairement toutes vides ou toutes pleines.

SOUS-LEMME 4 . Soit (R,R',E,F) un double motif renforcé, où les éléments de E ne sont pas tous dans la même (R,R')-classe. Si E est connexe et si F est connexe de cardinal >2, alors ce double motif est un cylindre ou un cône.

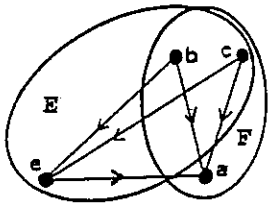
Plus précisément on a les possibilités suivantes:

- Soit (R,R',E,F) est un cône, E-F est alors un singleton, F est un m-intervalle orienté [mod R et R'] pour l'unique m de E-F [*ou* de même en permutant E et F],
- Soit (R,R',E,F) est un cylindre, F est un m-intervalle neutre pour tout m de E (ou de même en permutant E et F) et, si en plus E est de cardinal ≥3 alors les arêtes liant E et F sont toutes vides ou toutes pleines.

Donnons un exemple où F-E *et* E-F sont des singletons mais où l'énoncé du sous-lemme 4 n'est vrai que pour F-E mais pas pour E-F: E={e,b,c}, F={a,b,c}, R|(a,b)=R|(a,c)=(+,-) et e R-maximum de |R|, R' est l'opposé de R sauf sur (e,b) et (e,c) qui sont conservés. Alors a est bien un extremum changeant mais pas e.

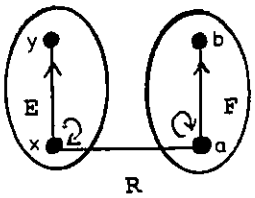


R



R'

Exemple où E et F sont tous deux de cardinal 2 et où on peut lier un élément de E à un de F par une arête pleine, les autres liens étant vides: les hypothèses de la précision sont satisfaites mais pas la conclusion: R|(x,y)=(+,-)=R'|(x,y)=R|(a,b), R'|(a,b)=(-,+), (x,a) plein, autres arêtes vides, réflexivité sur x,a et pas sur y,b.



§4.1.B DÉMONSTRATION des SOUS-LEMMES 3 et 4.

Introduisons d'abord un petit lemme que G. Lopez a su isoler du contexte où il était noyé dans une précédente version de ce travail.

Sans vouloir être inutilement trop formel précisons les points suivants. Dans une relation binaire R une suite (a,b,c,d,a) est dite un **circuit** si les éléments a,b,c,d sont différents; *mais* on considérera comme *identiques* les circuits qui ne diffèrent que par une permutation circulaire de l'ordre des éléments à savoir (a,b,c,d,a), (b,c,d,a,b), (c,d,a,b,c) etc... Un tel circuit sera dit de type (→,N,→,N) si R|(a,b)=R|(c,d)=(+,-) et si (b,c) et (d,a) sont neutres mod R.

Petit lemme 3 *dit de succession*. Soit R et R' deux relations binaires hémimorphes de cardinal infini ou fini ≥5. Soit dans la base deux parties disjointes H et K, chacune possédant juste deux éléments liés par une arête orientée, chaque élément de H étant lié par une arête neutre à chaque élément de K. Supposons que la flèche de H se conserve et que celle de K s'inverse par passage de R à R'. Alors, ou bien H est un k-intervalle pour tout k de K, ou bien K est un h-intervalle pour tout h de H ("ou" non exclusif).

PREUVE. Posons H={a,b} avec R|(a,b)=(+,-) et K={c,d} avec R|(d,c)= =(+,-)=R'|(c,d). Il existe dans R exactement deux circuits (a,b,d,c,a) ou (d,c,a,b,d) qui sont de type (→,N,→,N). Ce type est conservé par iso- ou anti-isomorphie. Dans R' on a donc aussi deux circuits de ce même type, ils ne peuvent être que (a,b,c,d,a) et (c,d,a,b,c). Soit φ un iso- ou anti-

isomorphisme de R sur R'. Si l'image par φ du circuit (d,c,a,b,d) est (a,b,d,c,a) alors (b,c) et (a,c) sont de même nature ainsi que (b,d) et (a,d); {a,b} est donc un c- et un d-intervalle. Si au contraire l'image par φ de (d,c,a,b,d) est (d,c,a,b,d) alors c'est {c,d} qui est un a- et un b-intervalle. □

<u>Démonstration du SOUS-LEMME 3</u> dont nous rappelons l'énoncé:

Si (R,R',E,F) est un double motif renforcé, si E est non connexe et si F est connexe de cardinal >2, alors ce double motif est un cylindre, un cône ou un bec.

PREUVE .

Posons E={x,y,z} avec R|(x,y)=(+,-), (x,z) plein et (y,z) vide. L'arête (x,y) est non versatile.

Cas I] E et F sont disjoints.

Remarquons d'abord que les exceptions au sous-lemme 2 ne peuvent se produire puisque F-E est égal à F et n'est donc pas un singleton.

1) Si les liens entre E et F sont tous neutres alors (R,R') est un cylindre.

2) Si pour un e de E et un F de F l'arête (e,f) est orientée et si cette orientation reste inchangée alors F est un e-intervalle et donc {e}∪F est un cône contrairement au non recollement des cônes.

3) Si pour un e de E et un f de F l'arête (e,f) est orientée et si cette orientation change alors e est dans la classe engendrée par F.

a) Supposons que l'élément e peut être pris égal à x c'est à dire que (x,f) est orienté et changeant pour un certain f de F. L'élément y n'étant pas dans la classe engendrée par F en vertu du sous-lemme 2, cette classe est un y-intervalle orienté et (x,y) ne changeant pas $\{y\}\cup F$ est encore un cône.

b) Supposons donc que (x,f) est toujours neutre pour tout f de F et de même (y,f). Seul (z,f) est orienté pour un f de F. Appliquons le petit lemme 3 à l'ensemble {x,y,z,f}. Comme {x,y} n'est pas un z-intervalle c'est (z,f) qui doit être un x-intervalle. L'arête (x,f) est donc pleine et de même (y,f) est vide. Le petit lemme 3 permet encore de dire que toute flèche (f,f_1) non versatile (et donc changeante) incluse dans F est en fait un x-intervalle plein et un y-intervalle vide car {x,y} ne peut être un f-intervalle. De proche en proche et par connexité, le sous-lemme 0 dit que $(R|\{x,y\}\cup F, R'|\{x,y\}\cup F, E', F)$ est un bec en prenant pour E' l'ensemble {x,y,f} avec f quelconque dans F. Le non recollement des becs achève ce cas.

Cas II] E et F ne sont pas disjoints;

1) $E\cap F=\{x,y,z\}$. Contraire à la définition des doubles motifs.

2) $E\cap F=\{x,y\}$.

α) Si on n'est pas dans un cas d'exception prévu par le sous-lemme 2 alors x et y étant dans F sont dans la même classe engendrée par F – absurde.

β) Si la première exception se produit alors F-E est réduit à un singleton f qui est R-majorant (par exemple) de x et y mais {x,y,f} est alors une chaîne (au sens élargi) et ne pourrait être un grand motif.

3) $E \cap F = \{x,z\}$.

α) Si on n'est pas dans un cas d'exception prévu par le sous-lemme 2 alors y n'est pas dans la classe engendrée par F ce qui est absurde car x et z sont dans cette classe alors que $R|(y,z) \neq R|(y,x)$.

β) Si la première exception se produit alors F-E est réduit à un singleton f qui est R-majorant (par exemple) de x et y mais $F=\{x,f,z\}$ devant être connexe (z,f) doit être orienté.

a) Si $R|(z,f)=(+,-)$ alors f est R-maximum et l'hémimorphie appliquée à $\{x,z,f\}$ prouve que f est un R'-minimum et donc (R,R') est un cône.

b) Si $R|(z,f)=(-,+)$ F ne peut être un grand motif.

4) $E \cap F = \{y,z\}$. Comme en 3).

5) $E \cap F = \{x\}$.

α) Si on n'est pas dans un cas d'exception prévu par le sous-lemme 2 alors y n'est pas dans la classe engendrée par F laquelle contient x. (x,y) ne changeant pas, F est un y-intervalle orienté et $F \cup \{x\}$ est un cône proprement inclus dans $|R|$ — absurde.

β) Si la première exception se produit alors F-E est réduit à un singleton, F est alors de cardinal 2 — contre l'hypothèse.

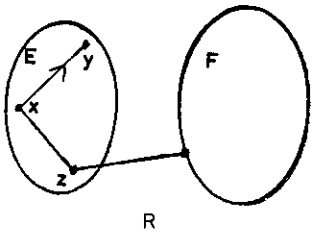
6) $E \cap F = \{y\}$. Comme en 5).

7) $E \cap F = \{z\}$.

α) Si on n'est pas dans un cas d'exception prévu par le sous-lemme 2 alors x, par exemple, n'est pas dans la classe engendrée par F. L'élément y n'y est pas non plus puisque $R|(x,z)$ est neutre et pas $R|(x,y)$. Comme (x,z) est plein, F est un x- et un y-presque-intervalle neutre. Le petit lemme 3 permet de dire que toute flèche non versatile (z,v) de F est en fait un x-intervalle plein et un y-intervalle vide car $\{x,y\}$ ne peut être un z-intervalle. De proche en proche et par connexité (R,R') est un bec.

β) Si la première exception se produit alors F-E est réduit à un singleton et F est de cardinal 2 — contre l'hypothèse. □

Remarquons que les arêtes liant E et F ne sont pas nécessairement de même nature comme le montre l'exemple suivant: Posons E={x,y,z} avec R|(x,y)=(+,-), (x,z) plein et (y,z) vide; F est disjoint de E et pour tout f de F les arêtes (z,f) sont pleines et les arêtes (x,f) et (y,f) vides.

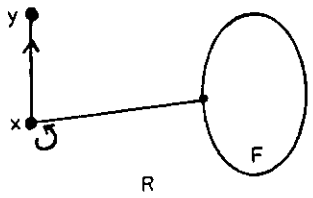


<u>Démonstration du SOUS-LEMME 4</u> dont nous rappelons l'énoncé:

Soit (R,R',E,F) est un double motif renforcé où E n'est pas contenu dans une seule (R,R')-classe. Si E est connexe et si F est connexe de cardinal >2, alors ce double motif est un cylindre ou un cône.

SCOLIE: si E est en plus de cardinal ≥3 et disjoint de F, les arêtes (nécessairement toutes neutres) liant E et F sont de même nature.

Si card(E)=2 et card F>2, la conclusion de l'énoncé reste juste mais pas la scolie comme l'illustre l'exemple suivant: E={x,y}, (x,F) est plein et (y,F) vide.



PREUVE.

On va se servir encore du sous-lemme 2. Nous raisonnerons sur les arêtes non versatiles d'un grand motif. Si ce motif est une chaîne infinie (lesquelles ont toutes leurs arêtes versatiles), le lecteur remplacera de lui-même le terme "non versatile" par le vocable "non changeant".

Remarquons que le cardinal de R est ≥4; par suite la deuxième exception prévue par le sous-lemme 2 de multiplicité des classes ne peut avoir lieu. Si on se trouve dans le cas de la première exception au sous-lemme 2, à savoir quand F-E est un singleton dont l'unique élément n est majorant ou minorant changeant de la composante connexe de E, alors le sous-lemme 4 est démontré puisque E est supposé connexe.

Dans les autres cas on passe à la première étape.

<u>1ère étape</u>. F étant connexe tous ses éléments sont dans une même (R,R')-classe (sous-lemme 2bis). Notons D la (R,R')-classe engendrée par F. Si cette classe est réduite à F, F est un presque-intervalle d'après le sous-lemme 1 puisque card (R)>3. Si ce n'est pas le cas, D contient donc des éléments de E-F. Les sous lemmes 2 et 2ter affirment que les éléments de E ne sont pas tous dans la même (R,R')-classe (sauf dans le cas de la première exception au sous-lemme 2 où (R,R') est un cône et vérifie donc tout de même la conclusion du sous lemme 4). |R|-D n'est donc pas vide. Soit (m,y) une arête non versatile de E avec y dans D et m extérieur à D donc dans E-F; ceci est possible si E est connexe grâce aux sous-lemme 0 — si E est une chaîne infinie (avec donc toutes ses arêtes versatiles) prenons simplement (m,y) non changeant. D est alors un m-intervalle orienté (mod R et R') et donc aussi F qui en est une partie. En conclusion de cette première étape F est un m-presque-intervalle pour un certain m de E-F.

<u>2ème étape</u>. Pour le même m que celui de la première étape on suppose, dans cette 2ème étape, (m,F) orienté et, grâce à la symétrie des rôles entre E et

F dans la première étape (considérer l'hémimorphie entre R et R'^*), on peut supposer l'existence d'un n de F-E, tel que E soit un n-intervalle, fatalement orienté. L'élément m n'étant pas dans la classe engendrée par F, l'orientation de (m,n) ne change pas en passant de R à R'. Le lemme 3·c appliqué à $R|\{m\}\cup F$ et $R'|\{m\}\cup F$ indique que ces deux restrictions ne sont ni iso- ni anti-isomorphes, $\{m\}\cup F$ n'est donc pas une partie propre de la base et par conséquent E-F est un singleton et (R,R',E,F) est un cône. En conclusion de cette étape reste le cas où (m,F) n'est pas orienté.

<u>3ème étape</u>. Supposons donc, jusqu'à la fin de la preuve, que pour un m de E-D, F est un m-presque-intervalle neutre et donc pour tout m de E-D sans quoi la deuxième étape aurait résolu le problème. Montrons dans cette 3ème étape que F est un m-presque-intervalle pour tout m de E-F. Soit i un élément de $E\cap D$ supposé pour l'instant non vide et e un élément de E-D.

Il existe un chemin de flèche (pas forcément un (R,R')-chemin de différence) liant e à i. Une de ces flèche a une de ses extrémité u dans D et l'autre v dans E-D. Alors D est un v-intervalle, F aussi et on se retrouve ramené à l'étape précédente. On a donc démontré qu'il n'y a pas d'élément i dans $E\cap D$, par suite E et F sont disjoints et par conséquent F=D *(uniquement dans l'hypothèse de la 3ème étape où F est un m-presque intervalle neutre pour tout m de E-D)*.

Montrons maintenant que pour tout m de E-F, F est un m-intervalle; plaçons nous dans le seul cas restant à traiter, celui où E et F sont disjoints et où R|(m,F) est neutre pour tout m de E. Soit (a,b) une flèche orientée changeante de R|F. Remarquons pour la suite que même si E est de card 2, ses éléments n'ont pas le même statut de réflexivité alors que tous les éléments de F, lequel est de cardinal >2, ont même statut de réflexivité; par suite un iso- ou anti-isomorphisme de $R|E\cup\{a,b\}$ sur $R'|E\cup\{a,b\}$, ne peut jamais échanger E avec {a,b}. On en tire que E est

globalement conservé et par conséquent seul un isomorphisme est réalisable. Dans un isomorphisme de $R|E\cup\{a,b\}$ sur $R'|E\cup\{a,b\}$ dont la base est une partie propre de $E\cup F$ puisque $card(F)\geq 3$, a et b sont échangés; chaque élément k de E, qui n'est pas extrémité d'une arête orientée versatile de $R|E$, est conservé, donc $R|(k,a)=R'|(k,b)=R|(k,b)$ (de tels k existent dans tout grand motif autre que ω, et si $R|E=R'|E\approx\omega$ un sommet k n'est jamais extrémité d'une arête changeante). F étant connexe peut être parcouru par des arêtes non versatiles (sous-lemme 0) ce qui de proche en proche prouve que (k,f) est toujours plein ou toujours vide quand f parcourt F. Montrons que F est un E-intervalle. Soit (k,l) une arête orientée non versatile quelconque de E. Supposons d'abord $card(E)>2$. $F\cup\{k,l\}$ est une partie propre de $E\cup F$ sur laquelle il ne peut y avoir isomorphie entre R et R' (F connexe de cardinal >2 alors que $card\ \{k,l\}=2$), une anti-isomorphie permute k et l ce qui prouve que $R|(l,f)$ est neutre et de même nature que $R|(k,f)$ pour tout f de F; en effet l'image de (l,f) par un anti-isomorphisme est (k,f') pour un certain f' de F, or $R|(k,f')=R|(k,f)$. E étant connexe peut être parcouru par des arêtes non versatiles, R ne peut donc être qu'un cylindre avec les liens entre E et F tous pleins ou tous vides. Si maintenant $card(E)=2$ l'unique arête (k,l) de E est non versatile, F est un k-intervalle neutre et un l-intervalle neutre (peut-être de nature différente) et (R,R',E,F) est un cylindre. □

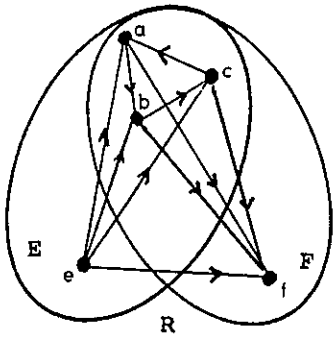
PROPOSITION 5 . Soit (R,R',E,F) un double motif renforcé. Si E-F est un singleton et si son unique élément e est R-minimum (par exemple) de $|R|$, e est aussi R'-minimum *dès que card R >5* ; Dans le cas où card $R\leq 5$ et où e n'est pas R'-minimum alors F-E est un singleton dont l'unique élément est extremum changeant mod R et R' sauf si $card(R)=3$ et $R|E\approx R|F$ isomorphes à D_{26} ou D_{27}.

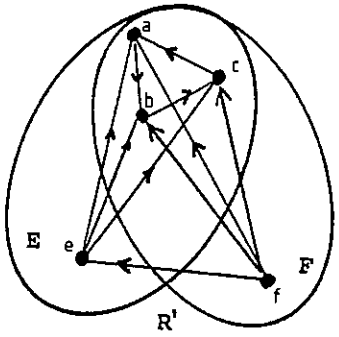
PREUVE. E ayant e pour R-minimum ne peut être qu'un diamant ou D_7 ou D_9 ou D_{26} ou D_{27} ou une chaîne infinie. Supposons par l'absurde que e n'est pas un R'-minimum, il R'-minore quoiqu'il en soit les autres éléments de E (d'après le petit lemme 1 du §3.2) mais R'-majore un élément f de F. |R| ne forme alors qu'une seule (R,R')-classe (deux éléments e et e' de E sont liés par un (R,R')-chemin (e,f,···,e') puisque F n'est formé que d'une seule (R,R')-classe de différence). Donc d'après le sous-lemme 2 il faut ou bien que F-E soit un singleton extremum changeant de R ou bien que card(R)=3 et que R|E soit de type D_{26} ou D_{27}. Dans le premier cas l'ensemble |R| ne peut alors atteindre ou dépasser le cardinal 6 que si E est une chaîne infinie puisque les cardinaux de D_6, D_7, D_{26} et D_{27} sont ≤5; sur E∩F il y a alors identité de R et R' et opposition aussi puisque cette intersection est incluse dans F — absurde car E∩F=E-{e}. □

Cette proposition n'est pas nécessaire à la preuve du lemme de non recollement, l'absence d'isomorphie et d'anti-isomorphie entre R et R' affirmée par le lemme 3·c suffit, et d'ailleurs les intervalles mis en évidence dans la preuve du sous-lemme 4 le sont mod R *et* mod R'.

Sur une base de cardinal au plus 5 on peut trouver des doubles motifs (R,R',E,F) où E-F est réduit à un élément e qui est R-minimum de la base *mais n'en est pas R'-minimum*:

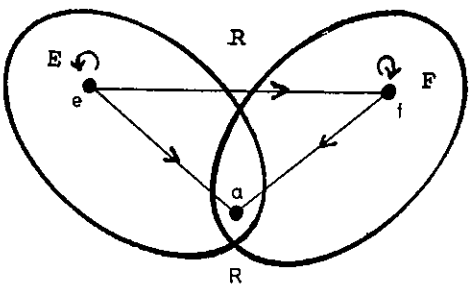
R|E est un diamant de base {e,a,b,c} dont e est R-minimum et R|F est un diamant de base {f,a,b,c} dont f est R-maximum et on a R|(e,f)=(+,-). Mod R' on change les flèches dont une extrémité est f. Alors e n'est plus un R'-minimum.

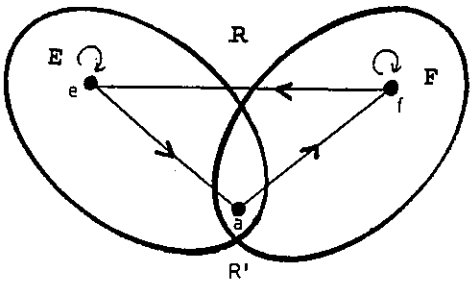




Sur une base de cardinal 4 on peut construire un exemple analogue en prenant à la place du diamant une relation D_9.

Pour le cardinal 3 on a l'exemple suivant sur {e,a,f} : e<f<a mod R alors que e<a, a<f,f<e mod R'; R et R' étant réflexifs sur e et f et pas sur a.





§4.2.1 PREUVE DU LEMME 2 de classification des doubles motifs.

Rappelons que ce lemme 2 classifie les doubles motifs en cylindres, cônes, becs ou allures (α) (β) (γ) (δ) (ε) (ζ) ou (η). Pour terminer la preuve du lemme 2 nous aurons encore besoin de deux sous-lemmes techniques relatifs aux "petits" doubles motifs, ceux où les deux motifs sont non connexes ou de cardinal 2. Ces sous-lemmes serviront aussi, par ailleurs, à terminer le lemme de non recollement et ils s'apparentent, par là, à des lemmes. Ces sous-lemmes numérotés 5·abc et 5·d sont démontrés au §5.

Démonstration des lemmes 2·d, 2·bc et 2·abc:

Plusieurs cas sont à envisager en tenant compte de la symétrie des rôles entre E et F.

Premier cas, E et F sont connexes et F est de cardinal ≥3 alors le sous-lemme 4 prouve les conclusions des lemmes 2·d, 2·bc et 2·abc.

Deuxième cas, E par exemple est non connexe alors que F est connexe de cardinal ≥3 alors le sous-lemme 3 donne le résultat.

Troisième cas, E et F sont non disjoints et, non connexes ou de cardinal 2, le sous-lemme 5·abc (au §5) donne la solution.

Quatrième cas, E et F sont disjoints et, non connexes ou de cardinal 2, le sous-lemme 5·d (au §5) donne la solution. □

§4.2.2 PREUVE DU LEMME DE NON RECOLLEMENT des DOUBLES MOTIFS.

Le lemme 2 vient de classer les doubles motifs (R,R',E,F) en différentes espèces et allures. Pour chacune, la non isomorphie et la non anti-isomorphie entre R et R' a été démontrée grâce aux lemmes 3·d, 3·c, 3·b et aux sous-lemmes 5·d et 5·abc.

§5 LEMMES TECHNIQUES SUR LES "PETITS" DOUBLES MOTIFS.

On se souvient que les motifs non connexes ont 3 éléments. On rappelle aussi que les sommets désignés par des lettres différentes sont supposés distincts.

Il est commode dans ce §5 d'utiliser le terme "chaîne" au sens élargi c'est à dire que tous les sommets d'une "chaîne" n'auront pas nécessairement le même statut de réflexivité.

§5.0. FIN de la PREUVE des LEMMES 2·bc et 2·abc et du NON RECOLLEMENT des BECS et ALLURES.

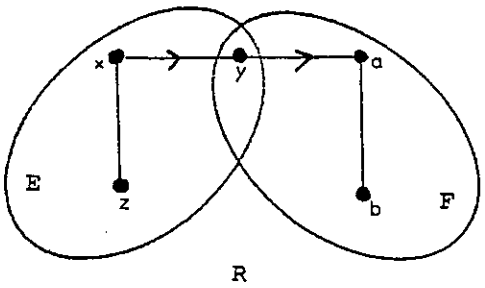
Pour démontrer les lemmes 2·bc et 2·abc nous aurons besoin du sous-lemme suivant qui est *aussi* nécessaire au §4.2.2 pour terminer le non recollement des becs et allures.

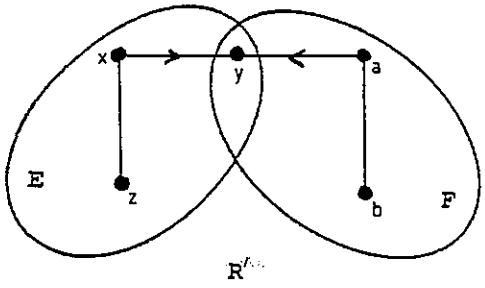
SOUS-LEMME 5·abc . Soit (R,R',E,F) un double motif où E et F sont non disjoints et chacun non connexe ou de cardinal 2, (et donc où card $E \cup F \leq 5$). Alors (R,R',E,F) est soit un cône soit un bec soit d'une des allures (α) (β) (γ) (δ) (ε) (η) ou (ζ) et à chaque fois $R \not\approx R'$ et $R^* \not\approx R'$.

PREUVE.

• <u>1er CAS</u>: |R| a 5 éléments, E et F en ont 3 chacun, il y en a donc un de commun.

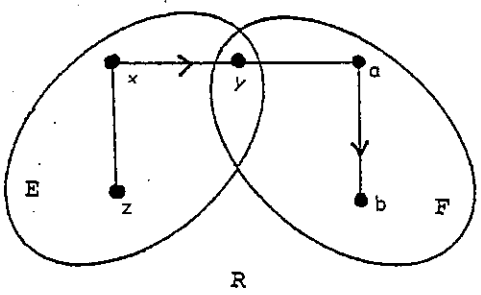
<u>1er sous-cas</u>: E={z,x,y} avec (x,z) plein, (z,y) vide et R|(x,y)=(+,-); F={y,a,b} avec, (a,b) plein et (y,b) vide ou le contraire, et R|(y,a)=(+,-).

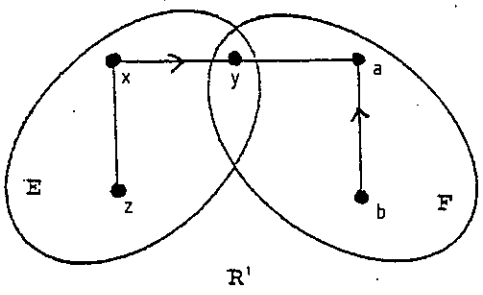




L'hémimorphie appliquée à {x,y,a} exige que (x,a) soit orienté et pour éviter un R-cycle qui n'existe pas mod R' il faut que R|(x,a)=(+,-). Si R'|(a,x)=(+,-) une arête pleine pend dans R'|{x,y,z,a} au deuxième élément de la chaîne (a,x,y) ce qui est impossible mod R. Si R'|(a,x)=(-,+) raisonnement analogue sur {x,y,a,b}. — D'où impasse.

<u>2ème sous-cas</u>: Idem sauf que (y,a) est plein et R|(a,b)=(+,-).





(R,R') est alors d'allure (δ). Pour s'assurer qu'il n'y a ni iso- ni anti-isomorphisme entre R et R' nous peut avoir recours à un ordinateur sur lequel tournera le programme DELTA qui se trouve en annexe du §5.3 et qui examine les 6 possibilités (plein, vide, orienté changeant ou pas, dans un sens ou dans l'autre) pour les 4 arêtes inconnues (z,a) (z,b) (x,a) (x,b). Voici une démonstration mathématique plus éclairante obtenue avec G. Lopez.

Montrons que pour l'allure (δ), R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes.

Remarquons d'abord qu'apparaît dans R|{x,y,a,b} une "*succession*" *sans répétition de sommet* d'une flèche, d'une arête pleine dont une extrémité est le but de la précédente flèche et d'une nouvelle flèche de source l'autre extrémité de l'arête pleine [ce qu'on schématisera par (→,—,→)], succession réalisée par les arêtes (x,y) (y,a) (a,b) de la suite (x,y,a,b). La réalisation de cette succession dans R' astreint (x,a) à être plein.

Si (x,b) était orienté on aurait, incidentes à un seul des sommets x ou b, deux flèches de R|{x,y,a,b} toutes deux vers ce sommet ou toutes deux

issues de ce sommet. L'iso- ou anti-isomorphie sur {a,b,x,y} conserve cette propriété, que l'inversion de (a,b) rend irréalisable mod R'. Puisque (x,b) et (a,x) sont neutres, le petit lemme 3 de succession appliqué à (x,y) et (a,b) dit que {x,y} est un b-intervalle et par suite (x,b) est vide.

Nous allons maintenant voir que (z,b) est neutre. Si (z,b) était orienté et changeant le petit lemme 3 appliqué à (x,y) et (z,b) donnerait une contradiction. Si (z,b) était orienté et non changeant, le changement de (a,b) imposerait une orientation à (z,a); le petit lemme 3 appliqué à (z,a) et (x,y) exigerait alors, puisque {z,a} n'est pas un y-intervalle ni {x,y} un z-intervalle, que (z,a) ne change pas. Examinons ce cas. (z,a,b) ne peut être un cycle (irréalisable à la fois mod R et mod R'), (z,a,b) est donc une chaîne. C'est la seule chaîne de R et elle est donc globalement conservée par une iso- ou anti-isomorphie éventuelle de R sur R'. Le complémentaire {x,y} serait conservé aussi. Le type de {x,y,z} étant invariable, z est conservé lui aussi donc également x et y. Il ne peut s'agir donc que d'un isomorphisme qui par conséquent permute a et b. On a alors abouti à une contradiction puisque (y,a) est de nature différente de (y,b). En conclusion de cet alinéa (z,b) est neutre.

Voyons maintenant qu'il en va de même de (z,a) que nous supposons donc orienté pour aboutir à une contradiction. Le petit lemme 3 de succession appliqué à (x,y) et (z,a) dit encore que (z,a) ne change pas. Cela est toujours incompatible avec la neutralité de (z,b) et le changement de (a,b). Est donc acquis que (z,a) est neutre.

Le sommet z est seul de R auquel aucune flèche n'est incidente. Cette propriété étant conservée par iso- ou anti-isomorphie de R sur R', z est conservé aussi. Deux possibilité se présentent alors:

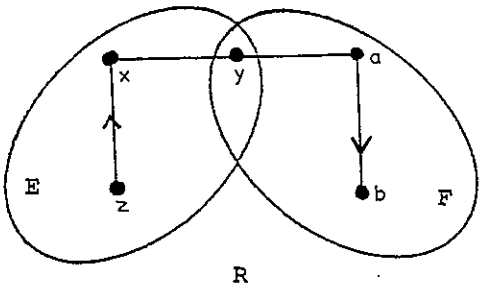
1) Si {x,y} et {a,b} sont chacun conservés par une iso- ou anti-isomorphie de R sur R'. La position différente de z par rapport à x et par rapport à y élimine l'anti-isomorphie. L'isomorphie conserve y et

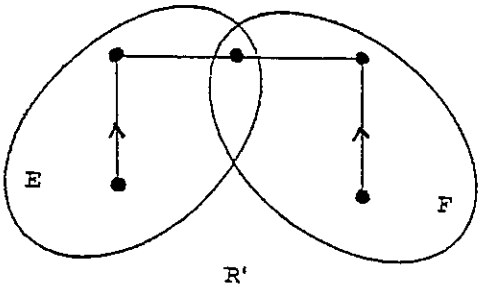
la position différente de *y* par rapport à *a* et par rapport à b rend, à son tour, impossible l'isomorphie.

2) Si {x,y} et {a,b} sont échangés par un iso- ou anti-isomorphisme de R sur R'. Mais {x,y} est un *a*- et un b-intervalle alors que de l'autre coté {a,b} n'est ni un x- ni un y-intervalle ce qui rend l'échange impossible.

Finalement R et R' ne peuvent être ni isomorphes ni anti-isomorphes dans le cas de l'allure (δ). □

<u>3ème sous-cas</u>: Identique au précédent sauf que (x,y) est neutre et que R|(z,x)=(+,-).





(R,R') se trouve être d'allure (ε). Pour s'assurer qu'il n'y a ni iso- ni anti-isomorphisme entre R et R' on peut encore avoir recours au programme EPSILON qui se trouve en annexe du §5.3. Voici une preuve plus mathématique.

Montrons la non iso- et la non anti-isomorphie entre R et R' pour l'allure (ε).

Le sommet *y*, seul élément incident à aucune flèche, est conservé par un iso- ou anti-isomorphisme de R sur R'. Donc soit

1) {x,z} et {a,b} sont chacun globalement conservés. La conservation de *y* oblige x,z,a,b à être tous invariants ce qui est incompatible aussi

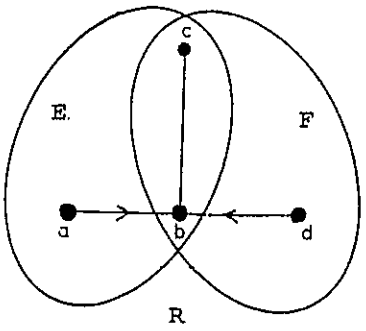
bien avec une isomorphie qu'avec une anti-isomorphie.

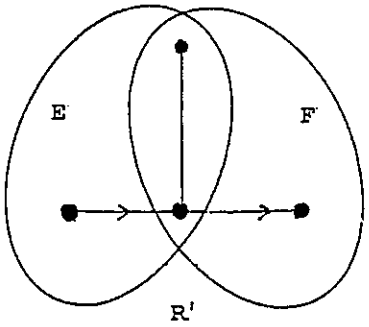
2) {x,z} et {a,b} sont globalement échangés. La conservation de *y* impose x↔a, z↔b, mais cette bijection n'est pas un isomorphisme de {a,b} sur {x,z} ni un anti-isomorphisme de {x,z} sur {a,b}. □

• 2ème CAS: Card R =4.

1er sous-cas: E et F ont 3 éléments chacun et donc 2 en commun. L'arête commune qui, étant dans F, doit s'inverser alors qu'étant dans E elle ne le doit pas ne peut qu'être neutre, par exemple pleine. Soit a l'élément de E-F et d celui de F-E.

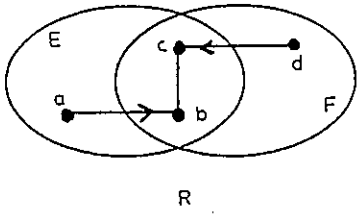
• Si un seul et même élément b de E∩F est lié par des flèches à *a* et à d alors (a,d) est orienté et on se retrouve dans l'allure (γ).

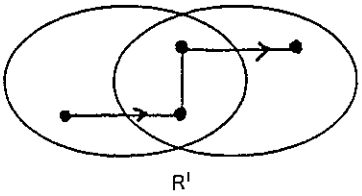




L'hémimorphie appliquée à {a,b,d} impose à {a,b,d} d'être une chaîne. Dans une des relations R ou R' l'arête neutre est pendante au deuxième élément de la chaîne {a,b,d} et à un élément extrême de la chaîne dans l'autre relation: elles ne sont donc ni iso- ni anti-isomorphes.

• Si a et d sont liés par des flèches à des éléments différents de E∩F, (R,R') se trouve alors être d'allure (β):

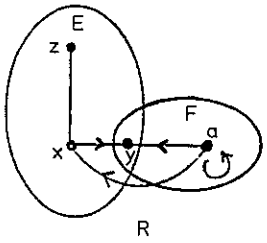


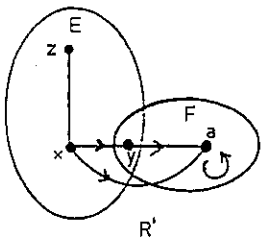


Dans une des relations R ou R′ on a la succession (→,—,→) et pas dans l'autre qui n'est donc ni iso- ni anti-isomorphe à la première.

<u>2ème sous-cas</u>. E et F ont 1 élément en commun:

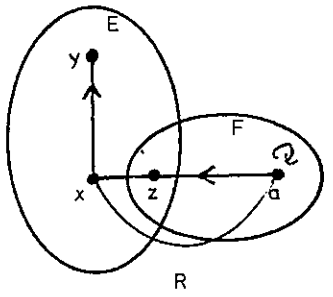
1ère éventualité l'allure (η). E ={x,y,z} avec (z,x) plein, (z,y) vide et R|(x,y)=(+,-) et F={y,a} avec R|(a,y)=(=,-), une boucle en a et pas en y. Inversion de (a,y) dans R′. L'hémimorphie appliquée à {x,y,a} oblige (x,a) à être orienté et pour éviter un R′-cycle il faut que R′|(x,a)=(+,-). Dans le grand motif E il doit y avoir des boucles sur à la fois x et y ou sur aucun des deux, donc sur aucun. Dans R′|{x,y,a} il y a une boucle sur le troisième élément de la R-chaîne (x,y,a) et donc dans R|{x,y,a} a doit être le premier élément et il faut donc que R|(a,x)=(+,-). R est formé d'une chaîne avec une arête pleine issue du second élément; dans R′ une arête pleine devrait donc être issue de y si R et R′ étaient isomorphes ou anti-isomorphes ce qui est par conséquent absurde.

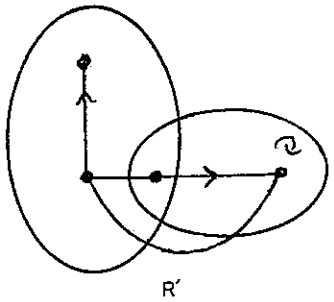




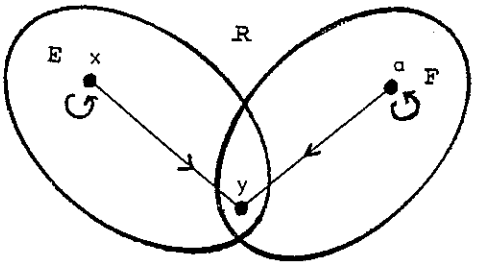
2ème éventualité l'allure (ζ). E ={x,y,z} avec (z,x) plein, (z,y) vide, R|(x,y)=(+,-) et F={z,a} avec R|(a,z)=(+,-), une boucle en a et pas en z. Inversion de (a,z) dans R′. Avec R|{a,z,x,y} apparaît dans R la succession sans répétition de sommet (→,—,→). Pour qu'elle puisse se retrouver mod R′ il faut que (a,x) soit plein. Cette succession apparaît alors mod R′ avec (z,a,x,y). (y,z) étant vide (a,y) qui lui correspond par un iso- ou un

anti-isomorphisme doit l'être aussi. Le sommet y seul élément incident à deux arêtes vides est donc conservé dans un iso- ou anti-isomorphisme de R sur R'. Le sommet z est avec a seul élément à être incident à une arête pleine et à une vide donc {a,z} est conservé et x reste fixe dans un tel iso- ou anti-isomorphisme car lié par des arêtes pleines à *a* et à z. Mais la réflexivité sur *a* et pas sur z oblige tout à rester fixe. Le changement de (a,z) empêche alors l'isomorphie entre R et R' et le maintien de (x,y) empêche l'anti-isomorphie.





• <u>3ème CAS</u>. R possède 3 éléments: E={x,y} avec R(x,x)=(+), R(y,y)=(-), R|(x,y)=(+,-); F={a,y} avec R(a,a)=(+) et R|(a,y)=(+,-). Mod R, *y* est un extremum sans boucle alors que mod R' seul *a* est candidat à être extremum et il est attaché à une boucle.



(x,a) peut éventuellement être orienté. (R,R') est ici d'allure (α). □

§5.1 . Fin de la PREUVE DU LEMME de CLASSIFICATION et du LEMME de NON RECOLLEMENT.

Compte tenu du sous-lemme 3 il ne reste plus, pour obtenir le non recollement des cylindres, qu'à démontrer le sous-lemme 5·d suivant qui sert aussi au §4.2 pour démontrer le lemme 2·d et donc pour conclure le lemme 2 de classification des doubles motifs.

SOUS-LEMME 5·d . Soit (R,R',E,F) un double motif, E et F étant disjoints, chacun non connexe ou de cardinal 2, alors les liens entre E et F sont neutres et R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes.

Scolie. Si en plus E et F sont non connexes les liens entre les extrémités de la flèche de E et de celle de F sont de même nature. De même pour les liens entre la flèche de E et le singleton restant de F. De même en permutant E et F.

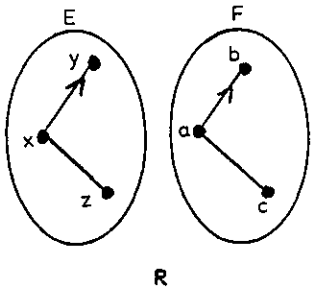
Si maintenant E est non connexe mais F connexe alors la flèche de E est un f-intervalle pour tout f de F.

Dans une première approche du problème j'avais tenté d'utiliser un programme pour faire montrer ce sous-lemme à un ordinateur. Je n'y suis pas parvenu, les programmes mis en œuvre soit étaient exhaustifs et ne se concluaient pas en un temps raisonnable, soit étaient plus heuristiques mais laissaient du coup échapper trop de faux contrexemples pour qu'il soit possible de les réexaminer à la main. J'ai par la suite trouvé une démonstration mathématique. En m'en inspirant j'ai pu améliorer l'algorithme et aboutir à un programme acceptable (la procédure *cas_special* y éliminera les faux contrexemples). J'ai placé ce programme en annexe; le lecteur pourra le trouver plus simple quoique moins éclairant que la preuve mathématique. Remarquons accessoirement que le lemme de non recollement est, dans le cas fini et en admettant le théorème de reconstruction,

soluble, en principe, par un ordinateur puisqu'il ne concerne que les paires de graphes sur un ensemble de cardinal ≤12. Un examen rapide montre que sans arguments théoriques un tel programme a peu de chance d'aboutir à une conclusion avant la fin du monde...

PREUVE du sous-lemme 5·d.

• 1er CAS : E et F sont disjoints et chacun de cardinal 3. E={x,y,z} avec (y,z) vide, (x,z) plein et R|(x,y)=(+,-). F={a,b,c} avec (a,c) plein, (c,b) vide et R|(a,c)=(+,-). Nous allons montrer que R et R' ne sont ni isomorphes ni anti-isomorphes.



1ère ÉTAPE.

Nous allons montrer dans la première étape les liens entre E et F autres que (z,c) sont neutres.

1ère sous-étape.

. 1er sous-cas: (x,a) est orienté et change. *x* est dans la (R,R')-classe engendrée par {a,b} donc l'élément *y* n'y est pas (sous-lemme 2 §4 de multiplicité des classes) et il majore alors a et b. Dans R'|{y,a,b,c} c est lié par une arête pleine au second élément *a* de la chaîne (b,a,y) ce qui n'est pas le cas mod R puisque (b,c) est vide; or {b,a,y}, étant le seul 3-emble sans arête neutre de {y,a,b,c}, est conservé par un iso- ou anti-isomorphisme de R'|{y,a,b,c} sur R|{y,a,b,c} — absurdité.

. 2ème sous-cas. Si (x,a) est orienté et ne change pas, par observation de {x,a,b} on voit que (x,b) doit être orienté; si on a pris par exemple

R|(x,a)=(+,-) alors on doit avoir R|(x,b)=(+,-) pour éviter un R-cycle. Sur R|{x,a,b,c} c est lié par une arête pleine au deuxième élément *a* de la chaîne (x,a,b) [comme dans le premier sous-cas cette chaîne est globalement conservée par un iso- ou anti-isomorphisme de R|{x,a,b,c} sur R'|{x,a,b,c}] et par comparaison avec R' ce deuxième élément mod R' ne pouvant être b car (b,c) est vide doit être x ce qui entraîne une inversion de l'arête (x,b) et on est renvoyé au premier sous-cas.

En conclusion (x,a) est neutre. De même pour (x,b), (y,a), (y,b).

[On peut dès lors utiliser le programme figurant en annexe à partir des valeurs initiales 2, 2, 2, 2 des premières boucles pour montrer le reste de ce cas ce qui divise le temps de computation par 16.]

. 2ème sous-étape: (z,a) est orienté et ne change pas.

A] Envisageons le cas où R|(z,a)=(+,-). L'examen des effets de l'hémimorphie sur {z,a,b} permet de voir que z<a<b mod R et que (z,b) change puisque, sur {z,a,b,c}, c est lié par une arête pleine au deuxième élément de R|{z,a,b} ({z,a,b} est conservé puisque seul 3-emble sans arête neutre de {z,a,b,c}) et que, par suite, le R'-deuxième élément ne peut être b.

B] Envisageons maintenant le cas où a<z (mod R'). Alors b<z (mod R') et (b,z) doit changer car sinon le R'-second élément *a* de {z,a,b} serait échangé, par un iso- ou anti-isomorphisme, avec *b* qui du coup deviendrait R-second élément de {z,a,b} – absurde puisque (a,c) et (b,c) ne sont pas de même nature.

On peut donc toujours se ramener au cas où (z,a) ou (z,b) change.

Ce qui nous amène à la 3ème sous-étape.

. 3ème sous-étape: (z,a) est orienté et change par exemple R|(z,a)=(+,-). Le petit lemme 3 appliqué à {a,z,x,y} exige alors que (x,a) soit plein et (y,a) vide. Ce même petit lemme appliqué ensuite à {x,y,a,b} montre que (x,b) est plein et (y,b) vide.

Raisonnons sur R-{z} [notation elliptique pour R|(|R|-{z})]. {a,b} est une composante connexe. Son image par un iso- ou un anti-isomorphisme de R-{z} sur R'-{z} doit être une composante connexe de la base {a,b,c,x,y}. Donc soit {a,b} est conservée soit envoyée sur une autre composante connexe qui ne peut être {x,y,c} (3 éléments) et qui est donc {x,y} auquel cas (c,x) et (c,y) sont neutres.

1) Si {a,b} est conservée. Le sommet c est le seul relié à {a,b} par exactement 1 arête pleine et une vide; *c* est par suite conservé ainsi donc que {x,y}. Si un isomorphisme conservant {a,b} existe entre R-{z} et R'-{z} il provoque les échanges suivants: a↔b, x↔x, y↔y, ce qui est impossible puisque (c,a) et (c,b) ne sont pas de même nature. Si un anti-isomorphisme existe il provoque les échanges suivants: x↔y, a↔a, b↔b, ce qui est encore irréalisable puisque (x,a) et (y,a) ne sont pas de même nature.

2) Si {a,b} n'est pas conservé. {a,b} ne peut qu'être échangé avec l'autre composante connexe {x,y}. Par suite c est conservé. Si un isomorphisme échangeant {a,b} et {x,y} existe il ne peut qu'être ainsi défini: x↦b, y↦a, a↦x, b↦y par conséquent (y,a)↦(a,x) alors que (a,x) et (a,y) ne sont pas de même nature. Si un anti-isomorphisme échangeant {a,b} et {x,y} existe il ne peut être qu'ainsi défini: x↦a, y↦b, a↦y, b↦x, par suite (x,a)↦(a,y) encore absurde puisque (a,x) et (a,y) ne sont toujours pas de même nature.

Cette contradiction finale prouve que (z,a) est neutre. De même pour (z,b) (x,c) et (y,c).

2ème ÉTAPE.

Est acquis que tous les liens entre E et F sont neutres sauf peut-être (z,c).

Montrons dans cette étape la scolie qui dit que les arêtes entre {x,y} et {a,b} sont de même nature. Pour cela appliquons le petit lemme 3 à

{x,y,a,b}. Ce petit lemme dit que soit {x,y} est un a- et un b-intervalle soit {a,b} est un x- et un y-intervalle. Supposons réalisée la première éventualité et *pas* la deuxième. Dans un iso- ou un anti-isomorphisme de R|{a,b,x,y,z} sur R'|{a,b,x,y,z}, z (seul sommet incident à aucune flèche) est conservé, par ailleurs {x,y} et {a,b} ne peuvent être globalement échangés puisque {a,b} n'est pas un x- ou pas un y-intervalle alors que {x,y} est un a- et un b-intervalle. Pour la même raison les sommets a et b ne peuvent être échangés. Les sommets a et b sont donc chacun conservés, seul un anti-isomorphisme est alors viable mais il est irréalisable sur E. Si la deuxième éventualité est réalisée et pas la première on raisonne de même sur {x,y,a,b,c}.

3ème ÉTAPE.

On veut montrer que (z,c) est neutre.

Supposons que (z,c) est orienté et ne change pas. Appliquons le petit lemme 3 à {a,b,z,c}: comme {a,b} n'est pas un c-intervalle, {z,c} se doit d'être un a- et un b-intervalle, donc (a,z) est plein et (b,z) vide. Dans R|{b,a,z,x,y} z est d'après la seconde étape seul sommet incident à exactement deux arêtes vides et deux pleines. Par un iso- ou anti-isomorphisme de R|{b,a,z,x,y} sur R'|{b,a,z,x,y} z est donc conservé et

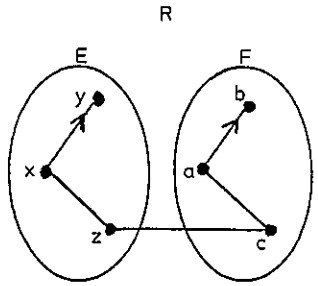
soit a) {x,y} est globalement conservé et il n'existe pas d'isomorphisme sur {a,b,z} ni d'anti-isomorphisme sur {x,y,z}.

soit b) {x,y} est échangé avec {a,b} et on doit avoir $x \leftrightarrow a$, $y \leftrightarrow b$ or cet échange n'est ni un iso- ni un anti-isomorphisme.

Si (z,c) change on raisonne sur l'hémimorphie entre R' et R^*: par passage de R^* à R' (z,c) ne change pas ni (a,b), mais (x,y) changera.

On obtient ainsi, à chaque fois, une contradiction prouvant la neutralité de (z,c).

Il est possible que (z,c) soit plein alors que les autres arêtes liant E et F sont vides:



Raisonnons sur |R|-{c} pour voir que {a,b} est un z-intervalle: Un iso- ou anti-isomorphisme de R-{c} sur R'-{c} conserve z, seul sommet incident à aucune flèche;

si cet iso- ou anti-isomorphisme conserve {a,b}, c'est un isomorphisme et {a,b} est un z-intervalle;

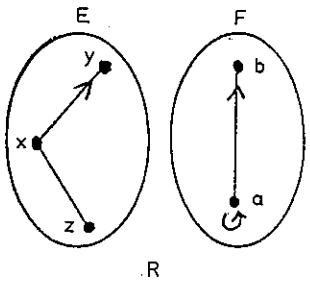
si cet iso- ou anti-isomorphisme échange {x,y} et {a,b}; soit c'est un isomorphisme lequel envoie x sur b puis b sur *y* — absurde car (z,x) et (z,y) sont de nature différente; soit c'est un anti-isomorphisme qui envoie x sur *a* puis *a* sur *y*, encore absurde pour la même raison.

En résumé les arêtes liant E et F sont neutres, celles liant {x,y} et {a,b} sont toutes pleines ou toutes vides, et {a,b} est un x-, un y-, et un z-intervalle ainsi que {x,y} un a-, un b-, et un c-intervalle. C'est bien le contenu de la scolie.

Montrons maintenant que R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes. Envisageons, par l'absurde, l'existence de, par exemple, un isomorphisme φ de R sur R'. Supposons d'abord que l'image de {a,b} par φ est {a,b} lui-même, {x,y} est par suite conservé aussi. Alors a et b sont échangés par φ. Le sommet *c* ne peut alors être conservé par φ puisque (a,c) est plein

tandis que (b,c) est vide. L'image de c par φ est donc z lequel est donc à son tour envoyé par φ sur c. Une contradiction vient du fait que {a,b} est un z-intervalle et pas un c-intervalle. Si on suppose maintenant que {x,y} et {a,b} s'échangent par l'isomorphisme φ alors $\varphi(x)$ est b et $\varphi(y)$ est a. L'ensemble {x,y} étant un c-intervalle alors que {a,b} n'en est pas un, c ne peut être conservé par φ et doit donc être échangé par φ avec z. Mais alors une contradiction naît du fait que (x,z) étant plein ne peut avoir pour image (c,b) qui est vide. Un anti-isomorphisme φ se traiterait de même en observant que ce φ serait un isomorphisme de R^* sur R'.

• 2ème CAS: L'ensemble E est de cardinal 3 est disjoint de F de cardinal 2; E={x,y,z} avec (y,z) vide (x,z) plein et R irréflexif sur {x,y}, et R|(x,y)=(+,-); F={a,b} avec R|(a,b)=(+,-), R(a,a)=(+), R(b,b)=(-).



On va montrer que les liens entre E et F sont neutres.

Rappelons que dans un grand motif {x,y,z} variante de D_{18} les extrémités de la flèche sont toutes deux réflexives ou toutes deux irréflexives (*cas dans lequel on se placera*).

Supposons l'existence d'une arête orientée de x vers a. Si (x,a) change alors x appartient à la (R,R')-classe engendrée par {a,b} donc y majore {x,a,b} puisque card(E-F)≥2 (sous-lemme 2 de multiplicité des classes) d'où apparition d'un cône sur {y,a,b} – absurde d'après le lemme 3·c. Si (x,a)

ne change pas, (x,a,b) ayant une flèche qui s'inverse et une autre pas, ne peut être un cycle. Il doit exister une flèche entre x et b et la boucle se trouve pour une des relations R ou R' au milieu de la chaîne {x,a,b} et ailleurs qu'au milieu pour l'autre relation — absurde.

Donc (x,a) est neutre et de même (y,a). Le même argument n'est pas a priori répétable pour (x,b) car l'irréflexivité sur {x,y} et b et la réflexivité sur *a* rompt la symétrie des rôles entre a et b; changeons donc d'argumentation. Si (x,b) est orienté (et pas (x,a)) cette orientation doit changer par hémimorphie appliquée à {x,a,b}. Alors (y,b) est orienté (regarder {y,b,x}). Un iso- ou anti-isomorphisme existe entre R et R' restreints à {x,y,a,b}; par cet iso- ou anti-isomorphisme *a* (seul élément réflexif) est conservé; {x,y} aussi puisque x et y sont les seuls éléments liés à *a* par une arête neutre; b est donc conservé aussi; il ne peut donc s'agir que d'un isomorphisme; x et y sont donc chacun conservés ce qui est finalement incompatible avec le changement de (x,b). En conclusion les liens entre {x,y} et {a,b} sont neutres.

Si (z,a) est orienté et change, le petit lemme 3 appliqué à {z,a,x,y} affirme que {z,a} est un x- et un y-intervalle, par suite (x,a) est plein et (y,a) vide. Dans un iso- ou anti-isomorphisme entre R et R' restreints à {x,y,a,b}, *a* doit (à cause de sa boucle) être conservé, il doit donc s'agir d'un anti-isomorphisme — contradiction sur {x,y}, l'arête vide (y,a) ne s'échangeant pas avec la pleine (x,a).

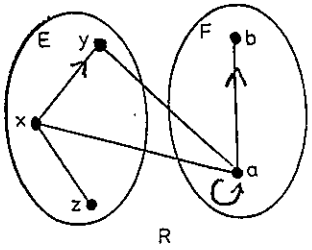
Si (z,a) est orienté et ne change pas, (z,b) doit être orienté aussi, et ne doit pas changer d'après l'alinéa précédent. Dans la chaîne {a,b,z}, un des éléments *a ou* b est second modulo une des relations R *ou* R', et l'autre élément est second modulo l'autre relation; ceci obligerait à un échange entre a et b ce qui n'est pas possible à cause de leur statut de réflexivité différent.

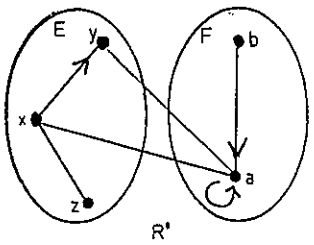
On vient donc de voir que les liens entre E et F sont neutres. Montrons maintenant que R et R′ ne sont ni iso- ni anti-isomorphes.

Par un iso- ou un anti-isomorphisme éventuel de R sur R′, a ne peut être envoyé sur x ou y qui sont irréflexifs, ni sur z duquel ne part aucune arête orientée. a est donc fixe, tout comme b. F est conservé par un iso- ou un anti-isomorphisme éventuel de R sur R′, ce qui ne laisse viable que l'anti-isomorphie irréalisable sur E.

Montrons maintenant la scolie. Le petit lemme 3 affirme que soit {x,y} est un a- et un b-intervalle soit {a,b} est un x- et un y-intervalle. Supposons réalisée la dernière éventualité avec par exemple (x,a) et (x,b) pleins, et (y,a) et (y,b) vides. Rappelons qu'on a supposé en outre {x,y} irréflexif (par exemple). Le sommet a doit, étant le seul sommet réflexif incident à une flèche, être conservé par un iso- ou un anti-isomorphisme de R|{x,y,a,b} sur R′|{x,y,a,b}. Le sommet b est donc conservé aussi. Seul un anti-isomorphisme est donc viable, il échange x et y ce qui est impossible si (x,a) est de nature différente de (y,a).

L'exemple suivant montre qu'on ne peut s'attendre à mieux: (a,x) et (a,y) sont pleins les autres arêtes liant E et F sont vides, R et R′ sont alors bien hémimorphes.

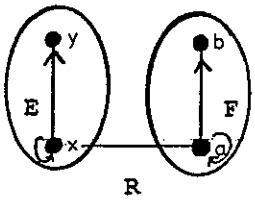




<u>3ème CAS</u>: E et F sont disjoints et de cardinal 2 ; E={x,y} avec R(x,x)=(+), R(y,y)=(-) et R|(x,y)=(+,-); F={a,b} avec R|(a,b)=(+,-), R(a,a)=(+), R(b,b)=(-).

Montrons que toutes les arêtes reliant {x,y} et {a,b} sont neutres. Supposons par l'absurde que par exemple R|(x,a)=(+,-) et, pour l'instant, que (x,a) change. D'après le sous-lemme 2 de multiplicité des classes {y} et {x,a,b} sont les deux (R,R')-classes de |R|. Alors *y* est, d'après le sous-lemme 1, un R- et R'-majorant de {a,b} ce que le lemme 3·c rend absurde. Donc (x,a) ne change pas et pour éviter un R-cycle (x,a,b) il faut que R|(x,b)=(+,-). Or au R-deuxième élément de {x,a,b} est attaché une boucle, donc aussi au second mod R' qui doit alors être x ce qui impose l'égalité R'|(b,x)=(+,-). L'arête (x,b) changeant, x est dans la (R,R')-classe de différence engendrée par {a,b} dont y est donc R- et R'-majorant. R|{a,b,y} est alors une chaîne sans boucle attachée au 2ème élément b, or mod R' le deuxième élément de {a,b,y} est *a* sur lequel il y a réflexivité – contradiction. Les liens entre {x,y} et {a,b} sont donc neutres. R et R' ne peuvent être ni iso- ni anti-isomorphes puisque par une telle transformation E ct F, étant connexes, seraient soit globalement échangés soit globalement invariants avec à chaque fois une contradiction en E ou en F: en effet dans R' une boucle est source et une autre est but ce qui n'est pas le cas de R. □

On ne peut pas en dire plus comme le montre l'exemple suivant où (x,a) est plein alors que les autres arêtes liant {x,y} et {a,b} sont vides : E={x,y} et F={a,b} sont de type D_{26} avec réflexivité en x et en a.



ANNEXE au §5.1

Bien que je vienne d'apporter une démonstration mathématique du sous-lemme 5·d j'ai trouvé bon de joindre et d'expliquer ces programmes en pascal qui fournissent une preuve supplémentaire. Pour le premier cas (tel que défini au §5.1), le programme donne la solution en une douzaine d'heures sur un ordinateur PC/AT-286, les autres cas étant résolus en quelques minutes. — Je tiens à remercier Jean Bénard qui a laissé tourner toute la nuit un ordinateur du département d'enseignement de l'informatique, paliant ainsi aux pauvres moyens dont dispose un chercheur ordinaire d'Orsay.

1er CAS de la preuve du sous-lemme 5·d du §5.1 : *(card E=card F=3)*.

L'ensemble de base est formé des *byte* 1,2,3,4,5,6. R et R' sont représentées par leur matrice m et m1 dont les coefficients affectent les variables *coef_i_j* et *coef1_i_j* avec les conventions suivantes:
m[j,i]=0 et m[i,j]=1 si R|(i,j)=(+,-), m[j,i]=2 et m[i,j]=2 si (i,j) est vide et m[j,i]=3 et m[i,j]=3 si (i,j) est plein.

On aura E={1,2,3} F={4,5,6}, R|(1,2)=R'|(1,2)=R|(4,5)=R'|(5,4)=(+,-), (2,3) et (5,6) vides et (1,3) et (4,6) pleins.

Pour tester si deux matrices sont isomorphes on calcule l'ensemble des *degre* des sommets c'est à dire qu'à chaque sommet on fait correspondre un *byte* qui vaut 13 fois le nombre d'arêtes partantes plus une fois le nombre d'arête arrivantes (avec les coeficients 0,1,2 ou 3) (cette formule n'a d'autre intérêt que de marcher) et on forme le *set* de ces *byte* qui est appelé *caracteristique*. Cette *caracteristique* n'est pas du tout caractéristique du type d'isomorphie d'une relation binaire; d'ailleurs trouver un algorithme permettant de dire si deux graphes sont isomorphes est un problème difficile, c'est pourquoi la procédure *cas_special* vise à

éliminer un cas de non isomorphie non tranché par *caracteristique*.

Entre E et F il y a 3×3=9 arêtes à déterminer pour deux matrices par exploration systématique. Pour minimiser la longueur des boucles nous avons optimisé les début et fin de ces boucles qui a priori valent 0 et 3:

Quand un *coef_i_j* vaut 0 ou 1 le *coef1_i_j* associé vaut 0 ou 1, quand il vaut 3 ou 4 *coef1_i_j* a la même valeur que *coef_i_j*; c'est ces valeurs que donnent les *function debut* et *fin*. Remarquons que, (1,3) étant neutre, si (1,5) change, il en va de même de (3,5), puis (2,3) étant neutre, de (5,2), puis (5,6) étant neutre de (2,6), et de proche en proche nous arrivons à passer en revue toutes les arêtes. Ces nouvelles valeurs des début et fin de boucle sont données par *commence* et *fini*. Quand (1,5) est orienté il ne reste plus du coup que 10 boucles sur les 18 de départ.

Explications complémentaires:

isom teste l'isomorphie de deux matrices sur une partie *e*, la valeur *false* implique la non isomorphie sans que la réciproque soit exacte.

isoouanti teste (avec les mêmes réserves que précédement) l'iso- ou anti-isomorphie de deux matrices sur *e*,

hemi teste de même l'hémimorphie de deux matrices sur *e*, en fait seulement la (-1)- et (-2)-hémimorphie qui suffisent,

dual dualise une matrice,

neutre teste la neutralité des arêtes reliant E à F,

meme_nature teste le fait qu'elles sont toutes pleines ou toutes vides,

intervalle teste si {1,2} et {4,5} sont des intervalles.

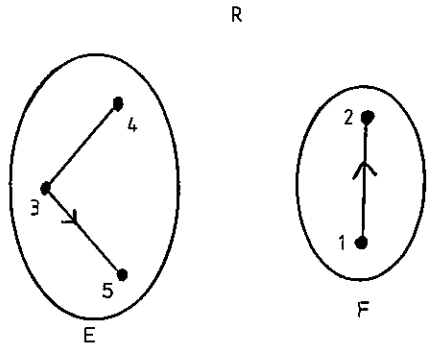
```
type ens=set of byte;
type partie=set of byte;
type matrice=array [1..6,1..6] of byte;

var m,m1:matrice;

coef_1_5,coef_2_4,coef_1_4,coef_2_5,coef1_1_5,
coef1_2_4,coef1_1_4,coef1_2_5,coef_1_6,coef1_1_6,coef_2_6,coef1_2_6,
coef_3_4,coef_3_5,coef_3_6,coef1_3_4,coef1_3_5,coef1_3_6:byte;

function degre(m:matrice;e:partie;i:byte):byte;
var j,jj:byte;
begin
jj:=0;
for j:=1 to 6 do
if (j in e) then jj:=jj +m[j,i] +13*m[i,j];
degre:=jj;
end;

function cas_special:boolean;
begin
cas_special:=((coef_1_5=2)and(coef_2_4=2)and(coef_1_4=3)and(coef_2_5=3))or
((coef_1_5=3)and(coef_2_4=3)and(coef_1_4=2)and(coef_2_5=2));
end;

procedure caracteristique(m:matrice;e:partie; var x:ens);
var j,nv:byte;
    jj:ens;
begin
jj:=[];
for j:=1 to 6 do
        begin
        nv:=degre(m,e,j);
        if (j in e) then jj:=jj+[nv];
        end;
x:=jj;
end;

function isom(m,m1:matrice;e:partie):boolean;{faux==>non isomorphes}
var x,x1:ens;
begin
caracteristique(m,e,x);caracteristique(m1,e,x1);
isom:=(x=x1);
end;

procedure dual(m:matrice;var m1:matrice);
var i,j:byte;
begin
for i:=1 to 6 do
  for j:=1 to 6 do
    m1[i,j]:=m[j,i];
end;

function isoouanti(m,m1:matrice;e:partie):boolean;
var m2:matrice;
begin
dual(m1,m2);
isoouanti:=isom(m,m1,e) or isom(m,m2,e);
end;

function hemi(m,m1:matrice):boolean;
var jj:boolean;
    i,j,k:byte;
begin
hemi:=false;
for i:=1 to 6 do
      for j:=i to 6 do
              if not(isoouanti(m,m1,[1..6]-[i,j])) then exit;
hemi:=true;
end;

function autre(i:byte):byte;
begin
if (i=0) or (i=1) then autre:=1-i
else autre :=i;
end;


function neutre(m:matrice):boolean;
begin
neutre:=
(m[1,4]>1) and (m[1,5]>1) and (m[1,6]>1) and (m[2,4]>1) and (m[2,5]>1)
 and (m[2,6]>1) and (m[3,4]>1) and (m[3,5]>1) and (m[3,6]>1)
end;

function meme_nature:boolean;
begin
meme_nature:=((coef_1_5=coef_1_4)and(coef_1_5=coef_2_4)and(coef_1_5=coef_2_5));
end;

function intervalle:boolean;
begin
intervalle:=(coef_1_6=coef_2_6)and(coef_3_4=coef_3_5)
end;


function debut(i:byte):byte;
begin
if i<2 then debut:=0
else debut:=i;
end;


function fin(i:byte):byte;
begin
if i<2 then fin:=1
else fin:=i;
end;

function fini(m,m1:matrice;x,y,z:byte;i:byte):byte;
begin
```

```
if ((i<2) and (m[x,y]<2)) then begin
                                if m[x,y]=m1[x,y] then fini:=i;
                                if not(m[x,y]=m1[x,y]) then fini:=1-i
                                end
else  fini:=fin(i);
end;


function commence(m,m1:matrice;x,y,z:byte;i:byte):byte;
begin
if ((i<2) and (m[x,y]<2) )then begin
                                if m[x,y]=m1[x,y] then commence:=i;
                                if not(m[x,y]=m1[x,y]) then commence:=1-i
                                end
else  commence:=debut(i);
end;


BEGIN
 m[1,1]:=0 ; m[2,2]:=0;
 m[3,3]:=0 ; m[4,4]:=0;
 m[5,5]:=0 ; m[6,6]:=0;
 m[1,2]:=1 ; m[2,1]:=0;
 m[1,3]:=3 ; m[3,1]:=3;
 m[2,3]:=2 ; m[3,2]:=2;
 m[4,5]:=1 ; m[5,4]:=0;
 m[4,6]:=3 ; m[6,4]:=3;
 m[5,6]:=2 ; m[6,5]:=2;

 m1[1,1]:=0 ; m1[2,2]:=0;
 m1[3,3]:=0 ; m1[4,4]:=0;
 m1[5,5]:=0 ; m1[6,6]:=0;
 m1[1,2]:=1 ; m1[2,1]:=0;
 m1[1,3]:=3 ; m1[3,1]:=3;
 m1[2,3]:=2 ; m1[3,2]:=2;
 m1[4,5]:=0 ; m1[5,4]:=1;
 m1[4,6]:=3 ; m1[6,4]:=3;
 m1[5,6]:=2 ; m1[6,5]:=2;

for coef_1_5:=0 to 3 do
  for coef_2_4:=0 to 3 do
    for coef_1_4:=0 to 3 do
      for coef_2_5:=0 to 3 do
       for coef_1_6:=0 to 3 do
        for coef_2_6:=0 to 3 do
         for coef_3_4:=0 to 3 do
          for coef_3_5:=0 to 3 do
           for coef_3_6 :=0 to 3 do

              begin
                m[1,4]:=coef_1_4;   m[1,5]:=coef_1_5;
                m[1,6]:=coef_1_6;   m[2,4]:=coef_2_4;
                m[2,5]:=coef_2_5;   m[2,6]:=coef_2_6;
                m[3,4]:=coef_3_4;   m[3,5]:=coef_3_5;
                m[3,6]:=coef_3_6;
                m[4,1]:=autre(coef_1_4); m[5,1]:=autre(coef_1_5);
                m[6,1]:=autre(coef_1_6); m[4,2]:=autre(coef_2_4);
                m[5,2]:=autre(coef_2_5); m[6,2]:=autre(coef_2_6);
                m[4,3]:=autre(coef_3_4); m[5,3]:=autre(coef_3_5);
                m[6,3]:=autre(coef_3_6);

for coef1_1_5:=debut(coef_1_5) to fin(coef_1_5) do
 for coef1_3_5:= commence(m,m1,1,5,3,coef_3_5) to fini(m,m1,1,5,3,coef_3_5) do
  for coef1_2_5:=commence(m,m1,3,5,2,coef_2_5) to fini(m,m1,3,5,2,coef_2_5) do
   for coef1_2_6:=commence(m,m1,5,2,6,coef_2_6) to fini(m,m1,5,2,6,coef_2_6) do
    for coef1_3_6:= commence(m,m1,2,6,3,coef_3_6) to fini(m,m1,2,6,3,coef_3_6) do
     for coef1_1_6:=commence(m,m1,6,3,1,coef_1_6) to fini(m,m1,6,3,1,coef_1_6) do
      for coef1_1_4:=commence(m,m1,6,1,4,coef_1_4)to fini(m,m1,6,1,4,coef_1_4) do
       for coef1_3_4:=commence(m,m1,1,4,3,coef_3_4)to fini(m,m1,1,4,3,coef_3_4) do

        for coef1_2_4:=commence(m,m1,3,4,2,coef_2_4)to fini(m,m1,3,4,2,coef_2_4) do


          BEGIN

                m1[1,4]:=coef1_1_4;   m1[1,5]:=coef1_1_5;
                m1[1,6]:=coef1_1_6;   m1[2,4]:=coef1_2_4;
                m1[2,5]:=coef1_2_5;   m1[2,6]:=coef1_2_6;
                m1[3,4]:=coef1_3_4;   m1[3,5]:=coef1_3_5;
                m1[3,6]:=coef1_3_6;

                m1[4,1]:=autre(coef1_1_4); m1[5,1]:=autre(coef1_1_5);
                m1[6,1]:=autre(coef1_1_6); m1[4,2]:=autre(coef1_2_4);
                m1[5,2]:=autre(coef1_2_5); m1[6,2]:=autre(coef1_2_6);
                m1[4,3]:=autre(coef1_3_4); m1[5,3]:=autre(coef1_3_5);
                m1[6,3]:=autre(coef1_3_6);

 if hemi(m,m1) and not(cas_special)  and
        (  not( neutre (m) and intervalle and meme_nature)
             or isoouanti(m,m1,[1..6]) )

 then                 begin
                      writeln('echec');
                      exit
                      end;

          END;

               end;

 writeln('succès');

END.
```

2ème CAS de la preuve du sous-lemme 5·d : *(card E=3 card F=2)*.

Cette fois ci E={3,4,5} et F={1,2} on a R(1,1)=(+) et irréflexivité ailleurs (la réflexivité sur 4 n'a pas d'importance); R|(1,2)=(+,-)= R|(3,5), (4,5) est vide et (3,4) plein.

Les longueurs des boucles sont écourtées par l'observation du fait que la réflexivité sur 1 et l'irréflexivité sur 2,3,5 entrainent la dualisation des arêtes (1,3) et (1,5) si elles sont orientées, lors du passage de R à R'; (3,4) étant neutre (1,4) change aussi. On remarquera que le calcul du *degre* s'est compliqué puisqu'il prend en compte les degrés des sommets adjacents par la première fonction *degre0*. La procédure *intervalle* teste seulement le fait que {3,5} est un 1- et un 2-intervalle ou bien {1,2} un 3- et un 5-intervalle. Sans ces modifications le programme n'aboutit pas.



```
type ens=set of byte;
type partie=set of byte;
type matrice=array [1..5,1..5] of byte;
var he,mi,se,ce:word;


function degre0(m:matrice;e:partie;i:byte):byte;
var j,jj:byte;
begin
jj:=0;
for j:=1 to 5 do
if (j in e) then jj:=jj+((m[j,i]))+13*m[i,j];
degre0:=jj;
end;


function degre(m:matrice;e:partie;i:byte):byte;
var j,jj:byte;
begin
jj:=0;
for j:=1 to 5 do
if (j in e) then jj:=jj+((m[j,i])*degre0(m,e,j));
degre:=jj;
end;


procedure forme(m:matrice;e:partie; var x:ens);
var j:byte;
    jj:ens;
begin
jj:=[];
for j:=1 to 5 do
if (j in e) then jj:=jj+[degre(m,e,j)];
x:=jj;
end;

function isom(m,m1:matrice;e:partie):boolean;{faux==>non isomorphes}
var x,x1:ens;
begin
forme(m,e,x);forme(m1,e,x1);
isom:=(x=x1);
end;

procedure dual(m:matrice;var m1:matrice);
var i,j:byte;
begin
for i:=1 to 5 do
  for j:=1 to 5 do
    m1[i,j]:=m[j,i];
end;

function isoouanti(m,m1:matrice;e:partie):boolean;
var m2:matrice;
begin
dual(m1,m2);
isoouanti:=isom(m,m1,e) or isom(m,m2,e);
end;

function hemi(m,m1:matrice):boolean;
var jj:boolean;
    i,j,k:byte;
begin
jj:=true;
for i:=1 to 5 do
    begin
     if jj=false then begin hemi:=false; exit; end
     else
      for j:=i to 5 do
          jj:=(jj and (isoouanti(m,m1,[1..5]-[i,j])));
    end;
hemi:=jj;
end;

function autre(i:byte):byte;
begin
if (i=0) or (i=1) then autre:=1-i
else autre :=i;
end;


function neutre(m:matrice):boolean;
begin
neutre:=true ;
if ((m[1,4]<2) or (m[1,3]<2) or (m[2,3]<2)
or (m[2,4]<2) or (m[1,5]<2) or (m[2,5]<2)) then neutre:=false;
end;


function debut(i:byte):byte;
begin
if i<2 then debut:=0
else debut:=i;
end;


function fin(i:byte):byte;
begin
if i<2 then fin:=1
else fin:=i;
end;

function fini(m,m1:matrice;x,y,z:byte;i:byte):byte;
begin
if (m[x,y]<2) and (i<2) then begin
                             if m[x,y]=m1[x,y] then fini:=i;
                             if not(m[x,y]=m1[x,y]) then fini:=1-i
                             end
else  fini:=fin(i);
end;
```

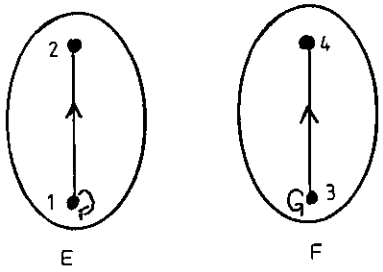
```
function commence(m,m1:matrice;x,y,z:byte;i:byte):byte;
begin
if (m[x,y]<2) and (i<2) then begin
                              if m[x,y]=m1[x,y] then commence:=i;
                              if not(m[x,y]=m1[x,y]) then commence:=1-i
                              end
else  commence:=debut(i);
end;


var m,m1:matrice;

    coef_1_3,coef1_1_3,coef_1_4,coef1_1_4,coef_1_5,coef1_1_5,
    coef_2_3,coef1_2_3,coef_2_4,coef1_2_4,coef_2_5,coef1_2_5    :byte;

function intervalle:boolean;
begin
intervalle:=(((coef_1_3=coef_1_5) and (coef_2_3=coef_2_5)) or
((coef_1_3=coef_2_3) and (coef_1_5=coef_2_5)))
end;

 BEGIN
 writeln;


 m[1,1]:=1 ;  m[1,2]:=1;  m[1,3]:=0; m[1,4]:=0;
 m[2,1]:=0 ;  m[2,2]:=0;  m[2,3]:=0; m[2,4]:=0;
 m[4,1]:=0 ;  m[4,2]:=0;  m[4,3]:=3; m[4,4]:=0;
 m[3,1]:=0 ;  m[3,2]:=0;  m[3,3]:=0; m[3,4]:=3;
 m[3,5]:=1 ;  m[5,3]:=0;  m[5,4]:=2; m[4,5]:=2; m[5,5]:=0;



 m1[1,1]:=1 ;m1[1,2]:=0;m1[1,3]:=0;m1[1,4]:=0;
 m1[2,1]:=1 ;m1[2,2]:=0;m1[2,3]:=0;m1[2,4]:=0;
 m1[3,1]:=0 ;m1[3,2]:=0;m1[3,3]:=0;m1[3,4]:=3;
 m1[4,1]:=0 ;m1[4,2]:=0;m1[4,3]:=3;m1[4,4]:=0;
 m1[3,5]:=1 ;m1[5,3]:=0;m1[5,4]:=2;m1[4,5]:=2; m1[5,5]:=0;

 for coef_1_4:=0 to 3 do
  for coef_2_3:=0 to 3 do
    for coef_1_3:=0 to 3 do
      for coef_2_4:=0 to 3 do
       for coef_1_5:=0 to 3 do
        for coef_2_5:=0 to 3 do
                begin
                  m[1,4]:=coef_1_4;   m[1,3]:=coef_1_3;
                  m[2,4]:=coef_2_4;   m[1,5]:=coef_1_5;
                  m[2,3]:=coef_2_3;   m[2,5]:=coef_2_5;

                  m[4,1]:=autre(coef_1_4);    m[4,2]:=autre(coef_2_4);
                  m[3,2]:=autre(coef_2_3);    m[3,1]:=autre(coef_1_3);
                  m[5,1]:=autre(coef_1_5);    m[5,2]:=autre(coef_2_5);

for coef1_1_4:=autre(coef_1_4)to autre (coef_1_4) do
 for coef1_2_3:=debut(coef_2_3) to fin(coef_2_3) do
```

Deuxième CAS

```
 for coef1_1_3:=autre (coef_1_3) to autre(coef_1_3) do
  for coef1_2_4:=commence(m,m1,2,3,4,coef_2_4) to fini(m,m1,2,3,4,coef_2_4) do
   for coef1_1_5:=autre(coef_1_5) to autre(coef_1_5) do
    for coef1_2_5:=commence(m,m1,2,4,5,coef_2_5) to fini(m,m1,2,4,5,coef_2_5) do

                begin

                m1[1,4]:=coef1_1_4;   m1[2,4]:=coef1_2_4;
                m1[2,3]:=coef1_2_3;   m1[1,3]:=coef1_1_3;
                m1[1,5]:=coef1_1_5;   m1[2,5]:=coef1_2_5;

                m1[4,1]:=autre(coef1_1_4);   m1[3,1]:=autre(coef1_1_3);
                m1[4,2]:=autre(coef1_2_4);   m1[3,2]:=autre(coef1_2_3);
                m1[5,1]:=autre(coef1_1_5);   m1[5,2]:=autre(coef1_2_5);

if hemi(m,m1) and ( not(neutre (m))
   or isoouanti(m,m1,[1..5]) or not(intervalle) )
then begin
                 write('echec')        ;exit;
     end;
                end;
               end;

write(' succès ');

end.
```

3ème CAS de la preuve du sous-lemme 5·d : *(card E=2 card F=2)*.

On a E={1,2}, F={3,4}, R|(1,2)=R|(3,4)=(+,-), il y a réflexivité sur 1 et 3 et pas sur 2 et 4. Comme dans le deuxième cas on observe que (1,4) et (2,3) changent si elles sont orientées. Ce programme est insuffisant pour montrer l'absence d'iso- ou d'anti-isomorphie entre m et m1; mais cette absence est une conséquence facile de la neutralité de R(E,F).



```
type ens=set of byte;
type partie=set of byte;
type matrice=array [1..4,1..4] of byte;


function degre(m:matrice;e:partie;i:byte):byte;
var j,jj:byte;
begin
     jj:=0;
     for j:=1 to 4 do
     if (j in e) then jj:=jj+(m[j,i])+16*(m[i,j]);
     degre:=jj;
end;


procedure forme(m:matrice;e:partie; var x:ens);
var j:byte;
    jj:ens;
begin
     jj:=[];
     for j:=1 to 4 do
     if (j in e) then jj:=jj+[degre(m,e,j)];
     x:=jj;
end;


function isom(m,m1:matrice;e:partie):boolean;(faux==>non isomorphes)
var x,x1:ens;
begin
     forme(m,e,x);forme(m1,e,x1);
     isom:=(x=x1);
end;

procedure dual(m:matrice;var m1:matrice);
var i,j:byte;
begin
     for i:=1 to 4 do
         for j:=1 to 4 do
             m1[i,j]:=m[j,i];
end;


function isoouanti(m,m1:matrice;e:partie):boolean;
var m2:matrice;
begin
     dual(m1,m2);
     isoouanti:=isom(m,m1,e) or isom(m,m2,e);
end;


function hemi(m,m1:matrice):boolean;
var jj:boolean;
    i,j,k:byte;
begin
     jj:=true;
     for i:=1 to 4 do
             jj:=(jj and (isoouanti(m,m1,[1..4]-[i])));
     hemi:=jj;
end;


function autre(i:byte):byte;
begin
     if (i=0) or (i=1) then autre:=1-i
     else autre :=i;
end;


function neutre(m:matrice):boolean;
begin
     neutre:=true ;
     if ((m[1,4]<2) or (m[1,3]<2) or (m[2,3]<2) or (m[2,4]<2)) then
                                                   neutre:=false;
end;


function debut(i:byte):byte;
begin
     if i<2 then debut:=0
     else debut:=i;
end;


function fin(i:byte):byte;
begin
     if i<2 then fin:=1
     else fin:=i;
end;



var m,m1:matrice;

    coef_1_4,coef_2_3,coef_1_3,coef_2_4,coef1_1_4,coef1_2_3,
    coef1_1_3,coef1_2_4:byte;

 BEGIN


 m[1,1]:=1 ;  m[1,2]:=1 ; m[1,3]:=0 ; m[1,4]:=0;
 m[2,1]:=0 ;  m[2,2]:=0 ; m[2,3]:=0 ; m[2,4]:=0;
 m[3,1]:=0 ;  m[3,2]:=0 ; m[3,3]:=1 ; m[3,4]:=1;
 m[4,1]:=0 ;  m[4,2]:=0 ; m[4,3]:=0 ; m[4,4]:=0;

 m1[1,1]:=1 ;m1[1,2]:=1;m1[1,3]:=0;m1[1,4]:=0;
 m1[2,1]:=0 ;m1[2,2]:=0;m1[2,3]:=0;m1[2,4]:=0;
 m1[3,1]:=0 ;m1[3,2]:=0;m1[3,3]:=1;m1[3,4]:=0;
 m1[4,1]:=0 ;m1[4,2]:=0;m1[4,3]:=1;m1[4,4]:=0;

 for coef_1_4:=0 to 3 do
```

```
for coef_2_3:=0 to 3 do
  for coef_1_3:=0 to 3 do
    for coef_2_4:=0 to 3 do
            begin
               m[1,4]:=coef_1_4;   m[1,3]:=coef_1_3;
               m[2,3]:=coef_2_3;   m[2,4]:=coef_2_4;


               m[4,1]:=autre(coef_1_4);   m[3,1]:=autre(coef_1_3);
               m[3,2]:=autre(coef_2_3);   m[4,2]:=autre(coef_2_4);

               for coef1_1_4:=autre(coef_1_4) to autre(coef_1_4) do
                 for coef1_2_3:=autre(coef_2_3) to autre(coef_2_3) do
                   for coef1_1_3:=debut(coef_1_3) to fin(coef_1_3) do
                     for coef1_2_4:=debut(coef_2_4) to fin(coef_2_4) do
                              begin

               m1[1,4]:=coef1_1_4;   m1[1,3]:=coef1_1_3;
               m1[2,3]:=coef1_2_3;   m1[2,4]:=coef1_2_4;

               m1[4,1]:=autre(coef1_1_4);   m1[3,1]:=autre(coef1_1_3);
               m1[3,2]:=autre(coef1_2_3);   m1[4,2]:=autre(coef1_2_4);

               if hemi(m,m1) and (not(neutre (m)) )
               then begin   write('échec');  exit; end;

                              end;

            end;


write('succès');

END.
```

§5.2. POURQUOI DES INTERDITS ?

Le terme d'"interdit" choisi pour désigner les cylindres, cônes et becs est dû à un quiproquo entre les deux auteurs, chacun ayant, lors d'échanges informels, pris ce mot en un sens différent. Heureusement il existe un dieu des mathématiques grâce auquel on peut miraculeusement, quoique hélas très imparfaitement, justifier cette terminologie. C'est ce à quoi sera consacré ce §5.2 par ailleurs inutile à la preuve du théorème de demi-reconstruction mais nécessaire au répertoriage des relations binaires non demi-reconstructibles du §5.3.

Appelons **interdit de non demi-reconstruction** une relation binaire dont toute extension *propre* est demi-reconstructible.

En admettant le non recollement des doubles motifs, le lemme 2 et les lemmes A et C, nous allons prouver que sont des interdits de non demi-reconstruction les "cylindres", "cônes" et "becs" à condition de donner un nouveau sens à ces derniers termes afin qu'ils puissent désigner des relations binaires et non plus, comme jusqu'ici, des birelations (R,R') ou même des quadruplets (R,R',E,F).

Disons donc qu'une relation binaire S est un **cylindre** s'il existe S' hémimorphe à S et des grands motifs A et B dont la réunion est la base de S tels que (S,S',A,B) soit un cylindre au sens habituel défini au §3.1. Définition analogue pour un **cône** ou un **bec**. Idem pour "**allures**" et "**doubles-motifs**".

Le lemme C impose aux cylindres, cônes etc ··· d'être finis.

§5.2.0. Caractérisation des cônes et becs.

PROPOSITION 2·b . Les relations binaires S qui sont des becs sont caractérisées par la propriété suivante: leur base est finie et réunion

d'un grand motif A et d'une paire orientée {x,y} réflexive ou irréflexive et disjointe de A, les arêtes liant x à A étant toutes vides et celles liant *y* à A étant toutes pleines.

PREUVE . On définit S' en dualisant S sur {x,y}, et en conservant S sur les couples autres que ceux extraits de A. B est défini comme étant {x,y,a} pour un *a* quelconque de A. (On aurait aussi bien pu dualiser S|A et conserver S sur les autres couples.) □

PROPOSITION 2·c . Les relations binaires S qui sont des cônes sont caractérisées par la propriété suivante: leur base est réunion d'un grand motif *fini* A et d'un singleton {x} disjoint de A et majorant (ou resp. minorant) A.

PREUVE . Si cette condition est vérifiée on définit S' en, par exemple, conservant S sur A mais en faisant de x un S'-minorant (ou resp. S'-majorant) de A. Le pré-lemme 1·c dit que (S,S') est un cône à condition que S et S' soient hémimorphes. Or *quand A est fini* toute partie propre P de A est autoduale et S|P∪{x} est anti-isomorphe à S'|P∪{x}. □

Cet énoncé comme le précédent ne se maintient pas pour les motifs *infinis*. Ainsi si A est de type ω réflexif et si x, réflexif, en est un S-majorant, il est impossible de trouver un grand motif B sur lequel il pourrait y avoir anti-isomorphie alors qu'il y aurait isomorphie sur A entre S et un S' hémimorphe à S: En effet B est une chaîne donc doit être infinie pour être non auto-duale et par suite de S-type ω; B doit donc contenir une partie infinie de A, l'isomorphie sur A entre S et S' oblige B à contenir une partie de S'-type ω^*, S'|B possédant un S'-minorant x contient aussi un type $1+\omega^*$ et ne peut être un grand motif.

§5.2.1. Caractérisation des cylindres.

Dans une relation binaire appelons **paquet** les parties maximales pour l'inclusion parmi celles vérifiant les deux propriétés suivantes:

(i) elles sont partout réflexives ou partout irréflexives,

(ii) un chemin de flèches lie un sommet quelconque à tout autre sommet.

On convient que les singletons vérifient (ii).

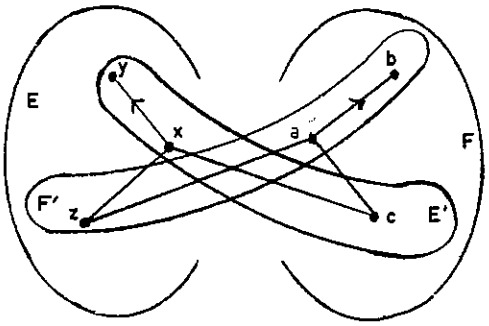
En fait seuls les paquets d'un grand motif nous intéressent:

- dans un grand motif de cardinal 2 les deux singletons sont les deux seuls paquets;
- dans un grand motif non connexe la composante connexe et le singleton restant sont les deux seuls paquets;
- dans un grand motif connexe seul le tout est un paquet.

Mini lemme. Soit (R,R') un cylindre (donc fini) dont la base est réunion disjointe des grands motifs E et F dont l'un est connexe. Alors il n'y a pas d'autre partition de |R| en deux grands motifs reliés par des arêtes neutres que la partition réalisée par E et F.

Vérification immédiate. □

L'exemple suivant montre que la connexité de E ou F doit bien figurer dans l'hypothèse du mini-lemme. Si E={x,y,z} et F={a,b,c} sont non connexes, on peut définir E'={x,y,c} et F'={z,a,b} en plaçant dans E' les extrémités x et y de la flèche de E et l'élément c de F non incident à une flèche, et en prenant pour F' le complément. Si (z,a) et (x,c) sont pleins et (z,b) et (y,c) vides alors (R,R',E',F') est un double motif.



PROPOSITION 2·d . Soit R une relation binaire finie dont la base est réunion disjointe des grands motifs E et F reliés par des arêtes neutres. R est un cylindre si et seulement si pour tout paquet A de E et tout paquet B de F les liens entre A et B sont de même nature.

PREUVE.

Commençons par la condition suffisante. Il suffit de définir R′ comme étant la duale de R pour les couples extraits de F et identique à R pour les autres couples. La condition de l'énoncé montre que R′ est hémimorphe à R qui est donc bien un cylindre.

Voyons maintenant la condition nécessaire. Il existe R′ hémimorphe mais, d'après le lemme de non recollement, non isomorphe ni anti-isomorphe à R. (R,R′) est, d'après le lemme 2, un double motif qui ne peut être qu'un cylindre dont les deux grands motifs, si l'un au moins est connexe, ne peuvent grâce au mini lemme qu'être E et F.

A] plaçons nous dans le cas où au moins un des motifs et connexe et quitte à dualiser R′ supposons qu'il y a isomorphie entre R et R′ sur E et anti-isomorphie sur F c'est à dire que (R,R′,E,F) est un cylindre.

1er cas. E et F sont des grands motifs connexes de cardinal ≥3 la scolie du sous-lemme 4 donne la réponse.

2ème cas. E est non connexe alors que F est connexe de cardinal ≥3. Posons E={x,y,z} avec R|(x,y)=(+,-), (x,z) plein et (y,z) vide. Soit (a,b) une flèche de F. Considérons les deux relations R|{x,y,z,a,b} et R′|{x,y,z,a,b}. Par un iso- ou un anti-isomorphisme de l'une sur l'autre z, qui est le seul sommet à ne pas être extrémité d'une flèche, est conservé. Supposons d'abord que {x,y} et {a,b} soient échangés globalement par un isomorphisme φ. Si φ est un isomorphisme alors $\varphi(x)=b$ et $\varphi(y)=a$. Par suite (z,a) est vide et (z,b) plein. $\varphi(b)$ ne pourrait alors être que x et $\varphi(a)$ devrait être y. Une contradiction naît du fait que $R|(a,b)\neq R|(y,x)$. Raisonnement semblable pour un anti-isomorphisme. Supposons maintenant que {x,y} et {a,b} soient chacun conservés. Sur {x,y,z} seul un isomorphisme est possible. Cet isomorphisme échange a et b. Les arêtes (z,a) et (z,b)

sont donc de même nature. De proche en proche on montre que F est un z-intervalle. De même (x,a) et (x,b) sont de même nature ainsi que (y,a) et (y,b). F est donc un x- et aussi un y-intervalle. Montrons qu'il est de même nature par rapport à x que par rapport à y. Si tel n'était pas le cas on aurait par exemple (x,f) plein et (y,f) vide pour tout f de F. Alors (R,R') restreint à $\{x,y\}\cup F$ serait un bec ce qui est contraire au non-recollement des becs.

$3^{\text{ème}}$ cas. E est de cardinal 2 et F est connexe. Le raisonnement est semblable au précédent. Posons $E=\{x,y\}$ avec $R|(x,y)=(+,-)$, réflexivité en x et pas en y. Supposons F entièrement irréflexif (on sait que les grands motifs connexes de card ≥ 3 sont entièrement irréflexifs ou entièrement réflexifs). Soit (a,b) une flèche de F. Considérons les deux relations $R|\{x,y,a,b\}$ et $R'|\{x,y,a,b\}$. Par un iso- ou un anti-isomorphisme de l'une sur l'autre, x, qui est le seul sommet réflexif, est conservé. Par suite $\{x,y\}$ et $\{a,b\}$ sont chacun conservés. Sur $\{x,y\}$ seul un isomorphisme est possible. Cet isomorphisme échange a et b. Les arêtes (x,a) et (x,b) sont donc de même nature ainsi que (y,a) et (y,b). De proche en proche l'énoncé est démontré.

Les autres cas où E ou F est de cardinal 2 seront vus avec le B].

B] Quand E et F sont non connexes (donc de cardinal 3) ou de cardinal 2. Si E et F sont de cardinal 3 et si (R,R',E,F) est un cylindre, les paquets de E' et F' qui sont des singletons ne sont liés au reste de la base que par des arêtes neutres, ce sont donc les paquets de E et F qui sont des singletons; De même les flèches qui sont des paquets de E' ou F' sont celles de E ou F qui sont des paquets. De même si E ou F est de cardinal 2. La scolie du sous-lemme 5 donne alors la condition nécessaire. □

Relevons qu'un motif ne contient ni cylindre ni cône ni bec ni allure.

On peut maintenant démontrer les propositions suivantes:

§5.2.2.

PROPOSITION 2'. Deux relations binaires qui sont des doubles motifs ne peuvent être imbriquées (i.e. l'une proprement incluse dans l'autre).

PREUVE. Soit par exemple (S,S',A,B) un cylindre et R une extension propre de S qui est encore un cylindre c'est à dire que (R,R') est un cylindre, en tant que bi-relation, pour un certain R' hémimorphe à R. D'après le non recollement des cylindres R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes. Supposons encore que R et R' sont, par exemple, isomorphes sur A. R et R' n'étant ni iso- ni anti-isomorphes, il existe un motif H sur lequel R et R' ne sont pas isomorphes. H ne peut être identique à |R| car aucun motif ne contient de cylindre. Il y a donc anti-isomorphie sur H. R non demi-reconstructible doit être fini et H aussi, prenons H minimal pour l'inclusion (lemme 00). (R|A∪H,R'|A∪H,A,H) est donc un double motif. Le lemme de recollement empêche toute iso- ou anti-isomorphie entre R|A∪H et R'|A∪H si A∪H⊊|R|, et oblige donc A∪H à être toute la base de R. Par suite B est inclus dans H. L'incomparabilité entre grands motifs permet de conclure que H=B ce qui prouve que (R|A∪B,R'|A∪B,A,B) est un cylindre. Le non recollement des cylindres (en tant que birelations) permet de conclure que A∪B=|R| contrairement à l'hypothèse. De même pour les cônes et les becs. □

PROPOSITION 2'·d . Les cylindres sont des interdits de non demi-reconstruction.

PREUVE . Soit S une relation binaire de base A∪B où A et B sont des grands motifs disjoints et où les liens entre A et B sont neutres (ce sont en fait les seules hypothèses nécessaires). Considérons une extension propre non demi-reconstructible R de S. Cela veut dire qu'il existe R' hémimorphe à R et pourtant ni isomorphe ni anti-isomorphe à R. (R,R') est donc un double motif d'après le lemme A" puisqu'un motif ne peut contenir de cylindre. R

est alors un cylindre ou un cône ou un bec ou une allure et on assiste à une imbrication de doubles motifs dont on a vu qu'elle est irréalisable. □

Les notions de cylindre, cône etc ··· sont conservés par hémimorphie car si par exemple R' est hémimorphe à un cylindre R, soit il lui est iso- ou anti-isomorphe et est encore un cylindre, soit il est non demi-reconstructible, par suite est un double motif donc un cylindre.

Une démonstration tout à fait analogue au cas des cylindres se fait pour les cônes, les becs ou les allures:

PROPOSITION 2'·c . Les cônes sont des interdits de non demi-reconstruction.

PROPOSITION 2'·b . Les becs sont des interdits de non demi-reconstruction.

PROPOSITION 2'·a . Les allures sont des interdits de non demi-reconstruction.

Parmi les interdits de non demi-reconstruction il y a donc les cylindres (interdits de première espèce), les cônes (deuxième espèce), les becs (3ème espèce) les allures et bien d'autres ...

Des interdits de non demi-reconstruction peuvent être imbriqués. Ainsi soit R, sans boucle, défini sur $E \cup F$ où F est un grand motif et où $E=\{x,y,z\}$ disjoint de F est de type D_{18} avec $R|(x,y)=(+,-)$, F étant lié à x par des arêtes pleines et à y par des vides; alors $R|E \cup F$ est un interdit de non demi-reconstruction mais $R|F \cup \{x,y\}$ est un bec. Par contre on a vu qu'il ne peut y avoir imbrication entre cylindres, cônes, becs et allures.

On vient de voir que les doubles motifs sont des interdits de non demi-reconstruction. Complétons ce résultat:

PROPOSITION 2·1 . Les relations binaires qui sont des doubles motifs sont des interdits de non demi-reconstruction qui sont non demi-reconstructibles.

PREUVE . Dans les propositions 2·b, 2·d et 2·c on a montré que les relations binaires R qui sont des cylindres, des cônes ou des becs étaient non demi-reconstructibles en construisant des relations R' hémimorphes à R mais, d'après le lemme de non recollement, ni iso- ni anti-isomorphes à R. Or le lemme 2 montre que les relations binaires R qui sont des doubles motifs sont soit des cylindres, soit des cônes, soit des becs, soit d'une des sept allures (α) à (ζ). Or dans ce dernier cas la non demi-reconstructibilité est visible dès la définition. □

La relation suivante est un interdit de non demi-reconstruction même minimal mais est pourtant demi-reconstructible: E et F disjoints sont de type D_7, les éléments maximaux de E et de F sont reliés par une arête pleine, toutes les autres arêtes reliant E à F sont vides.

Situation analogue dans les problèmes de reconstruction: {a,b,c} formé de 3 arêtes neutres est un interdit de non reconstruction minimal (voir §5.2.3) mais est reconstructible, c'est aussi un interdit de non demi-reconstruction qui n'est ni un cylindre ni un bec ni un cône etc ...

PROPOSITION 2.2. Les relations binaires non demi-reconstructibles sont des motifs ou des interdits de non demi-reconstruction.

PREUVE. Les relations non demi-reconstructibles qui ne sont pas des motifs sont des doubles motifs donc soit des cylindres, des cônes, des becs ou des allures. □

REMARQUE. Expliquons en quoi ce résultat n'est pas évident a priori. Soit S une relation binaire non demi-reconstructible et R une extension propre de S. Si R n'est pas demi-reconstructible alors elle est soit un motif soit première composante d'un double motif (R,R') et dans ce cas $R||S|$ et $R'||S|$ sont iso- ou anti-isomorphes. Mais rien n'empêche a priori qu'un S' de même base que S puisse lui être hémimorphe mais pas iso- ni anti-isomorphe. On retrouvera la même problématique à propos des voisinages.

§5.2.3.

Appelons **interdit de non reconstruction** une relation binaire dont toute extension *propre* est reconstructible.

Appelons **interdit de classe d'hypomorphie non lopezienne** une relation binaire dont aucune extension *propre* n'est une classe d'hypomorphie non lopezienne.

PROPOSITION. Pour les relations binaires *réflexives* on a l'implication:

Interdit de non reconstruction $\Leftarrow$ Interdit de classe d'hypomorphie non lopezienne.

Plus précisément, on a, pour les relations binaires *réflexives*, l'équivalence:

Interdit de non reconstruction $\Leftrightarrow$ Interdit dans une classe d'hypomorphie non lopezienne autre que V_7, S_3 ou S'_3.

PREUVE.

$\Leftarrow$. Si une relation binaire R est un interdit de classe d'hypomorphie toute extension propre S est autre chose qu'une classe d'hypomorphie, on veut montrer que S est reconstructible. C'est justement ce qu'affirme le mini-lemme *(xviii)* quand le cardinal de S est fini ≥ 4. L'énoncé est trivial pour les autres valeurs finies du cardinal de S puisqu'il n'y a pas d'interdit de non reconstruction ni de classe d'hypomorphie qui soit réflexif et de cardinal 2. Vérification directe pour les relations infinies.

$\Rightarrow$. On se sert des résultats du §7. Il faut montrer que toute partie propre d'une classe d'hypomorphie non lopezienne reconstructible autre que V_7, S_3 ou S'_3 est incluse dans une classe d'hypomorphie non reconstructible. C'est vrai puisque C_5 est bien inclus dans D_{20} et que les voisinages de cardinal 4 sont inclus dans D_{14}, D'_{14}, D_{22} ou D'_{22}. □

Par contre V_6 n'est inclus que dans la classe d'hypomorphie V_7 qui est reconstructible; ce qui explique qu'il soit un interdit de non reconstruction mais pas un interdit de classe d'hypomorphie non lopezienne, tout comme X_5, D_{17} et D_{24}.

Dans l'hypothèse, le terme "réflexives" est nécessaire. En effet D_{26} est un interdit de classe d'hypomorphie et pas de non reconstruction (il est inclus dans $\overline{D}_8$). Mais seuls les types irréflexifs de cardinal 2 sont dans cette situation.

Cette équivalence explique le quiproquo entre les deux auteurs puisque l'échange portait précisément sur ces relations réflexives et que V_7, S_3 et S'_3 étaient alors inconnus. Quiproquo fructueux s'il en est, puisque c'est en croyant que G. Lopez parlait d'interdits de non reconstruction que j'ai pensé à introduire des interdits de non demi-reconstruction, les interdits de classes d'hypomorphie, eux, ne se prêtaient guère à des adaptations...

Anticipons encore sur le §7. Le lemme de restriction (§7.5) dit que les restrictions propres d'une classe d'hypomorphie non lopezienne (de cardinal assez grand) seront des *voisinages*. Une conséquence de ce lemme sera que les "interdits de classe d'hypomorphie non lopezienne" autres que V_7, S_3 ou S'_3 ne pourront (quel que soit leur cardinal, même ≤ 3) être des voisinages, cette notion de "voisinage" étant donc en queque sorte l'antinomique de celle d'"interdit". L'article [3] qui démontre la Fraïssé-reconstructibilité des relations binaires finies est axé sur les interdits de classes d'hypomorphie (sans que ceux-ci fassent l'objet d'une définition formelle); alors que dans le présent article, le §7 qui redémontre cette reconstructibilité mettra l'accent sur la notion de voisinage. Ce dernier concept brille à mes yeux par son attrait esthétique tout particulier puisqu'il est en même temps une généralisation de la notion de voisinage d'une chaîne au sens de Fraïssé: raisonner sur les voisinages revient finalement à démêler ce qui était confondu dans le cas des chaînes!

Le lecteur constatera que les relations S_3, S'_3 et V_7 jouent un rôle assez particulier, qui explique qu'elles aient longtemps échappé (tout comme V_6) à la sagacité des deux auteurs, lesquels, pour avoir commis indépendamment les mêmes erreurs, ont mis des années à les isoler. En fait ces trois relations ne sont pas interdites (dans une classe d'hypomorphie non lopezienne) pour les mêmes raisons que les interdits qui sont des déformés: la relation D_{20}, par exemple, doit, dans une classe d'hypomorphie, se dualiser par passage à une hypomorphe alors qu'elle n'est pas autoduale; la structure même de D_{20} en fait donc un interdit. Au contraire, rien dans la structure de V_7, S_3 ou S'_3 ne permet de prévoir qu'il va s'agir d'interdits, ce sont des interdits fortuits. Seuls sont en fait pertinents les interdits qui ne sont pas des voisinages. Pour ceux là, il y bien, avec l'hypothèse de réflexivité, équivalence entre les deux sortes d'interdits: de non reconstruction ou de classe d'hypomorphie non lopezienne. Toutes ces complications me font préférer la notion de voisinage à celle d'interdit.

Concluons donc par la formulation suivante:

PROPOSITION. Pour les relations binaires réflexives qui ne sont pas des voisinages on a l'équivalence:

Interdit de non reconstruction $\Leftrightarrow$ Interdit dans une classe d'hypomorphie non lopezienne.

§5.3. RÉPERTORIAGE DES TYPES DE RELATIONS BINAIRES NON DEMI RECONSTRUCTIBLES.

On a donc maintenant une description complète des relations binaires non demi-reconstructibles qui sont des cylindres, des cônes ou des becs (resteront les allures). On peut d'ailleurs comptabiliser les types :

Relevons qu'il y a deux types de grands motifs de card 2, et huit types non connexes de cardinal 3 compte tenu du fait que les extrémités de la flèche doivent avoir le même statut de réflexivité.

§5.3.1. Cas des cylindres.

Pour les cylindres dont les arêtes neutres liant les deux grands motifs sont de même nature on a 46 grands motifs possibles. Soit $45\times46/2+46$ appariements possibles à multiplier par 2 car les liens peuvent être vides ou pleins. Soit donc $46\times47=2162$ types

Pour les cylindres *n'entrant pas dans le cadre précédent*:

Si E est de type D_{18} et F connexe de card≥3, E={x,y,z}, {x,y} et {z} (avec les notations habituelles) forment chacun un paquet. Pour chacun des 36 types de grands motifs connexes F de card ≥3, soit F est un z-intervalle plein et un x-intervalle vide soit le contraire; soit 72 possibilités à multiplier par les 8 motifs de type D_{18} ou variante; donc 576 types.

Si E est de type D_{26} ou variante et F connexe de card ≥3. Il y a 36 types possibles pour F à associer à deux paquets par (+,+) à l'un et (-,-) à l'autre soit $36\times2\times2=144$ types

Si E et F sont de type D_{18} ou variante ($8\times7/2+8=36$ combinaisons) avec à chaque fois deux paires de paquets à associer par des arêtes pleines ou vides. Donc 2^4 possibilités d'association auxquelles il faut enlever les 2 entrant dans le cadre des cylindres tout pleins ou tout vides déjà comptés, soit $14\times36=504$ types.

Si E est de type D_{18} ou variante et F de type D_{26} ou variante (8×2 combinaisons) il y a encore à chaque fois 14 possibilités soit $14\times16=224$ types.

Si E et F sont de types D_{26} il y a 3 appariements possibles qu'on peut relier chacun de 14 façons différentes non déjà comptabilisées soit $3\times14=42$ types.

On a donc compté 3076 types cylindriques non demi-reconstructibles.

§5.3.2. Cas des cônes et des becs.

Pour les cônes l'extremum pouvant être majorant ou minorant et réflexif ou pas on a $4\times46=184$ types.

Pour les becs ce nombre est le même, car outre la prise en compte de la réflexivité, il faut différencier le sommet où sont accrochés les arêtes vides de celui où sont accrochés le arêtes pleines; soit encore 184 types.

Finalement 3444 types non demi-reconstructibles parmi les cylindres, cônes et becs.

§5.3.3. Cas des allures et des motifs.

Plutôt que de m'obstiner en raisonnements maniaques sur des ensembles à 3 ou 4 éléments j'ai finalement opté pour l'utilisation d'un ordinateur afin

de répertorier tous les types de chaque allure. L'algorithme ne fait qu'éliminer dans chaque allure les paires de relations non hémimorphes. Celles restant sont manifestement hémimorphes. Voir les programmes utilisés à l'annexe suivante.

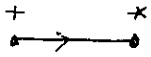
LISTE DES ALLURES ET MOTIFS NON DEMI RECONSTRUCTIBLES.

Utilisons les conventions graphiques suivantes en plus des anciennes. Les sommets affectés d'un même signe + , * , - ou # ont même statut de réflexivité, ceux affectés du signe "-" ont un statut opposé à ceux affectés du signe "+" . Les arêtes en pointillé sont, indépendamment les unes des autres, pleines ou vides

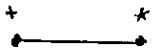
MOTIFS NON DEMI RECONSTRUCTIBLES

Nombre de types y compris les variantes :

4

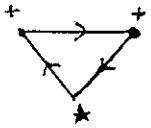


4

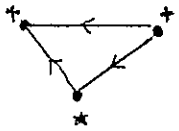


4

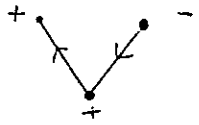
2



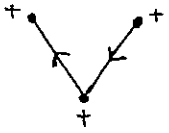
4



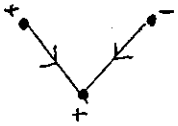
4



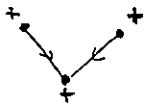
2 (réflexivité) × 2 (plein,vide) × 2 (dualité) = 8



2 (réflexivité) × 2 (plein,vide) = 4



2 (réflexivité) × 2 (plein,vide) × 2 (dualité) = 8

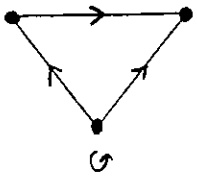


2 (réflexivité) × 2 (plein,vide) × 2 (dualité) = 8

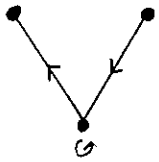
$D_{13}^{(')}, D_{11}^{(')}$ × 2 (réflexivité) = 8

Soit 58 motifs non demi-reconstructibles.

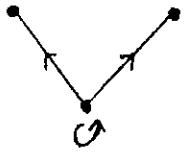
ALLURES ALPHA:



x 2 (réflexivité) x 2 (dualité) = 4



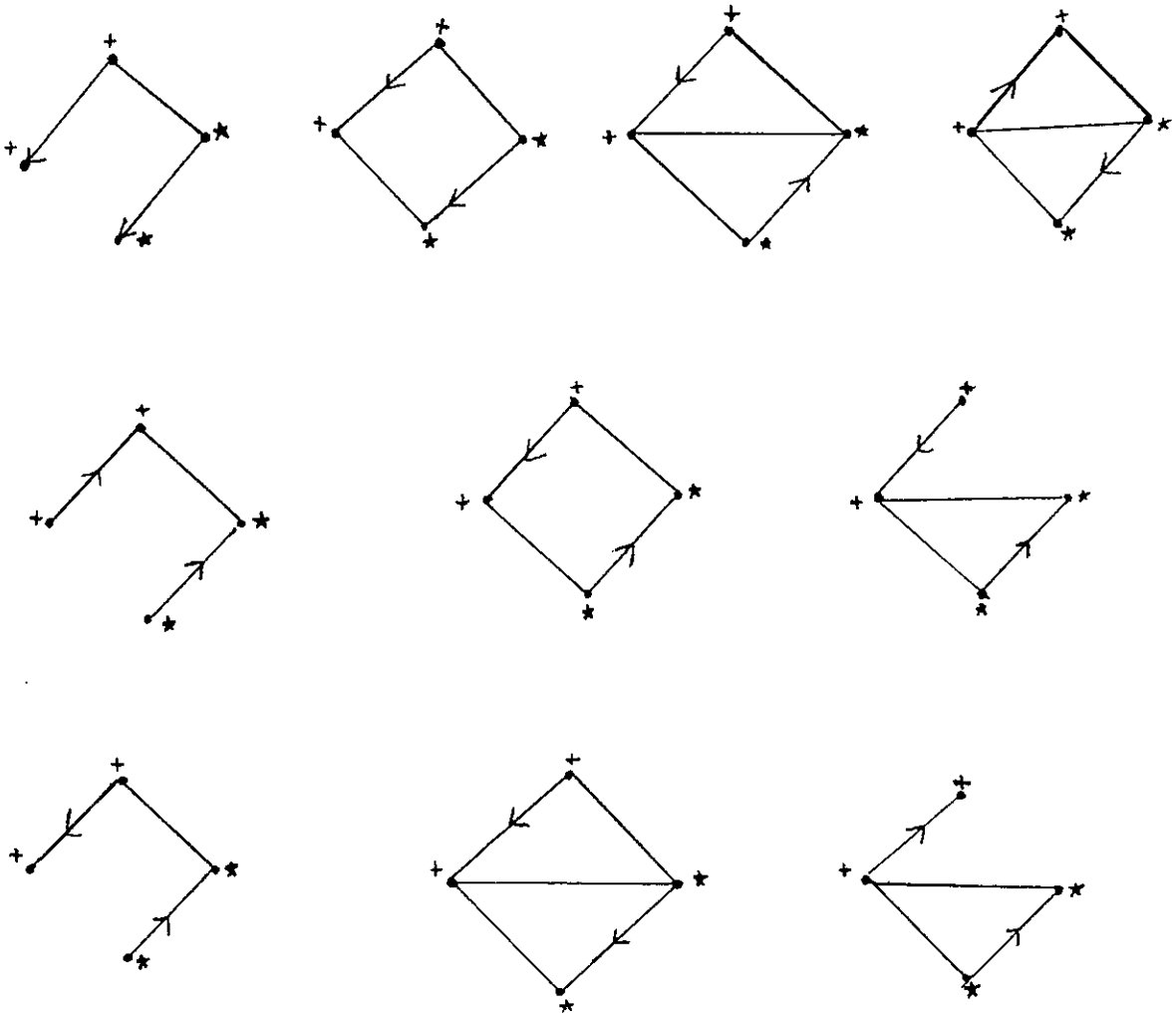
x 2 (réflexivité) x 2 (plein,vide) = 4



x 2 (réflexivité) x 2 (plein,vide) x 2 (dualité) = 8

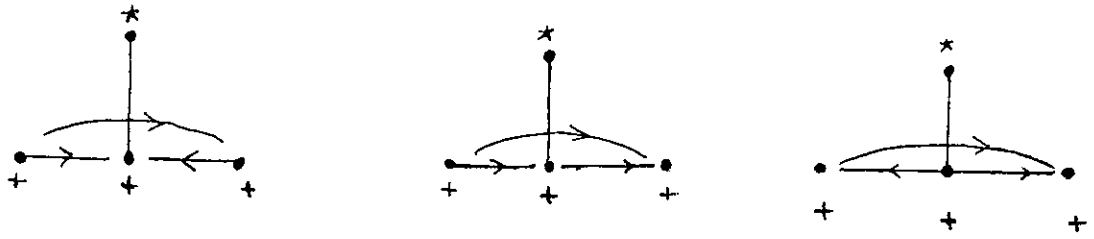
16 types (α) non motifs.

ALLURES BÊTA:



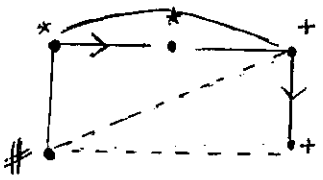
40 types (β)

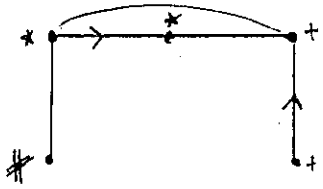
ALLURES GAMMA

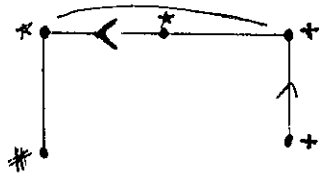


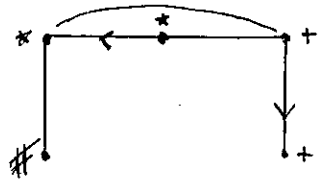
3 cas × 4 (réflexivité) × 2 (plein,vide) = 24 types (γ).

ALLURES DELTA



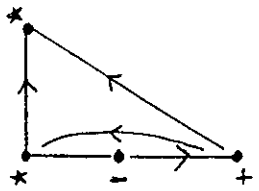


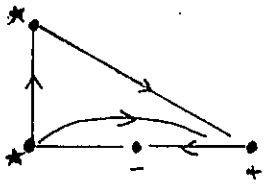




4 cas × 8 (réflexivité) × 4 (plein,vide) = 128 types (δ).

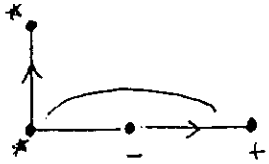
ALLURES ZÉTA

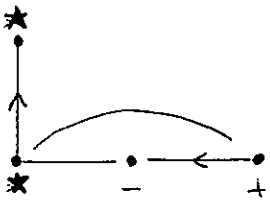




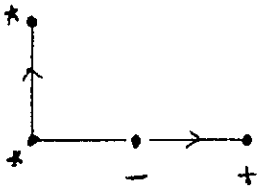
$\in(\zeta)$

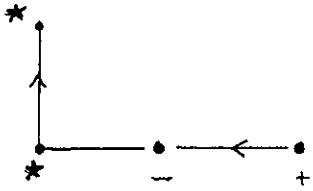
$\in(\zeta)\cap(\eta)$ si "*" = "–"



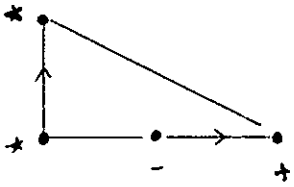


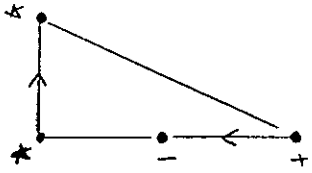
$\in(\zeta)\cap(\text{bec})$



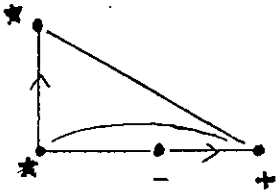


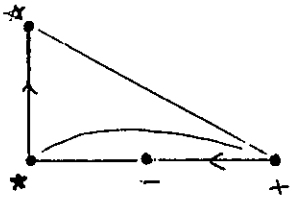
$\in(\zeta)$





$\in(\zeta)$

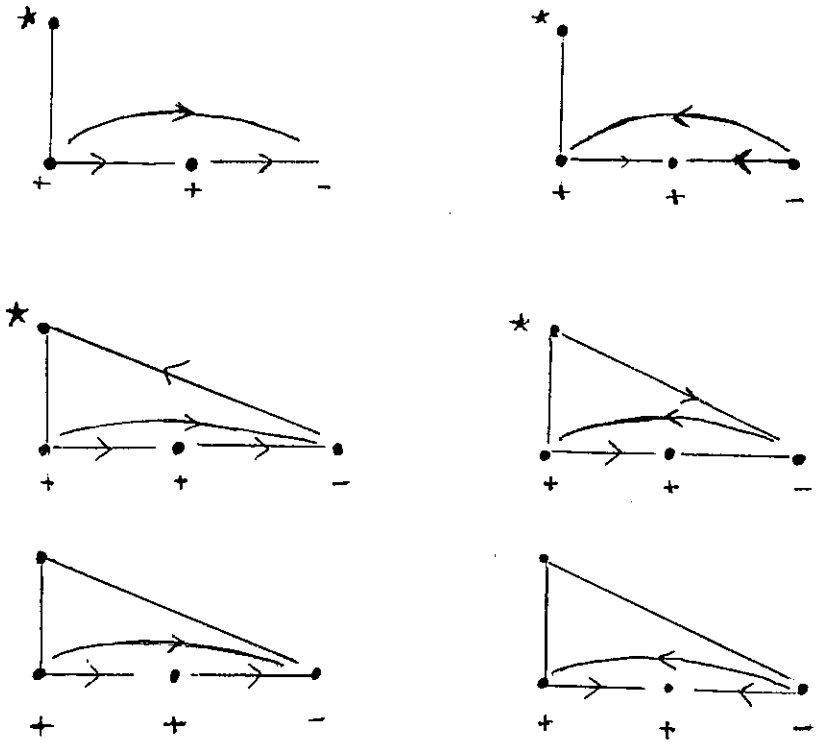




$\in(\zeta)$

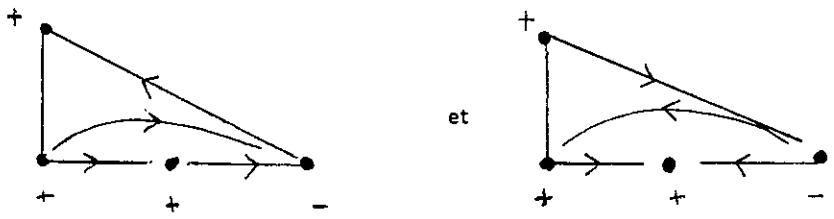
8 cas x 4 (réflexivité) x 2 (dualité) $\doteq$ 64 cas (ζ) non becs dont 8 déjà dans (η).

ALLURES ÉTA



6 cas × 4 (réflexivité) × 2 (dualité)= 48 types (η) non cônes.

Les deux types



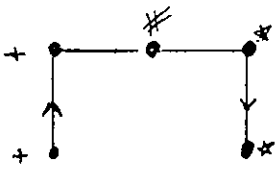
sont comptés deux fois car dans $(\zeta)\cap(\eta)$

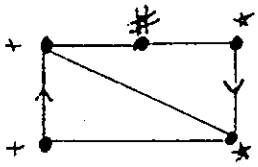
× 2 (dualité) × 2 (réflexivité) =-8

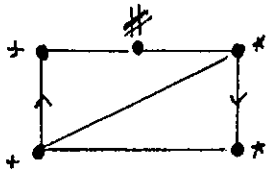
soit 40 types (η) non cônes et non (ζ).

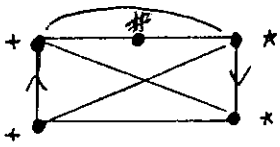
ALLURES EPSILON

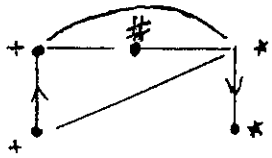
R

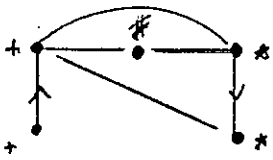




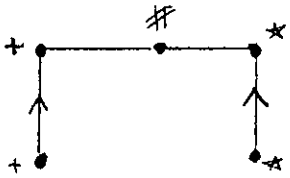


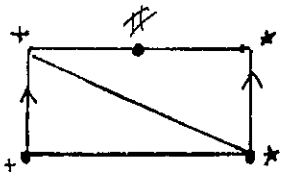


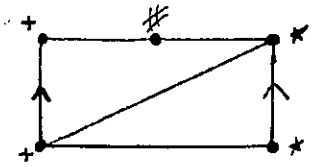


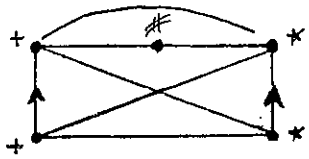


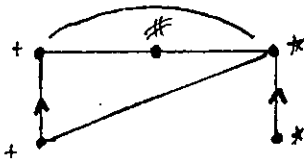
R'

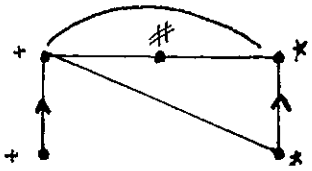




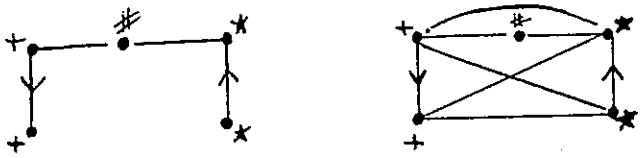








Mais les deux types suivants sont autoduaux et donc comptés deux fois dans (ε):



Soit 12 cas x 8 (réflexivité) x 2 (dualité sur E) = 192 types (ε)
- 16 types comptés deux fois

176 types (ε)

Conclusion

On a donc trouvé les relations non demi-reconstructibles suivantes:

58 types de motifs non demi-reconstructibles

16 types (α) non motifs

40 types (β)

24 types (γ)

128 types (δ)

64 types (ζ)

40 types (η) non (ζ) et non cônes

176 types (ε).

Ce qui fait

546 types non demi-reconstructibles d'aucune des 3 espèces: cylindres, cônes ou becs.

Soit finalement *3990 types non demi-reconstructibles!* Je ne garantis pas ce chiffre car je n'ai pas eu le courage de vérifier que tous les types trouvés étaient deux à deux non isomorphes.

ANNEXE au §5.3

Je donne les programmes principaux DELTA, EPSILON, ZETA utilisés au §5.3 pour déterminer la liste des allures *delta*, *epsilon* et *zéta* non demi-reconstructibles; pour DELTA et EPSILON les procédures et fonctions sont les mêmes que pour le programme DEUXIEME CAS (card E=3 card F=2) qui se trouve en annexe du §5.1 p. 128, et pour ZETA ces procédures sont les mêmes que pour le programme TROISIEME CAS (card E= card F=2) p. 132; mais les fonctions *neutre*, *intervalle*, *commence* et *fini* ne servent jamais.

L'allure (η) se traite de même. Les allures (α) (β) (γ) se traitent à la main.

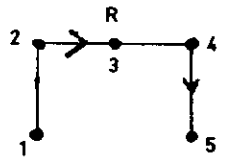
Les programmes DELTA et EPSILON montrent en même temps la non isomorphie et la non anti-isomorphie de R et R' pour les allures (δ) et (ε) affirmées au §5.0.

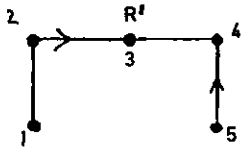
Chaque figure représente les relations R et R' telles qu'elles sont codées dans le programme.

```
 BEGIN

 m[1,1]:=0 ; m[2,2]:=0;
 m[3,3]:=0 ; m[4,4]:=0;
 m[5,5]:=0 ;
 m[1,2]:=3 ; m[2,1]:=3;
 m[1,3]:=2 ; m[3,1]:=2;
 m[2,3]:=1 ; m[3,2]:=0;
 m[4,5]:=1 ; m[5,4]:=0;
 m[3,4]:=3 ; m[4,3]:=3;
 m[3,5]:=2 ; m[5,3]:=2;

 m1[1,1]:=0 ; m1[2,2]:=0;
 m1[3,3]:=0 ; m1[4,4]:=0;
 m1[5,5]:=0 ;
 m1[1,2]:=3 ; m1[2,1]:=3;
 m1[1,3]:=2 ; m1[3,1]:=2;
 m1[2,3]:=1 ; m1[3,2]:=0;
 m1[4,5]:=0 ; m1[5,4]:=1;
 m1[3,4]:=3 ; m1[4,3]:=3;
 m1[3,5]:=2 ; m1[5,3]:=2;

for coef_1_5:=0 to 3 do
  for coef_2_4:=0 to 3 do
    for coef_1_4:=0 to 3 do
      for coef_2_5:=0 to 3 do

              begin
                m[1,4]:=coef_1_4;m[4,1]:=autre(coef_1_4);
                m[1,5]:=coef_1_5;m[5,1]:=autre(coef_1_5);
                m[2,4]:=coef_2_4;m[4,2]:=autre(coef_2_4);
                m[2,5]:=coef_2_5;m[5,2]:=autre(coef_2_5);

for coef1_1_5:=debut(coef_1_5) to fin(coef_1_5) do
 for coef1_1_4:=debut(coef_1_4) to fin(coef_1_4) do
   for coef1_2_5:=debut(coef_2_5) to fin(coef_2_5) do
     for coef1_2_4:=debut(coef_2_4) to fin(coef_2_4) do


          BEGIN
                m1[1,4]:=coef1_1_4;m1[4,1]:=autre(coef1_1_4);
                m1[1,5]:=coef1_1_5;m1[5,1]:=autre(coef1_1_5);
                m1[2,4]:=coef1_2_4;m1[4,2]:=autre(coef1_2_4);
                m1[2,5]:=coef1_2_5;m1[5,2]:=autre(coef1_2_5);

 if (hemi(m,m1) and ((m[2,4]<>3)     {[2,4] doit etre plein }
                    or (m[2,5]<>2)   {[2,5] doit etre vide  }
                    or (m[1,4]<2)    {[1,4] doit etre neutre}
                    or (m[1,5]<2 )))  {[1,5] doit etre neutre}

                    then begin
                         write('echec');
                         exit;
                         end;
 if (hemi(m,m1) and isoouanti(m,m1,[1,2,3,4,5]))
```

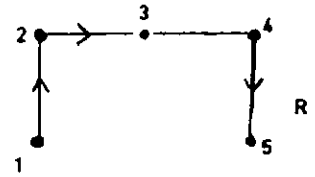
DELTA

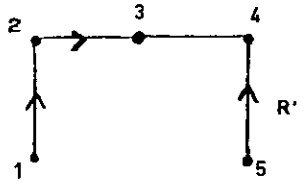
```
                    then begin
                         write ('R et R' iso- ou a nti-isomorphes');
                         exit;
                         end;

          END;
               end;

 writeln('reussite  --  R et R' ni iso- ni anti-isomorphes');
 readln;
END.
```



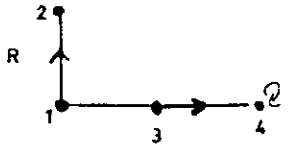


```
BEGIN

m[1,1]:=0 ; m[2,2]:=0;
m[3,3]:=0 ; m[4,4]:=0;
m[5,5]:=0 ;
m[1,2]:=1 ; m[2,1]:=0;
m[1,3]:=2 ; m[3,1]:=2;
m[2,3]:=3 ; m[3,2]:=3;
m[4,5]:=1 ; m[5,4]:=0;
m[3,4]:=3 ; m[4,3]:=3;
m[3,5]:=2 ; m[5,3]:=2;

m1[1,1]:=0 ; m1[2,2]:=0;
m1[3,3]:=0 ; m1[4,4]:=0;
m1[5,5]:=0 ;
m1[1,2]:=1 ; m1[2,1]:=0;
m1[1,3]:=2 ; m1[3,1]:=2;
m1[2,3]:=3 ; m1[3,2]:=3;
m1[4,5]:=0 ; m1[5,4]:=1;
m1[3,4]:=3 ; m1[4,3]:=3;
m1[3,5]:=2 ; m1[5,3]:=2;

for coef_1_5:=0 to 3 do
  for coef_2_4:=0 to 3 do
    for coef_1_4:=0 to 3 do
      for coef_2_5:=0 to 3 do

              begin
                m[1,4]:=coef_1_4;m[4,1]:=autre(coef_1_4);
                m[1,5]:=coef_1_5;m[5,1]:=autre(coef_1_5);
                m[2,4]:=coef_2_4;m[4,2]:=autre(coef_2_4);
                m[2,5]:=coef_2_5;m[5,2]:=autre(coef_2_5);

for coef1_1_5:=debut(coef_1_5) to fin(coef_1_5) do
 for coef1_1_4:=debut(coef_1_4) to fin(coef_1_4) do
   for coef1_2_5:=debut(coef_2_5) to fin(coef_2_5) do
     for coef1_2_4:=debut(coef_2_4) to fin(coef_2_4) do


          BEGIN
                m1[1,4]:=coef1_1_4;m1[4,1]:=autre(coef1_1_4);
                m1[1,5]:=coef1_1_5;m1[5,1]:=autre(coef1_1_5);
                m1[2,4]:=coef1_2_4;m1[4,2]:=autre(coef1_2_4);
                m1[2,5]:=coef1_2_5;m1[5,2]:=autre(coef1_2_5);

 if (hemi(m,m1) and ((m[2,4]<>2) or
                   (m[1,5]<2) or
                   (m[2,5]<2) or
                   (m[1,4]<2 )))
                   then begin for ii :=1 to 5 do begin
                                  writeln;
                                   for jj:=1 to 5 do
                                    write (m[ii,jj]);
                                   write('    ');
                                   for jj:=1 to 5 do
                                    write (m1[ii,jj]);
                                   end;
                          readln;
                          end;

 if (hemi(m,m1) and isoouanti(m,m1,[1,2,3,4,5]))
                          then begin
                               write('R et R'' iso- ou anti-isomorphes');
                               exit;
                               end;

          END;
               end;

 writeln('fini --  R et R'' non iso- ni anti-isomorphes');
 readln;
END.
```





```
BEGIN

m[1,1]:=0 ; m[2,2]:=0; m[3,3]:=0 ; m[4,4]:=1;
m[1,2]:=1 ; m[2,1]:=0; m[1,3]:=3 ; m[3,1]:=3;
m[2,3]:=2 ; m[3,2]:=2; m[3,4]:=1 ; m[4,3]:=0;

m1[1,1]:=0 ; m1[2,2]:=0; m1[3,3]:=0 ; m1[4,4]:=1;
m1[1,2]:=1 ; m1[2,1]:=0; m1[1,3]:=3 ; m1[3,1]:=3;
m1[2,3]:=2 ; m1[3,2]:=2; m1[3,4]:=0 ; m1[4,3]:=1;

 for coef_2_4:=0 to 3 do
   for coef_1_4:=0 to 3 do

              begin
                m[1,4]:=coef_1_4; m[4,1]:=autre(coef_1_4);
                m[2,4]:=coef_2_4; m[4,2]:=autre(coef_2_4);

     for coef1_1_4:=debut(coef_1_4) to fin(coef_1_4) do
       for coef1_2_4:=debut(coef_2_4) to fin(coef_2_4) do

          BEGIN
                m1[1,4]:=coef1_1_4; m1[4,1]:=autre(coef1_1_4);
                m1[2,4]:=coef1_2_4; m1[4,2]:=autre(coef1_2_4);

 if (hemi(m,m1) and (((m[2,4]<2) or (m[1,4]<2)) { [1,4] et[2,4] doivent
                                                  etre neutres}
                     and (m[1,4]<>m[2,4])))     {reste la premiere figure}

                    then begin
                         write ('echec');
                         exit;

          END;
              end;
 writeln('reussite');
 readln;
END.
```



§6. DÉMONSTRATION DU SOUS-LEMME 2 "de multiplicité des classes".

A titre anecdotique je signale que les deux auteurs avaient heuristiquement démontré ce sous-lemme sous une forme initiale remarquable quoique grossièrement fausse qu'avait imaginée G. Lopez (les exceptions avaient été omises ainsi que la nécessité de se restreindre aux arêtes orientées non versatiles). L'erreur ne m'est apparue qu'au moment de la rédaction en bonne et due forme. A ce moment tout le reste avait heureusement déjà été rédigé et il m'a semblé plus avantageux (bien que déprimant) d'amender la rédaction de l'ensemble en tenant compte de l'énoncé rectifié. Si l'erreur (pourtant criante) était apparue tout de suite nous serions sans doute encore en train de chercher notre voie; de quoi méditer sur les liens entre erreur et innovation: c'est de la recherche en bétise artificielle qu'il faut attendre une meilleure compréhension du cerveau humain...

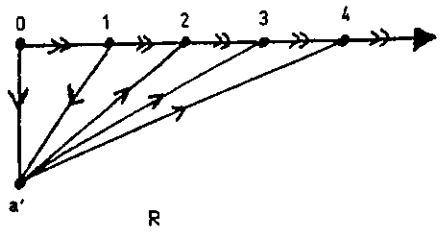
Dans ce § il sera également commode de prendre les termes de "chaînes" et de "cycle" au sens élargi c'est à dire sans souci de réflexivité.

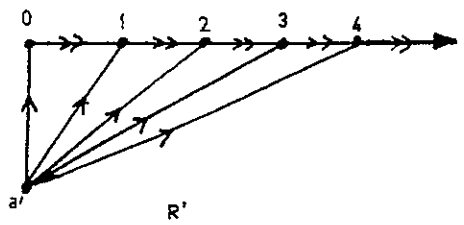
§6.A. Préalables.

Rappelons l'énoncé du sous-lemme 2 de multiplicité des classes du §4.1.A:

> Si les relations binaires R et R' de même base sont hémimorphes et si sur un grand motif E *proprement inclus* dans |R| on a R|E≈R'|E *alors l'origine et le but d'une flèche non versatile de R|E ne peuvent être tous deux dans la même (R,R')-classe de différence* sauf dans les deux circonstances suivantes: *1ère exception*) card(E)≥3 et |R|-E est un singleton dont l'unique élément est majorant ou minorant changeant de la composante connexe de E; *2ème exception*) card(E)=2 et |R|-E est un singleton auquel cas une des relations R ou R' est une 3-chaîne et l'autre un 3-cycle (aux sens élargis); et dans chacune des deux exceptions R et R' ne sont ni isomorphes ni anti-isomorphes.

L'énoncé est muet sur les grands motifs E qui sont des chaînes puisque toutes leurs arêtes y sont versatiles. Qui plus est si E est infini de type ω, il est facile de fabriquer un R' tel que R'|E est identique à R|E, de façon à mettre les extrémités d'une arête non changeante, par exemple (0,1), dans la même (R,R')-classe: Soit $\{0,1,\cdots\}\cup\{a'\}$ la base de R (avec a' non dans $\mathbb{N}$). Supposons que a' est R'-minorant de $\mathbb{N}$, R-minorant de $\{2,3,\cdots\}$ et R-majorant de $\{0,1\}$; alors R et R' sont des chaînes hémimorphes mais 0 et 1 sont dans la même (R,R')-classe $\{0,1,a'\}$. C'est pourquoi dans le cas de ω on aura recours au sous-lemme 2ter.



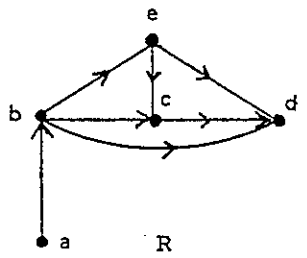


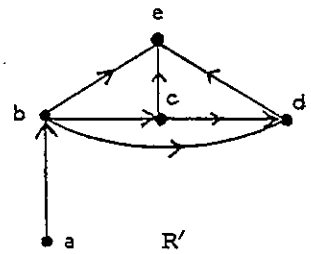
Les flèches doubles $\twoheadrightarrow$ signifient qu'on a affaire à une chaîne et sous-entendent la transitivité.

Pour ceux des motifs non autoduaux qui ne sont pas des grands motifs le sous-lemme 2 sera vrai sans aucune des deux exceptions car celles-ci ne sont pas réalisables. En effet une relation binaire R crée en affublant un tel motif E d'un m, R-majorant de E qui deviendrait R'-minorant de E, ne serait pas hémimorphe à R': sur la partie formée de la réunion de {m} et du grand motif inclus dans E, il n'y aurait ni isomorphie ni anti-isomorphie entre R et R' grâce au lemme de non recollement !

Ce sous-lemme 2 du §4 ne s'étend pas aux arêtes versatiles (donc orientées) même pas à celles des arêtes versatiles qui ne changent pas en passant de R à R', comme le montre l'exemple suivant: sur la base {a,b,c,d,e} on a a<b, b<e et b<c<d mod R et R', et en plus e<c<d mod R et

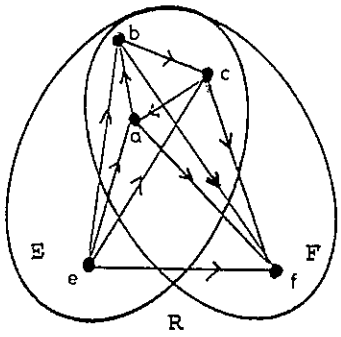
c<d<e mod R'. R|{a,b,c,d} est de type D_{10}, (c,d) est versatile et ses extrémités se trouvent dans la même (R,R')-classe de différence bien que R et R' soient hémimorphes et d'ailleurs isomorphes.

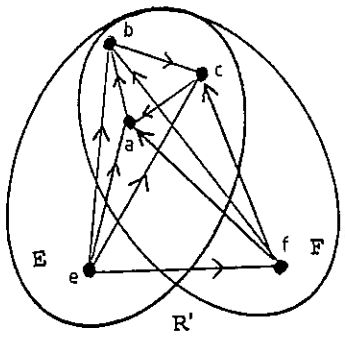




Même si on impose en plus à (R,R',E,F) d'être un double motif, l'énoncé n'est toujours pas vrai pour les arêtes versatiles même non changeantes (l'exemple qui précédait n'était pas un double motif car on ne pouvait y trouver d'ensemble F faisant de (R,R',E,F) un double motif). Donnons l'exemple suivant :

R|E est un diamant de base {e,a,b,c} dont e est R-minimum, R|F est un diamant de base {f,a,b,c} dont f est R-maximum et on a R|(e,f)=(+,-). Mod R' on change les flèches dont une extrémité est f sauf (e,f). Alors chaque arête du cycle est une arête (R|E)-versatile non changeante dont les extrémités sont dans la même (R,R')-classe F.





A titre d'*exercice*, montrons que cet exemple de double motif (R,R',E,F) est le seul, aux variantes près, où les extrémités d'une arête (orientée) versatile non changeante peuvent être dans la même classe hormis le cas des cônes où F-E est un singleton extremum changeant:

Admettons, en attendant leurs démonstrations, le lemme 2 de classification et la finitude des doubles motifs du lemme C. Une fois démontré le pré-lemme 1·c du §3 on peut affirmer que pour chacune des sept allures (α) à (ζ) il n'apparaît d'arêtes versatiles dans aucun des deux motifs. Que dans le cas d'un cylindre chaque singleton, inclus dans E, qui n'est pas extrémité d'une arête (R|E)-versatile changeante n'engendre comme (R,R')-classe que lui-même (et chaque partie de F engendre F). Dans le cas d'un bec, il est immédiat qu'une arête versatile de E ne peut avoir ses extrémités dans la même classe, que ce soit E ou F ou les deux qui soient non connexes. Dans le cas d'un cône où F-E est un extremum changeant, la (R,R')-classe engendrée par F est |R| tout entier mais ce cas est prévu par l'énoncé; Et si c'est E-F qui est réduit à un singleton extremum non changeant, R|E ne peut être qu'un diamant pour qu'y apparaissent des arêtes versatiles (on le vérifie sur la liste des motifs), ce 3-cycle d'arêtes (R|E)-versatiles se trouve dans F et ne change pas, il doit donc encore être formé d'arêtes (R|F)-versatiles et F ne peut donc qu'être un diamant et pour éviter la première exception au sous-lemme 2 on est acculé à l'exemple indiqué. □

Fort du résultat de cet exercice nous pouvons (en admettant le sous-lemme 2 de multiplicité des classes et le lemme 2 de classification des doubles motifs) démontrer la proposition 4 du §4.1.A que nous réénonçons.

PROPOSITION 4 . Dans un double motif (R,R',E,F) une arête non changeante (orientée ou pas) incluse dans E ne peut avoir ses extrémités dans la même (R,R')-classe de différence que si (R,R',E,F) est un cône ou d'allure (α) (γ) (η) ou (ζ).

PREUVE.

Le lemme C, une fois démontré, prouvera que les doubles motifs sont finis. L'énoncé du sous-lemme 2 (une fois démontré) s'étendra des arêtes

principales (voir la définition plus bas) aux arêtes neutres exactement comme il s'étend aux arêtes orientées non versatiles (voir plus loin dans la preuve du sous-lemme 2) *sauf dans le cas de* $R|E\approx D_9$ (ou variante) puisque dans ce cas un des éléments de E est dans la même R-position par rapport à n'importe lequel des autres éléments de E. Plaçons nous donc dans ce cas où $R\approx D_9$. Prenons un (R,R')-chemin de longueur minimum parmi ceux dont les extrémités a et b forment avec un élément *c* une relation $R|\{a,b,c\}$ de type D_9. Soit $E=\{c,a,b\}$ avec $R|(c,a)=R|(c,b)=(+,-)$ et (a,b) neutre. Le (R,R')-chemin va de *a* à b sans évidemment passer par c. R est de cardinal au moins 4. Soit f la première étape de ce chemin. Quitte à échanger les rôles de R et R' on a par exemple $R|(a,f)=(+,-)$. L'hémimorphie appliquée sur {a,c,f} exige que $R|(c,f)=(+,-)$ pour éviter un R-cycle. Si (f,b) est neutre le chemin a été raccourci. (f,b) est donc orienté. L'hémimorphie sur {a,b,f} impose à cette orientation de changer. (a,f,b) est donc un (R,R')-chemin. Si $R|\{a,b,f\}$ est de type D_7 ou D_9, R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphe sur {a,b,c,f} qui est donc toute la base: (R,R',{c,a,b},{c,f,b}) est alors un cône. Si $R|\{a,f,b\}$ est une consécutivité (au sens élargi), l'existence d'une arête (a,f) orientée avec $e\in E$ et $f\in F$ empêche (R,R',E,F) d'être un cylindre ou un bec; (R,R',E,F) ne peut donc être qu'un cône, aucune allure ne contenant D_9.

Le cas des extrémités d'une arête orientée versatile non changeante est résolu dans l'exercice précédent et conduit à un cône.

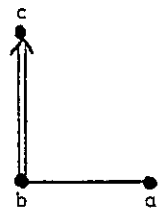
Le cas des extrémités d'une arête orientée non versatile aboutit soit à la deuxième exception au sous-lemme 2, qui est d'allure (α), soit à la première où la composante connexe de E possède un majorant ou minorant changeant. Alors dans ce dernier cas, si E est connexe R est un cône; si E est au contraire de type D_{18} ou D_{19} (et donc R de cardinal 4) le lemme 5·d s'applique quand F est connexe de cardinal >2, et le lemme 5·abc quand F n'est pas connexe ou de cardinal 2 — or ni dans le cas du cylindre ni dans le cas du bec les extrémités d'une même arête orientée non versatile de E ne peuvent être dans la même classe, idem dans le cas des allures (β) (δ) et (ε). □

. . .

§6.B. LA PREUVE.

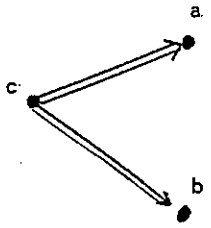
DÉFINITIONS: Parmi les arêtes non versatiles de chaque grand motif *sauf* ω *et* ω^*, nous en distinguerons certaines que nous qualifierons de **principales.** Dans Ω (consécutivité naturelle sur $\mathbb{N}$) ce sera l'arête (0,1). Dans D_{26} ce sera (a,b). Dans D_{18} ce sera (b,c). Dans D_9 ce seront (c,a) et (c,b). Dans D_5 ce seront (d,a), (d,b) et (d,c). Dans D_{10} ce sera (a,1). De même pour D_{12}. Dans D_{14} ce sera (a,1). De même pour D_{22}. Dans D_{20} ce seront (a,1) et (a,2). Les avatars de ces motifs se traitent exactement de la même manière.

Voici une représentation graphique des grands motifs finis les plus typiques; les arêtes principales sont représentées en trait double.

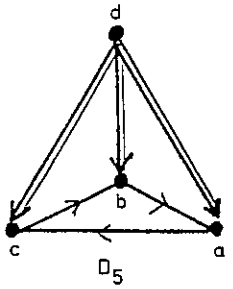


D_{18}

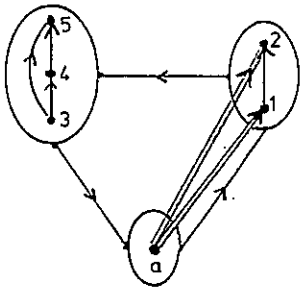
D_{26}



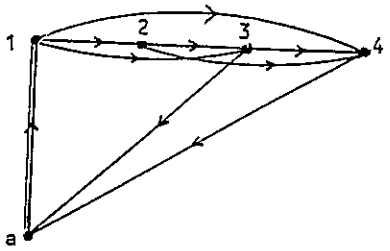
D_9



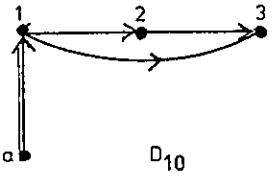
D_5



D_{20}



D_{14}



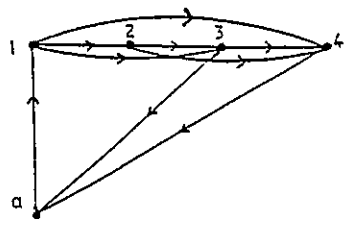
D_{10}

PREUVE du sous-lemme 2 de multiplicité des classes.

Nous allons d'abord montrer qu'il suffit dans l'énoncé du sous-lemme 2 de se restreindre aux arêtes principales (lesquelles sont non versatiles) pour en déduire l'énoncé général portant sur les arêtes non versatiles quelconques.

Supposons que nous ayons montré que: "*Sous les hypothèses du sous-lemme 2 les arêtes principales de E n'ont jamais leurs deux extrémités dans la même (R,R')-classe de différence*". Alors nous aurons montré qu'*il en va de même de celles des autres arêtes qui sont non versatiles*:

Prenons l'exemple de $E=D_{14}$ sur {1,2,3,4,a} défini au §7.3, les autres grands motifs se traitant de façon identique. (1,a) est principale. Supposons que les deux extrémités de l'arête non versatile (2,3) se trouvent dans la même classe de différence, (2,3) n'étant pas un *a*-intervalle, *a* doit se trouver dans cette classe car celle-ci est un m-presque-intervalle pour tous les m qui lui sont extérieurs dès que card (R)≥4. Maintenant (a,2) n'étant pas un 1-presque-intervalle, 1 doit aussi se trouver dans la classe — contradiction. Cette procédure ne s'applique pas si card (R)≤3, mais comme $E \not\subseteq |R|$ cela ne concerne que $R|\approx D_{26}$ ou D_{27} qui n'a de toute façon qu'une seule arête.



D_{14}

Nous allons maintenant passer en revue tous les grands motifs (voir la liste au §2.2.2 et la définition de chaque relation de cette liste au §7.3). Par souci d'uniformité nous changerons l'appellation des sommets : pour Ω l'arête principale sera notée (0,1), pour les autres grands motifs (sauf *ω* qui n'est pas concerné) on la notera (a,b).

On rappelle que d'après le sous-lemme 00 du § 4.1.A, R|E et R'|E ne diffèrent que sur les arêtes versatiles de R|E (qui sont les mêmes que celles de R'|E).

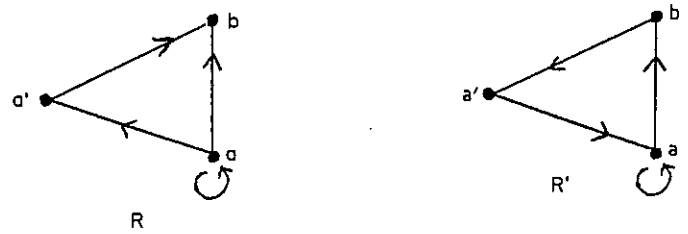
Pour raisonner par l'absurde, on cherchera dans R une restriction isomorphe à R|E, telle que la longueur du plus court (R,R')-chemin de différence allant de l'origine au but d'une des arêtes principales de cette restriction, soit minimum au sens qu'elle est inférieure ou égale à toutes les longueurs des (R,R')-chemins de différence allant de l'origine au but d'une arête principale de n'importe quelle autre restriction qui serait isomorphe à R|E. Il n'est pas suffisant de prendre seulement un (R,R')-chemin minimal [i.e. sans étape inutile], ni même de longueur minimale parmi ceux qui ont mêmes extrémités que lui. Puis on tentera de construire une autre restriction de chemin plus court ce qui donnera une contradiction. A chaque fois on vérifiera aisément que la première escale *a* du chemin n'est pas dans E puisque (a,a') s'inverse et pas (a,b) ou (a,1).

<u>1er CAS</u>: R|E de type D_{26}. On a E={a,b}, R|(a,b)=(+,-), R(a,a)=(+) et R(b,b)=(-). Il existe un (R,R')-chemin allant de a à b, soit a' la première étape. Supposons donc qu'on ait R|(a,a')=(+,-) et R'|(a,a')=(-,+). Si card (R-E)≥2 l'hémimorphie appliquée à {a,b,a'} montre que (a',b) est orienté et pour éviter un R'-cycle qui n'existe pas dans R il faut que R'|(a',b)=(+,-). Si on avait R|(b,a')=(+,-) dans la R-chaîne (a,b,a') le deuxième élément serait sans boucle; or mod R' ce deuxième élément est a' qui possède une boucle; donc on a R|(a',b)=(+,-).

Le R-deuxième élément est a' auquel doit être attachée une boucle. R|(a',b) est donc de type D_{26} et le (R,R')-chemin allant de a' à b est plus court que celui allant de a à b ce qui est contraire à l'hypothèse de minimalité.

Mais si card (|R|-E)=1 un (R,R')-chemin de différence allant de *a* vers b

doit passer par l'unique étape intermédiaire a' qui est le seul élément non dans E; (a,a',b) est donc un (R,R')-chemin de différence qui s'inverse, et a' est soit extremum changeant de {a,b,a'}, ce qui constitue la première exception, soit vérifie a<a'<b mod R , R' est un cycle et R une chaîne, ce qui constitue la deuxième exception; et on revérifie que dans chacun des cas R' n'est ni isomorphe ni anti-isomorphe à R. □



<u>2ème CAS</u>: E={a,b,c}, R|E est de type D_{18} et on a R|(a,b)=(+,-) et (a,c) plein. Définissons a' comme précédemment avec R|(a,a')=(+,-). L'isomorphie sur E exige que R|(a,b)=(+,-). Si on avait R(b,a')=+ on aurait dans R'|{a,c,b,a'} une arête pleine pendante au deuxième élément de la chaîne (a,b,a'); or si card(|R|-E)≥2 {a,c,b,a'} est une partie propre de |R| sur laquelle on peut appliquer l'hémimorphie; mod R ce deuxième élément est b et (b,c) est vide – contradiction. D'où P(a',b)=(+). Mod R, a' est alors le deuxième élément de la chaîne (a,a',b), donc (a',c) est plein comme (a,c). R|{a',b,c} est donc de type D_{18} contre la minimalité imposée.

Mais si card(|R|-E)=1, {a,c,b,a'} n'est pas une partie propre de |R| et on a simplement montré dans l'alinéa précédent que R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes. (a,a',b) est alors le (R,R')-chemin de différence obligé pour aller de a à b. Donc R|(a',b)=(-,+), a' est alors un extremum changeant de la composante connexe {a,b,a'} de E. □

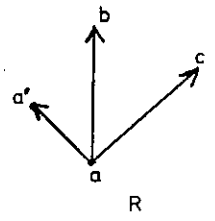
Remarquons qu'une iso- ou anti-isomorphie de R|{a,a',b} sur R'|{a,a',b} échange *a'* en un autre élément; du coup le statut de réflexivité de *a'* est

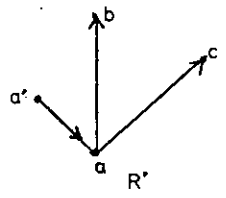
le même que celui de a ou de b, R|{a',a,b} est donc bien une chaîne même au sens restreint. Cette remarque est réitérable pour chacun des autres cas.

<u>3ème CAS</u>: E={a,b,c}, R|E est de type D_9. On a R|(a,b)=R|(a,c)=(+,-) et (b,c) est neutre. Définissons encore a' comme plus haut, on a toujours R'|(a',b)=(+,-). Et pour les mêmes raisons (a',c) est orienté et on a R'|(a',c)=(+,-). Supposons d'abord R|(a',b)=(-,+), l'hémimorphie appliquée à {a',b,c} impose comme (b,c) est neutre que R'|(a',c)=(+,-); R|{a,b,c,a'} est presque une chaîne sauf que le deuxième élément est incomparable au troisième. Or mod R' l'ensemble {a,b,c,a'} est presque une chaîne sauf que le troisième élément est incomparable au quatrième : il ne peut alors y avoir hémimorphie sur cet ensemble. Donc si card(|R|-E)≥2 on a R|(a',b)=(+,-) et R'|(a',b)=(+,-).

L'hémimorphie appliquée sur {a',b,c} nécessite alors que R|(a',c)=(+,-) pour éviter une consécutivité sur R|{a',a,c} irréalisable mod R' et une consécutivité sur R|{a',b,c} irréalisable mod R' car dans le cas contraire {a',a,c} serait une R-chaîne et un R'-cycle. La relation R|{a',b,c} est alors encore de type D_9 contre la minimalité du (R,R')-chemin. Si maintenant card(|R|-E)=1 on a encore démontré que R et R' ne sont ni iso- ni anti-isomorphes. (a,a',b) est alors le (R,R')-chemin obligé reliant a à b. On a alors R|(b,a')=(+,-). a' est alors majorant ou minorant changeant de {a,b}, montrons que c'en est aussi un de {a,c}. L'examen de {a',a,c} montre que R'|(a',c)=(+,-). L'examen de {a',b,c} montre alors que

$R|(c,a')=(+,-)$. a' est donc bien majorant ou minorant changeant de $\{a,b,c\}$. □



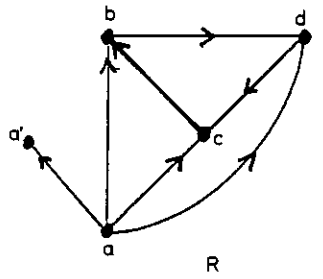


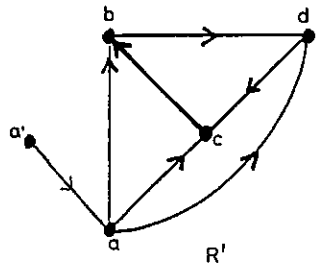
<u>Désormais</u> on écartera le cas où card $(|R|-E)=1$ qui se résoud toujours de la même manière: Une fois établi que a' est extremum changeant de $\{a,b,a'\}$, a et b étant dans une même (R,R')-classe, on considère une flèche (b,c) telle que $R|(c,b)\neq R|(c,a)$; on vérifie à la main sur la liste des grands motifs qu'il en existe toujours sauf sur ω qui n'est pas concerné. L'élément c est donc dans la (R,R')-classe contenant a, laquelle doit être un presque-intervalle; puis on cherche un d qui n'est pas dans la même position par rapport aux éléments a, b ou c et de proche en proche toute la composante connexe de E est dans la classe et admet l'unique élément a' de $|R|-E$ comme majorant ou minorant changeant.

<u>$4^{\text{ème}}$ CAS</u>: $R|E$ est un diamant D_5 de base $\{a,b,c,d\}$, le R-minimum est a et (c,b,d) est un cycle. Prenons la première étape a' dans un (R,R')-chemin de a vers b avec $R|(a,a')=(+,-)=R'|(a',a)$. Pour éviter un R'-cycle ou une R'-consécutivité sur $\{a,a',b\}$ irréalisable mod R il faut que $R'|(a',b)=(+,-)$. Supposons d'abord $R|(b,a')=(+,-)$; pour éviter un R-cycle sur $\{a',b,c\}$ irréalisable mod R' il faut que $R|(c,a')=(+,-)$; et de même pour $R|(d,a')$. Il faut que $R'|(a',c)=(+,-)$ pour éviter un R'-cycle ou une R'-consécutivité sur $\{a,a',c\}$, il est nécessaire aussi que $R'|(a',d)=(+,-)$,

et il y existe donc un R'-minimum (en l'occurence *a'*) mais pas de R'-maximum. E∪{a'} possède alors un R-maximum (a savoir a') et un R-minimum (qui n'est autre que *a*) ce qui est irréalisable dans R'. On en conclut que R|(a',b)=(+,-).

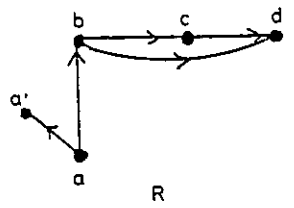
On vient de voir que dans E∪{a'} il y avait mod R' un premier élément (qui est *a'*) et un R'-deuxième (qui est *a*) et pas de R'-maximum; comme mod R il n'y a pas de maximum il doit y avoir un R-minimum (à savoir *a*) et un R-second élément qui ne peut être que a', les autres ayant tous un prédécesseur immédiat dans E autre que *a*. {a',b,c,d} est donc un R-diamant de minimum *a'* et on a, comme souhaité, raccourci la longueur du (R,R')-chemin entre a et b. □

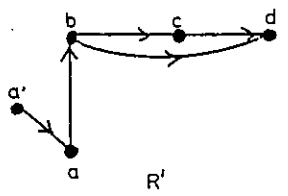




<u>5ème CAS</u>: R|E de type D_{10}. Avec E={a,b,c,d} et a<b, b<c<d mod R, (a,c) et (a,d) vides. Définissons *a'*. Comme précédemment on a R'|(a',b)=(+,-). Supposons d'abord que R|(b,a')=(+,-). Pour interdire un R'-cycle ou une R'-consécutivité sur {a',b,c} il faut que R'|(a',c)=(+,-). De même R'|(a',d)=(+,-). L'examen de {a,a',c} montre que R|(c,a')=(+,-). Enfin l'examen de {a,a',d} montre que R|(d,a')=(+,-). Vulgairement parlant R'|{a',a,b,c,d} ne diffèrerait alors d'une chaîne que par le fait que, entre autre, le R'-second élément (en l'occurence *a*) est incomparable au R'-quatrième (à savoir *c*). Donc Mod R la situation doit être la même ce qui n'est le cas puisque (b,d) est orienté. – Impasse qui aboutit à R|(a',b)=(+,-).

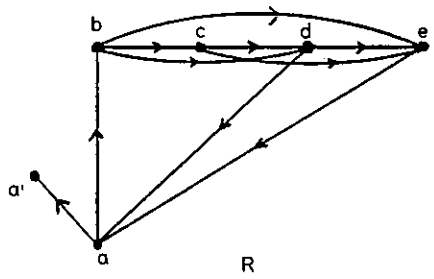
Montrons maintenant que (a',c) et (a',d) sont neutres. Si (a',c) était orienté cette orientation ne pourrait être la même mod R et mod R' car cela contrarierait l'hémimorphie sur {a,a',c}; si cette orientation changeait cela contrarierait l'hémimorphie sur {a',b,c}. En conclusion (a',c) est neutre. Dans un iso- ou anti-isomorphisme de R|{a,a',b,c} sur R' restreint au même ensemble, c seul élément incident à deux arêtes neutres est conservé; La chaîne {a',a,b} est donc globalement conservée; le R-second élément a' est envoyé sur le R'-second qui est a; donc (a,c) est de même nature que (a',c). De même pour (a',d). Finalement R|{a',b,c,d} est de type D_{10} et contredit la minimalité requise. □

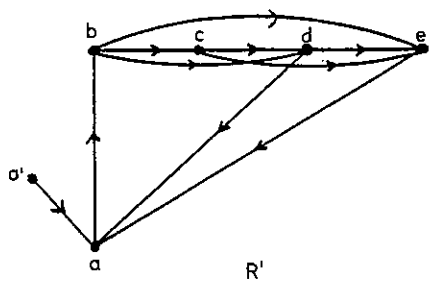




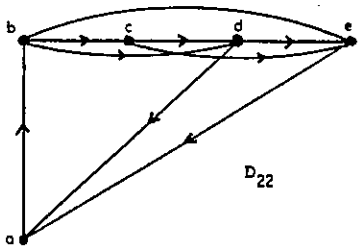
<u>6ème CAS</u>: R|E de type D_{14}. Avec E={a,b,c,d,e}, b<c<d<e, a<b, d<e<a et a<b (mod R) et (a,c) vide. Définissons comme nous en avons maintenant l'habitude a' avec a<a' (mod R) et a'<a<b (mod R'). Supposons d'abord R|(b,a')=(+,-) (ce qui, on commence à s'en douter, va conduire à une impasse). L'hémimorphie sur {a',b,c} conduit à dire que R'|(a',c)=(+,-); R'|{a,a',c} n'est alors pas une consécutivité donc de même mod R et il faut que R|(c,a')=(+,-). Maintenant pour éviter un R-cycle ou une R-consécutivité sur {a,a',d} il faut que d<a' mod R et de même e<a' mod R, a' est donc un R-maximum de E∪{a'}; dans R'|E∪{a'} il n'y a pas de maximum mais seulement un minimum, seul un anti-isomorphisme de R|E∪{a'} sur R'|E∪{a'} peut exister et il conserve a', ce qui entraînerait l'existence d'un anti-isomorphisme de R|E sur R'|E — impossible puisque R|E n'est pas auto-dual. En conclusion on a encore R|(a',b)=(+,-).

Si (a',c) était orienté l'examen de {a',b,c} montrerait que cette orientation ne doit pas changer par passage de R à R'; mais l'hémimorphie appliquée à {a,a',c} montre au contraire qu'elle doit changer; d'où on tire que (a',c) est neutre. On montre que (a',c) est vide en reprenant sur {a,a',b,c} le même raisonnement qu'au $5^{\text{ième}}$ cas. Par ailleurs pour éviter un R-cycle ou une R-consécutivité sur {a,a',d} il faut que R|(d,a')=(+,-). Et de même pour R|(e,a'). R|{a',b,c,d,e} est donc de type D_{14} et contredit la minimalité exigée. □





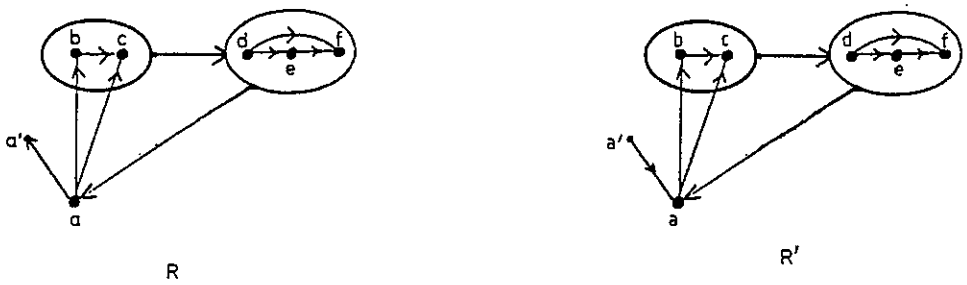
Dans le cas de D_{22} défini comme D_{14} au dessus sauf que R|(b,e)=(+,+), une difficulté supplémentaire vient du fait que l'arête (d,e) n'est plus versatile alors qu'elle l'était dans le cas de D_{14}. On dit alors que si d et e sont dans la même (R,R')-classe, qui est un presque-intervalle, l'élément b, n'étant pas dans la même position par rapport à d et e, est dans cette classe; puis on procède de même avec c au lieu de b et enfin avec a; donc les extrémités de (a,b) sont dans la classe — absurde. □



<u>$7^{\text{ème}}$ CAS</u>: R|E est de type D_{20}. On a E={a,b,c,d,e,f}, b<c<d<e<f, a<b<c, d<e<f<a (mod R). Les arêtes (a,b) et (a,c) sont principales. Définissons

toujours a' qui vérifiera encore $R|(a,a')=(+,-)$ et $R'|(a',b)=(+,-)$. Raisonnons par l'absurde en supposons en plus que $R|(b,a')=(+,-)$. Pour éviter un R'-cycle ou une R'-consécutivité sur $\{a',b,d\}$ il faut que $a'<d$ mod R' et de même $a'<e$ et $a'<f$ mod R'. De la même manière pour éviter un R-cycle ou une R-consécutivité sur $\{a,a',d\}$ il faut que $d<a'$ (mod R) et de même $e<f<a'$ mod R. a' est donc un $R'|E\cup\{a'\}$-minimum; un tel minimum n'existe pas mod R. Donc seul un anti-isomorphisme transforme $R'|E\cup\{a'\}$ en $R|E\cup\{a'\}$ et il envoie a' sur un $(R|E\cup\{a'\})$-maximum qui ne peut être que a'. E est donc conservé par un tel anti-isomorphisme — absurde puisque $R|E$ n'est pas auto-dual. Finalement $R|(a',b)=(+,-)$; de même pour $R|(a',c)$.

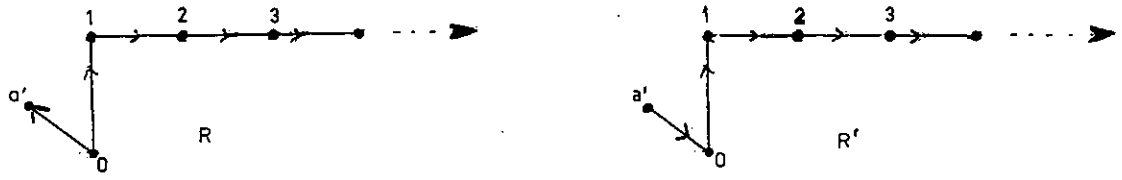
Pour éviter un $R|\{a,a',d\}$-cycle ou consécutivité irréalisable mod R' il faut que $d<a'$ mod R et de même $e<f<a'$ (mod R). Au bout du compte $R|\{a',b,c,d,e,f\}$ est de type D_{20} ce qui contredit la minimalité de la longueur du (R,R')-chemin de différence de a à b. □



<u>8ème CAS</u>: $R|E$ est une consécutivité infinie de type Ω que nous identifierons à la consécutivité sur ℕ, où la longueur d'un éventuel (R,R')-chemin de 0 à 1 est minimum. Soit a' la première étape d'un tel chemin avec $0<a'$ (mod R) comme à chaque fois. Comme toujours on a $R'|(a',1)=(+,-)$. Supposons comme à l'accoutumée pour aboutir à une contradiction, que $1<a'$ mod R. Pour éviter un R'-cycle ou une R'-consécutivité sur $\{a',1,2\}$ irréalisable mod R il faut que $a'<2$ (mod R'). $R'|\{a',0,2\}$ n'est donc pas une consécutivité ce qui impose $2<a'$ (mod R). On

reprend ce même raisonnement avec (a',2) à la place de (a',1), et (a',3) à la place de (a',2): on obtient successivement a'<3 (mod R') puis 3<a' (mod R) et de proche en proche a' est R'-minimum de E∪{a'} et R-maximum de E∪{a'}; R|E∪{a'} n'ayant pas de maximum ni R'|E∪{a'} de minimum, seul un anti-isomorphisme peut échanger les deux, il doit conserver a' donc E ce qui est absurde car R|E n'est pas auto-dual. On conclut que a'<1 (mod R).

Si (a',2) était orienté l'hémimorphie appliquée sur {a',0,2} obligerait cette orientation à changer (pour ne pas avoir une consécutivité pour une des relations et pas pour l'autre), mais l'hémimorphie appliquée à {a',1,2} l'oblige au contraire à ne pas changer (pour éviter un cycle dans une des relations et pas dans l'autre); (a',2) est donc neutre. L'hémimorphie appliquée à {0,1,2,a'} impose à cette neutralité d'être de même nature que celle de (0,2) (disons vide). On poursuit le même raisonnement de proche en proche: l'arête (a',3) doit être neutre puisqu'en considérant {a',0,3} elle doit s'inverser, et en considérant {2,3,a'} elle ne le doit pas pour que, (a',2) étant neutre, il n'y ait pas sur {2,3,a'} une consécutivité modulo une des relations R ou R' et pas modulo l'autre. Finalement toutes les arêtes (a',2), (a',3), (a',4), etc ··· sont vides et donc R|{a',1,2,3,4,···} est isomorphe à R|E ce qui s'oppose à la minimalité de la longueur du (R,R')-chemin de 0 à 1. □



Tous les cas de figure ont été envisagés. □□

§6.C.

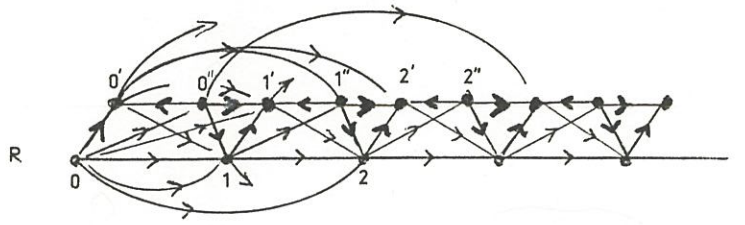
COROLLAIRE au sous-lemme 2.

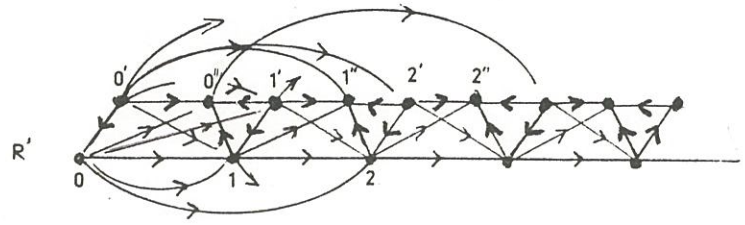
Soit R et R′ deux relations binaires hémimorphes identiques sur un grand motif E de la base. Sauf dans les deux exceptions du sous-lemme 2 et *sauf si E est une chaîne infinie*, les éléments de E ne peuvent pas être tous dans la même (R,R′)-classe.

ÉVIDENT puisqu'existe alors dans E une arête non versatile dont on sait que les extrémités ne sont pas dans la même (R,R′)-classe. □

Si le grand motif E est une chaîne infinie, il peut exister des relations binaires hémimorphes R et R′ ne formant pas un cône, identiques sur E, telles que les éléments de E soient tous dans la même (R,R′)-classe!

Donnons l'exemple suivant: $E=\{0<1<2<3<4<\cdots\}$. R est une chaîne de type ω dont la base est formée de E et de $\{0'<1'<2'<3'<\cdots\} \cup \{0''<1''<2''<3''<\cdots\}$ mod R et R′. On a en plus $0<0'<1<1'<2<2'<\cdots$ (mod R), $0''<0'<1'$ (mod R), puis translation de n. Plus généralement $n<n''<n'<p<p''<p'$ (mod R) si $n<p$. Modulo R′ seuls s'inversent les arêtes du chemin $(0,0',0'',1,1',1'',2,\cdots)$ et les arêtes $(0'',1')$, $(1'',2')$ $\cdots$.





SOUS-LEMME 2ter . Soit (R,R',E,F) un double motif renforcé. Alors E et F ne peuvent être tous deux des chaînes infinies.

PREUVE. Démonstration par l'absurde en supposant, pour fixer les idées, que $R|E \approx R|F \approx \omega$. L'indentité sur E et la dualité sur F montre que $E \cap F$ contient au plus un élément; en enlevant de $|R|$ l'intervalle initial de R et celui de R' engendré par cet éventuel élément, on peut se ramener au cas ou l'intersection $E \cap F$ est vide. $R|E$ sera identifié à $\{0,1,2,\cdots\}$. Considérons l'ensemble L des sommets de la base qui sont liés à 0 par une flèche changeante. Ces sommets sont dans F. Envisageons deux cas:

1) Cet ensemble L est de R-type ω. On peut en extraire (Ramsey) une famille infinie K de R-type ω dont les sommets sont liés à 0 par des flèches de R-source 0, ou une famille infinie K de R-type ω dont les sommets sont liés à 0 par des flèches de R-but 0; plaçons nous par exemple dans le cas où ces flèches sont de R-but 0. Pour tout k de K l'examen de $\{k,0,1\}$ montre que $R|(k,1)=(+,-)$. De même $R|(k,2)=R|(k,3)=\cdots=(+,-)$. $K \cup \{1,2,3,4,\cdots\}$ est donc de R-type $\omega+\omega$. Or mod R' l'ensemble $K \cup \{1,2,3,4,\cdots\}$ contient une suite infinie strictement croissante et une suite infinie strictement décroissante — contradiction. Si les flèches liant 0 à K étaient de R-source 0, alors $K \cup \{1,2,3,4,\cdots\}$ serait de R'-type $\omega^*+\omega$ tandis qu'il ne contient pas de R-type ω^* — encore contradictoire.

2) L'ensemble L n'est pas de R-type ω. Il est donc fini et son complémentaire $H=F-L$ est de R-type ω. Dans la relation $\hat{R}=R|(H \cup E-\{1\})$, l'élément 0 est seul dans sa $(\hat{R},\hat{R}')$-classe [on a posé $\hat{R}'=R'|(H \cup E-\{1\})$], puisque les premières étapes des (R,R')-chemins partant de 0 ont été ôtées de R. On peut donc appliquer au double motif $(\hat{R},\hat{R}')$ le sous lemme 4 qui dit que $(\hat{R},\hat{R}')$ est un cône ou un cylindre. Le lemme de non recollement des cylindres et des cônes nous apprend alors qu'il n'y a ni iso- ni anti-

isomorphie entre $\hat{R}$ et $\hat{R}'$ (l'élément 1 a été ôté pour être sûr d'avoir une partie propre). — Incompatible avec l'hémimorphie. □

L'énoncé du sous lemme 4 mentionne comme hypothèse que les éléments de E ne sont pas tous dans la même (R,R')-classe de différence. Or le sous-lemme 2 a montré justement que les extrémités d'une arête non versatile de E ne peuvent pas être dans la même (R,R')-classe (sauf pour les exceptions du sous-lemme 2, lesquelles vérifient tout de même la conclusion du sous-lemme 4). Reste le cas où les arêtes de E sont toutes versatiles, c'est à dire celui où R|E est une chaîne infinie. Tant que F n'est pas, lui aussi, une chaîne infinie, on peut, appliquer le sous lemme 2 à la restriction à F de (R,R'^*), pour voir que F est formé de plusieurs (R,R'^*)-classes. Alors le sous-lemme 4 permet encore de conclure au fait que (R,R'^*) est un cône ou un cylindre et donc aussi (R,R'). Le dernier cas restant, où E et F sont tous deux des chaînes infinies, est au bout du compte, éliminé par le sous-lemme 2ter qui déclare que ce cas de figure est irréalisable. On en conclut finalement que l'hypothèse du sous-lemme 4, stipulant que les éléments de E ne sont pas tous dans une même (R,R')-classe, est toujours réalisée; mais au stade où nous en étions, au §4 où ce sous-lemme a été démontré, nous ne pouvions pas le savoir. Nous avons eu en effet besoin du sous-lemme 4, *tel qu'il a été formulé*, pour démontrer ce sous lemme 2ter. De la même manière la mention "renforcé" dans l'énoncé du sous lemme 4 s'avère aussi inutile maintenant qu'on sait, grâce au lemme C, que les doubles motifs sont tous finis. Toutes ces subtilités tiennent au fait qu'on était jusqu'ici obligé de prendre en compte des doubles motifs infinis dont on ignorait encore l'inexistence. Celle-ci est désormais acquise.

Fin de la démonstration du théorème de demi-reconstructibilité modulo la caractérisation des grands motifs, donnée au §2.2, à laquelle sera consacré le paragraphe 7 (théorème 2 d'exhaustivité).

PROPOSITION (Hagendorf et Lopez). Soient R et R′ deux relations binaires hémimorphes. Soit E une partie de type ω de la base, sur laquelle R et R′ sont identiques. Il n'est pas possible que deux éléments quelconques x, y de E soient toujours liées par un (R,R′)-chemin (x,z_{xy},y) formé de deux arêtes!

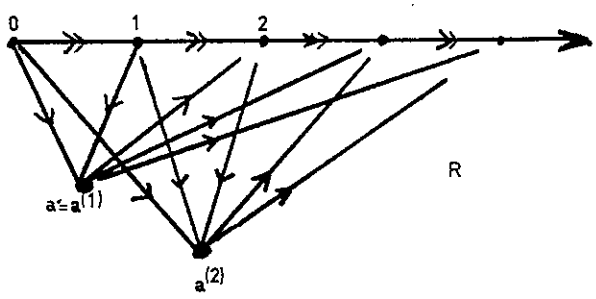
PREUVE par l'absurde.

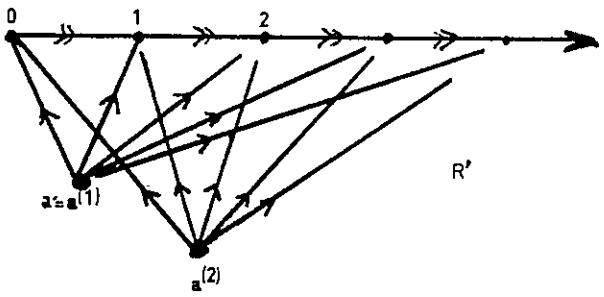
1ère étape. Montrons que si i et j (i<j) sont tous deux de E, alors il existe a′ hors de E tel que $R|(i,a')=R|(j,a')=(+,-)$, (i,a′) et (j,a′) s'inversant dans R′, ou le contraire en permutant les rôles de R et R′: il suffit d'examiner $\{i,j,z_{ij}\}$ et de définir a′ comme étant justement z_{ij}.

2ème étape. Sous les mêmes hypothèses concernant i et j, montrons que le segment [i,j] de E est un a′-intervalle mod R et R′. Prenons par exemple $R|(i,z_{ij})=(+,-)$, pour un i et un j donnés. Soit i<k<j. On regarde {k,j,a′}: $R|(k,z_{ij})=(+,-)$. En examinant $\{i,k,z_{ij}\}$ on voit que (k,z_{ij}) doit changer.

3ème étape. D'après Ramsey on peut se ramener au cas où, par exemple, $R|(i,z_{ij})=(+,-)$ pour tout i,j de E. E est inclus dans une (R,R′)-classe. Associons à au segment {0,1} un élément a′ parmi les z_{01}. De même associons à {0,2} un élément a" qui sera choisi égal à a′ si {0,2} est un a′-intervalle, et sinon qui sera un autre élément noté $a^{(2)}$ choisi parmi les z_{02}. On recommence pour {0,3} etc... On obtient ainsi une suite $a'=a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ etc... Si les $a^{(n)}$ forment un ensemble fini le dernier construit, noté u, R-majore un intervalle final infini I de E. $R|I\cup\{u\}$ est de type $\omega+1$ alors que R′ restreint au même ensemble est de type ω, ce qui contredit l'hémimorphie. L'ensemble A des $a^{(n)}$ est donc infini. Montrons que si q<n ($q,n\in\mathbb{N}$) alors $a^{(q)}<a^{(n)}$ mod R; on en tirera une contradiction. Soit p le plus grand entier tel que {0,p} soit un $a^{(n)}$-intervalle (mod R et R′). On a nécessairement $a^{(q)}<p$ (mod R) et (mod R′). L'hémimorphie appliquée à

$\{a^{(q)},p,a^{(n)}\}$ montre que $a^{(q)}<a^{(n)}$ mod R. Maintenant $A\cup\{0\}$ est de R-type ω et donc de R'-type ω^* puisque 0 en est un R'-majorant de A. Donc $A\cup E$ contient un R'-type ω et un R'-type ω^* donc aussi un R-type ω et un R-type ω^*. Or une suite infinie R-strictement décroissante dans $A\cup E$ possède une infinité d'éléments dans A ou dans E et aucune de ces deux possibilités n'est réalisable. □





§7. PREUVE du THÉORÈME de motifs-RECONSTRUCTION.

Pour démontrer le sous-lemme 2 de multiplicité des classes nous avons besoin du théorème de reconstruction.

Faisons donc maintenant le projet de démontrer ce théorème qui est une amélioration de l'ancien théorème de Fraïssé-reconstructibilité lequel stipulait que les relations binaires de cardinal infini (Hagendorf, 1990) ou fini ≥7 (Lopez, 1978) sont (Fraïssé-)reconstructibles. Ce paragraphe 7 périme donc le §7 de l'article [9] (Hagendorf) et le §I de l'article [16] (Lopez): le lecteur qui ne s'intéresserait pas à l'infini et ne serait pas sourcilleux sur les erreurs de détail pourrait se contenter de l'antique théorème de Fraïssé-reconstructibilité de Lopez figurant en [16] ou mieux en [3] et sauter donc sans préjudice les lemmes de n° *(xii)bis* à *(xxi)*.

Rappelons l'énoncé de cette amélioration:

THÉORÈME de {motifs}-reconstructibilité . Toute relation binaire est reconstructible par les motifs finis et infinis.

Cet énoncé est simplement appelé "théorème de reconstruction", il signifie plus précisément que deux relations binaires R et R' de même base sont isomorphes dès qu'elles sont isomorphes sur les restrictions qui sont des motifs. On retrouvera l'ancien théorème de Fraïssé-reconstructibilité de Lopez en observant que les motifs finis sont de cardinal ≤6.

Ce théorème nécessite l'établissement de la liste complète des types d'isomorphies des relations binaires non reconstructibles. Pour l'obtenir il suffira de rajouter quelques types à la liste des types des classes

d'hypomorphie non reconstructibles que nous allons, dans ce paragraphe, rechercher.

Je vais pour cela introduire le concept de *voisinage* dans une relation binaire quelconque, concept qui étend celui bien connu pour les chaînes (lequel remonte au moins à R. Fraïssé [4]) et celui que j'avais déjà défini pour les ordres dans [9]. Ce concept n'est pas facile à exposer car il recouvre plusieurs idées dont l'équivalence n'est pas évidente. Je livre ici l'exposition qui me semble la moins mauvaise. Je définis le terme de "R-classe de voisinage" dans une relation binaire R de telle sorte qu'il n'est hélas pas évident, avant le §7.8, que ce terme étende le sens classique du terme "voisinage" dans le cas d'une chaîne. En effet la structure simple des chaînes y masque des difficultés. La relation "x est voisin de y" est définie dans une chaîne par le fait que [x,y] (ou [y,x] suivant le cas) est fini. Dans une chaîne cette relation est manifestement une relation d'équivalence et les classes d'équivalence sont des intervalles. Ces deux propriétés (et bien d'autres) restent vraies pour les relations binaires quelconques mais les preuves en sont complexes et sans rapport avec la demi-reconstruction. Aussi ai-je renvoyé au §8 les énoncés et démonstrations qui justifient la terminologie. Sera ainsi présentée au §8 la notion de "voisinage" qui s'avérera équivalente, mais pas de manière évidente, à celle de "classe de voisinage".

§7.1 Classes de voisinage d'une relation binaire.

DÉFINITION . Soit R une relation binaire dont la base contient une partie V. On dira que V est une **R-classe de voisinage** s'il existe une relation R' Fraïssé-hypomorphe *et isomorphe* à R, telle que V est exactement une (R,R')-classe de différence.

Dans [9] j'avais utilisé l'horrible terme d'"*hyperclasse*" au lieu de "classe de voisinage". La justification de cette nouvelle dénomination sera donnée au §8.

On dira plus simplement qu'une relation binaire R est une **classe de voisinage** (sous-entendu *en soi* ou *d'elle-même*) si elle est une R-classe de voisinage.

Ainsi $R=D_9$ (voir §7.2) est une classe d'hypomorphie (prendre $R'=D_7$) mais n'est pas une classe de voisinage (car D_7 n'est pas isomorphe à D_9).

On conviendra que le terme "classe" sans autre précision ne sera, comme jusqu'ici, qu'une abréviation pour le terme "classe de différence" et non pour celui de "classe de voisinage", ce dernier terme désignant des "classes" très particulières.

Mini-lemme . Les R-classes de voisinage sont partout réflexives ou partout irréflexives (et pas seulement à partir du cardinal 3 comme les classes d'hypomorphie).

Preuve. En effet ce sont des classes d'hypomorphie et donc seules celles de cardinal 2 peuvent poser problème, mais on vérifie aisément que les seules classes d'hypomorphie à deux éléments à n'être ni réflexives ni irréflexives, à savoir D_{26} et D_{27}, ne sont pas des R-classes de voisinage. □

Ce mini-lemme justifie que, dans ce paragraphe 7 et dans le §8 suivant, on puisse supposer, sauf mention contraire, qu'on n'a affaire qu'à des relations binaires <u>réflexives</u>. Les chaînes, les consécutivités et les cycles retrouvent ainsi leur sens restreint.

Mini-lemme . Les R-classes de voisinage sont des R-intervalles (quel que soit le cardinal de R).

Preuve. Supposons le cardinal de R ≥3 sans quoi l'énoncé est trivial. Soit V une R-classe de voisinage qui pour un R' hypomorphe et isomorphe à R est une (R,R')-classe de différence. Soient x et y deux éléments $S_{R,R'}$-liés de V. Soit *a* un élément extérieur à V et qui n'est donc pas $S_{R,R'}$-lié à x ni à y. L'hypomorphie et l'isomorphie entre R et R' sur {a,x,y} exige alors que R|(a,x)=R|(a,y). {x,y} est donc un *a*-intervalle. De proche en proche V est un a-intervalle pour tout *a* extérieur à V. V est donc un R-intervalle. □

Rappelons qu'une R-classe d'hypomorphie n'est pas nécessairement un R-intervalle si card R=3, car l'isomorphie sur les parties à 3 éléments n'est plus assurée. Ainsi si R|(a,x)=R'|(a,x)=R|(y,a)=R'|(y,a)=(+,-) et R|(x,y)=R'|(y,x)=(+,-) alors {x,y} est une R-classe d'hypomorphie sans être un R-intervalle.

§7.2. Liste des types des classes de voisinages et des classes d'hypomorphie.

Rappelons encore que R est une **presque-chaîne** si, soit elle est une chaîne, soit elle possède deux éléments a et b appelés *presque-minimum* et *presque-maximum* tels que $\overline{R}$ définie par $\overline{R}$(a,b)=+, $\overline{R}$(b,a)=- et $\overline{R}$(x,y)=R(x,y) si {x,y}≠{a,b}, est une chaîne de minimum a et de maximum b. Rappelons qu'une relation binaire R est **lopezienne** si elle est (au sens restreint) soit une consécutivité, soit un cycle, soit une presque-chaîne.

Donnons la liste des 14 types de classes de voisinage non lopeziennes réflexives dont nous montrerons au §7.7 (*théorème n°1 d'exhaustivité de la liste des types des classes d'hypomorphie*) qu'elle est exhaustive. On constatera qu'elles sont toutes autoduales et reconstructibles (voir §8).

Avec les 14 types de classes de voisinage irréflexives associées on obtient tous les types de classes de voisinage non lopeziennes puisque le mini-lemme précédent affirme à juste titre qu'elles sont toutes soit partout réflexives soit partout irréflexives.

Les trois types de classes de voisinage non lopeziennes réflexives à 4 éléments sont ceux des relations suivantes (on remarquera qu'elles ont toutes une arête neutre):

• Soit $\mathbf{V}_4$ le type de la relation R sur {a,1,2,3} définie ainsi: $R|\{1,2,3\}$ est la chaîne 1<2<3 et R(a,1)=+, R(3,a)=+, R(a,2)=R(2,a)=+; R vaut (-) partout ailleurs.

• On définit de même $\mathbf{V'}_4$ avec R(a,2)=R(2,a)= - . Si on tentait de définir une relation R' qui serait identique à V_4 sauf que R'(1,3) vaudrait (-) et R'(3,1) vaudrait (+), celle ci s'avèrerait isomorphe à V_4 grâce à l'isomorphisme 1→3, 2→a, 3→1, a→2. V_4 et V'_4 sont notés K dans [16].

• Soit $\mathbf{W}_4$ la relation identique à V_4 sauf que $W_4(1,3)$=- au lieu de + ($W_4|\{1,2,3\}$ est donc une consécutivité). On pourrait définir la négation de W_4 (en permutant (+) et (-)) mais celle-ci s'avèrerait isomorphe à W_4 par l'isomorphisme 1→a, 2→3, 3→2, a→1.

Il existe un type de classe de voisinage non lopezien à 7 éléments noté $\mathbf{V}_7$ ainsi défini sur {1,2,3,4,5,6,7}: 1<2<3<4, 2<3<4<5, 3<4<5<6, 4<5<6<7, 5<6<7<1, 6<7<1<2, 7<1<2<3. C'est un tournoi (c'est à dire une relation binaire sans arête neutre) appelé communément $\mathbf{T}_3$.

Les huit types de classes de voisinage non lopeziennes réflexives à 5 et 6 éléments sont les suivants:

• La relation R=$\mathbf{S}_3$ est définie ainsi sur {1,2,3,4,5,6}, 1<2<3, 2<3<4, 3<4<5, 4<5<6, 5<6<1, (1,4) (2,5) et (3,6) sont vides. On peut définir $\mathbf{S'}_3$ qui ne diffère de S_3 que par le fait que les arêtes neutres sont toutes pleines.

• La relation $R=\mathbf{V}_6$ est définie ainsi sur $\{a,a',1,2,3,4\}$: on a $a<1<2$, $1<2<3$, $2<3<4$, $3<4<a$, $4<a<1$, $a'<a$ et $\{a,a'\}$ est un R-intervalle c'est à dire qu'on a aussi $a'<1<2$, $1<2<3$, $2<3<4$, $3<4<a'$, $4<a'<1$. Le type V_6 est une restriction du type V_7.

• La relation $R=\mathbf{X}_5$ est définie ainsi sur $\{a,a',1,2,3\}$: on a $1<2<3$, $2<3<a'$, $3<a'<a$, $a'<a<1$, $a<1<2$. X_5 est aussi appelé *tournoi rotatif d'ordre 2* et noté communément $\mathbf{T}_2$. Le type X_5 est une restriction du type V_6.

• On définit $\mathbf{C}_6$ ainsi: dans un 3-cycle chacun des 3 éléments est remplacé par des 2-chaînes: $R(1,2)=R(2,3)=R(3,1)=R(3,3')=R(1',2')=R(2',3')=R(3',1')=R(1',2)=R(1,2')=R(2',3)=R(2,3')=R(3',1)=R(3,1')=R(1,1')=R(2,2')=(+)$; $(-)$ ailleurs.

• On définit $\mathbf{C}_5$ ainsi: dans un 3-cycle 2 éléments sont remplacés chacun par des 2-chaînes: le type C_5 est une restriction du type C_6 sur 5 éléments quelconques de la base. (C_5 est noté M dans [15] et [3]).

Enfin D_{24} et D'_{24}, D_{17} et D'_{17} sont les quatre autres classes de voisinage réflexives à 5 éléments ainsi définies:

• Sur $\{a,1,2,3,4\}$ définissons D_{17} comme suit: $D_{17}|\{1,2,3,4\}$ est la presque-chaîne $1<2<3$, $2<3<4$, $4<1$, $D_{17}|\{a,1,3\}$ et $D_{17}|\{a,1,4\}$ sont des cycles, $(-)$ ailleurs. D_{17} est autodual.

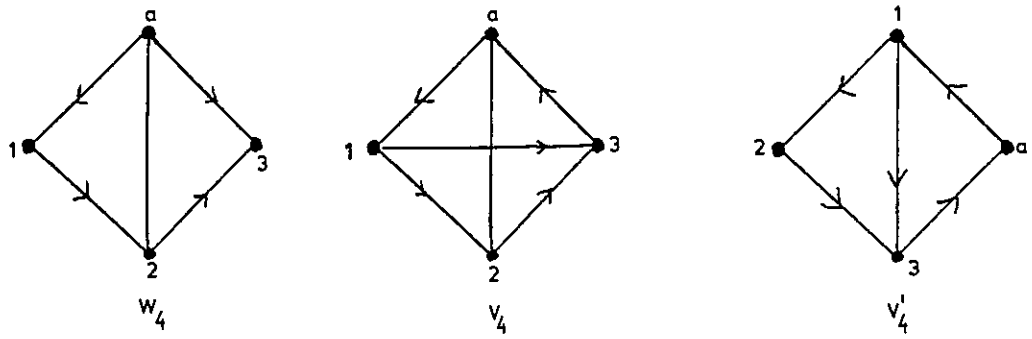
• On définit D'_{17} en remplaçant l'arête vide $(a,2)$ de D_{17} par une pleine. D'_{17} est, comme D_{17}, autodual.

• Sur $\{a,1,2,3,4\}$ définissons D_{24} ainsi: $D_{24}|\{1,2,3,4\}$ est la presque-chaîne $1<2<3$, $2<3<4$, $(1,4)$ vide, $D_{24}|\{a,1,3\}$ et $D_{24}|\{a,1,4\}$ sont des cycles, $(-)$ ailleurs. D_{24} est autodual.

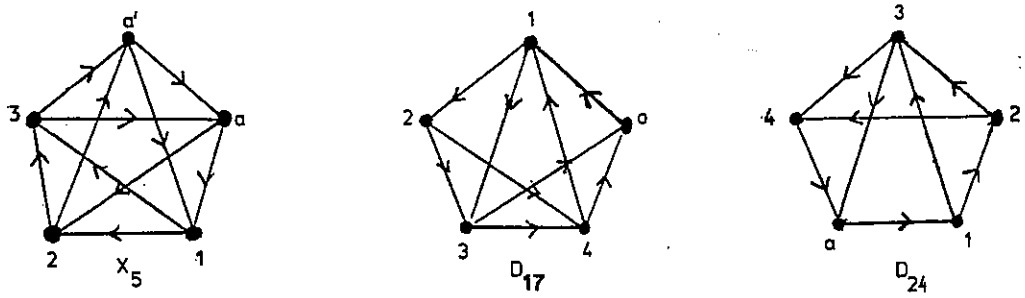
• On définit D'_{24} en remplaçant les deux arêtes vides $(a,2)$ et $(1,4)$ de D_{24} par des pleines. D'_{24} est, comme D_{24}, autodual.

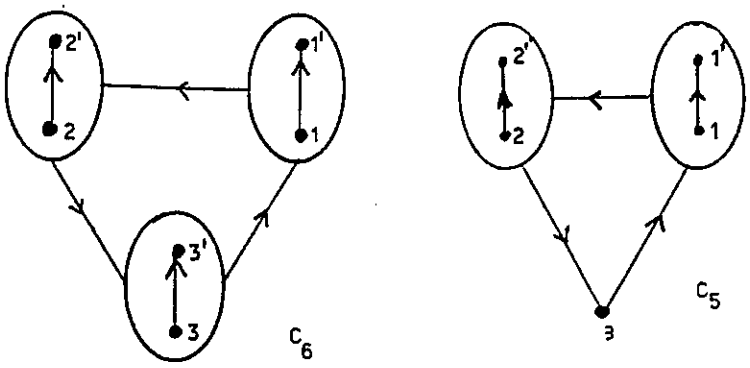
. . . fin de la liste des classes de voisinage non lopeziennes . . .

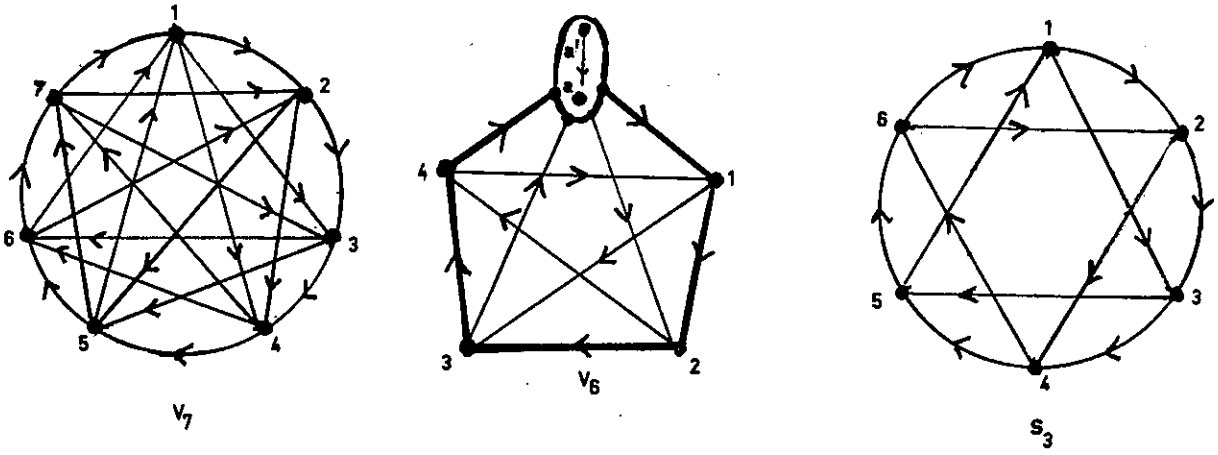
DIAGRAMMES REPRÉSENTATIFS DES CLASSES DE VOISINAGE NON LOPEZIENNES:



V_4, V'_4 s'obtiennent depuis W_4 par négation et (ou) orientation des arêtes non orientées.







Le lecteur regrettera comme nous l'incohérence des notations issues de théories diverses et d'articles disparates. Les auteurs de promettent d'y mettre un jour bon ordre... La plupart de ces notations comme celles du § 7.3 sont dues à G. Lopez ([16]) et évidemment totalement incompatibles avec celles de G. Lopez ([3]).

Pour obtenir *toutes* les classes de voisinage il faut rajouter à cette liste les types lopeziens finis ainsi que les types ω et ω^* (et prendre les deux versions, réflexive ou irréflexive, de chaque type mentionné).

Les consécutivités infinies ne sont pas des classes de voisinage (ni même des classes d'hypomorphie). Ces consécutivités infinies sont les seuls types lopeziens à ne pas être des classes d'hypomorphie. Les consécutivités infinies sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}^-$ sont néanmoins des grands motifs, et les seuls grands motifs avec ω, ω^* et variantes à être reconstructibles.

Les *théorèmes d'exhaustivité de la liste des types des classes d'hypomorphie et des classes de voisinage* prouvera que la liste complète des types de classes d'hypomorphie sera constituée de la présente liste des types classes de voisinages à laquelle il faudra adjoindre les types des déformées [voir la liste au §7.3] connexes finies réflexives et des déformées connexes finies irréflexives correspondantes, ainsi que les types des paires orientées D_{26} et D_{27}.

§7.3 Rappel de la liste des types de déformées réflexives.

Rappelons l'hypothèse de réflexivité (par exemple) qu'on maintient tout au long de ces §7 et 8.

Donnons la liste des types de relations binaires non Fraïssé-reconstructibles en suivant la nomenclature de [16] où elles sont appelées des *déformées* et où elles sont désignées par des $\mathbf{D}_n$ (voir figures page 199). Pour alléger le discours on omettra le plus souvent le mot "type". *Le théorème d'exhaustivité de la liste des (types de) déformées* montrera au §7.7 que la liste donnée ici est exhaustive.

Pour des raisons historiques on mentionnera D_{16}, D_{17}, D'_{16}, D'_{17}, D_{24}, D_{25}, D'_{24} et D'_{25} qui *ne sont pas des déformées mais des classes de voisinage*.

On notera systématiquement $\mathbf{D}'_n$ la relation qu'on obtient à partir de D_n en y remplaçant les arêtes non orientées (-,-) par des arêtes (+,+) et réciproquement, en d'autres termes D'_n est la négation de D^*_n (la négation étant par définition la relation obtenue en permutant les rôles de (+) et de (-)).

• Sur {a,b}, $\mathbf{D}_1$ vaut toujours (+), $\mathbf{D}_0$ est sa négation [i.e. la relation qui vaut (+) quand D_0 vaut (-) et réciproquement] (D_0 et D_1 sont des presque-chaînes, ce sont des relations non Fraïssé-reconstructibles mais pas des classes d'hypomorphie; je les mentionne pour justifier les trous dans la liste). $\mathbf{D}_2$ vaut (+) sur (a,b) et (-) sur (b,a), c'est une chaîne et une classe d'hypomorphie.

• $\mathbf{D}_3$ est le 3-cycle a<b,b<c,c<a et $\mathbf{D}_4$ la 3-chaîne a<b<c.

• Sur {a,b,c}, $\mathbf{D}_7$ est défini ainsi: $D_7(a,c)=D_7(b,c)=(+)$, D_7 vaut (-) ailleurs, $\mathbf{D}_9$ est son dual. On peut définir D'_7 par: $D'_7(a,c)=D'_7(b,c)=(-)$ et (+) partout ailleurs. Idem pour D'_9. Ces quatre précédentes relations sont

appelées des **pointes.** Sur le même ensemble, $\mathbf{D}_8$ est défini par $D_8(a,c)=D_8(c,b)=(+)$ et D_8 vaut (-) ailleurs; c'est une presque-chaîne (et une consécutivité) qui est Fraïssé-hypomorphe mais non isomorphe à D_7 ou à D_9. On peut définir D'_8.

• Sur $\{a,b,c\}$, $\mathbf{D}_{18}$ est défini par $D_{18}(a,b)=D_{18}(b,a)=D_{18}(b,c)=(+)$ et (-) ailleurs; $\mathbf{D}_{19}$ par $D_{19}(a,b)=D_{19}(b,a)=D_{19}(c,b)=(+)$ et (-) ailleurs. On constate que D'_{18} est isomorphe à D_{19}. Ce ne sont pas des classes d'hypomorphie.

• $\mathbf{D}_5$ et $\mathbf{D}_6$ de base $\{a,b,c,d\}$ sont appelés des **diamants:** D_5 et D_6 restreints à $\{a,b,c\}$ sont les cycles $a<b,b<c,c<a$ mod D_6, $b<a,c<b,a<c$ mod D_5; $D_5(d,a)=D_5(d,b)=D_5(d,c)=D_6(a,d)=D_6(b,d)=D_6(c,d)=(+)$; (-) partout ailleurs.

• Sur $\{a,1,2,3\}$, $\mathbf{D}_{10}$ et $\mathbf{D}_{11}$ dont définis par: $D_{10}|\{1,2,3\}$ est la chaîne $1<2<3$ et $D_{10}(a,1)$ vaut (+) et (-) partout ailleurs. $D_{11}|\{1,2,3\}$ est la chaîne $1>2>3$ et $D_{11}(1,a)$ vaut (+) et (-) ailleurs. D_{10} et D_{11} sont duales. On peut définir D'_{11} et D'_{10} isomorphes aux négations de D_{10} et D_{11}.

• Sur $\{a,1,2,3\}$, $\mathbf{D}_{12}$ ne diffère de D_{11} que par le fait que $D_{12}(a,2)=D_{12}(2,a)=(+)$. $\mathbf{D}_{13}$ ne diffère de D_{10} que par le fait que $D_{13}(a,2)=D_{13}(2,a)=(+)$. On peut définir D'_{12} et D'_{13}.

• Sur $\{a,1,2,3,4\}$ définissons $\mathbf{D}_{14}$ ainsi: $D_{14}|\{1,2,3,4\}$ est la chaîne $1<2<3<4$, $D_{14}|\{a,1,3\}$ et $D_{14}|\{a,1,4\}$ sont des cycles, (-) ailleurs. $\mathbf{D}_{15}$ est le dual de D_{14}; on peut définir D'_{14} et D'_{15}.

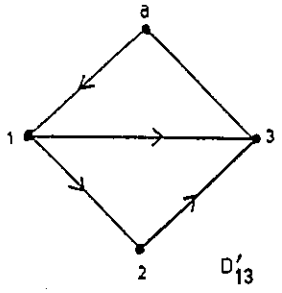
• $\mathbf{D}_{22}$ ne diffère de D_{14} que par le fait que $D_{22}(4,1)=D_{22}(1,4)=(+)$. On peut définir le dual $\mathbf{D}_{23}$ ainsi que D'_{22} (qui est isomorphe à D_{23}) et D'_{23} (qui est isomorphe à D_{22}).

• Sur $\{a,1,2,3,4,5\}$ on définit $\mathbf{D}_{20}$ ainsi: $D_{20}|\{1,2,3,4,5\}$ est la chaîne $1<2<3<4<5$, $D_{20}|\{a,3,4,5\}$ est la chaîne $3<4<5<a$, $D_{20}|\{a,1,2\}$ est la chaîne $a<1<2$; $\mathbf{D}_{21}$ est le dual de D_{20}.

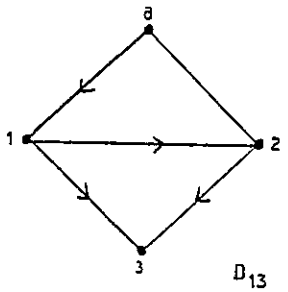
• Rappelons que le singleton réflexif est non reconstructible (il est déformé du singleton irréflexif).

— fin de la liste —

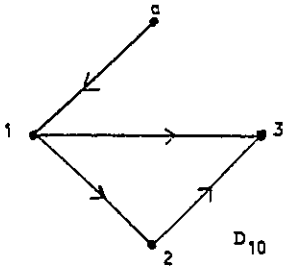
DIAGRAMMES DES PRINCIPAUX DÉFORMÉS (les D_n).



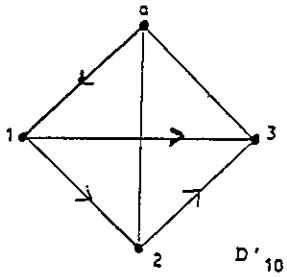
D'_{13}



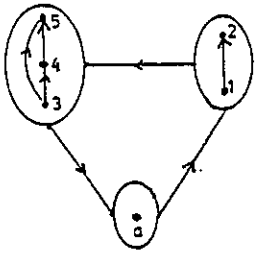
D_{13}



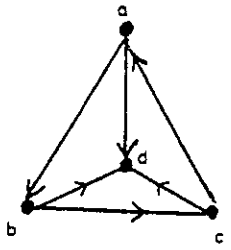
D_{10}



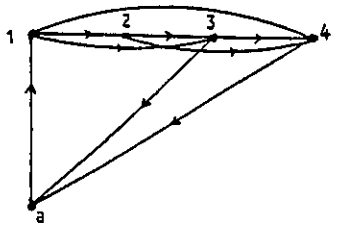
D'_{10}



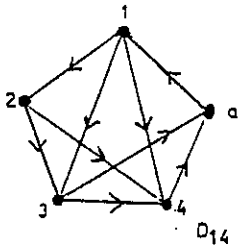
D_{20}



D_6



D_{22}



D_{14}

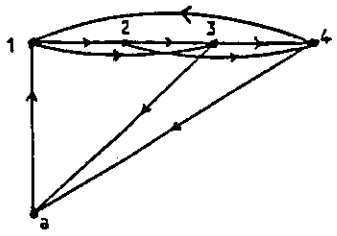
∘ Rappelons D_{26} et D_{27} (définis au §2.2) sur {a,b}: $D_{26}(a,b)=D_{26}(a,a)=(+)$, $D_{26}(b,a)=D_{26}(b,b)=(-)$ et $D_{27}=D_{26}^{*}$. Ce sont des relations binaires non reconstructibles qui ne sont ni réflexives ni irréflexives qui sont des classes d'hypomorphie. D_{28} et D'_{28} définis au §2.2 par $D_{28}(a,b)=D_{28}(b,a)=(+)$, $D_{28}(a,a)=(+)$, $D_{28}(b,b)=(-)$ sont des déformées ni réflexives ni irréflexives mais ne sont pas des classes d'hypomorphie.

Dans [16] G. Lopez définit les relations suivantes sans voir qu'elles sont reconstructibles et leur attribue faussement l'épithète de "déformée":

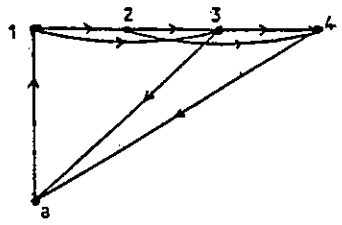
∘ $\mathbf{D_{24}}$ ne diffère de D_{14} que par le fait que $D_{24}(4,1)=D_{24}(1,4)=(-)$. On peut définir le dual D_{25} de D_{24} ainsi que D'_{24} et D'_{25} **mais** $\mathbf{D_{24}\approx D_{25}}$ **et** $\mathbf{D'_{24}\approx D'_{25}}$. Donnons un isomorphisme de D_{24} sur D_{25} : $a\leftrightarrow 1$, $2\leftrightarrow 4$, $3\leftrightarrow 3$.

∘ $\mathbf{D_{17}}$ ne diffère de D_{14} que par le fait que $D_{17}(1,4)=(-)$ et $D_{17}(4,1)=(+)$. ($D_{17}|\{1,2,3,4\}$ n'est plus qu'une presque-chaîne). On peut définir D'_{17} et les duaux D_{16} et D'_{16} à D_{17} et D'_{17} **mais** $\mathbf{D_{16}\approx D_{17}}$ **et** $\mathbf{D'_{16}\approx D'_{17}}$.

D_{16}, D_{17}, D'_{16}, D'_{17}, D_{24}, D_{25}, D'_{24}, D'_{25} sont les seules classes d'hypomorphie parmi les D_n ou D'_n avec les déformées D_0 à D_4 à être autoduales.



D_{17} (n'est pas une déformée)



D_{24} (n'est pas une déformée)

§7.4. Une batterie de lemmes.

LEMME *(i)* [Gérard Lopez et Claire Rauzy, [17]]. Une classe d'hypomorphie de cardinal infini ou fini ≥4 ne contient pas de pointe (c'est à dire ne contient pas D_7 ni D_9 ni D'_7 ni D'_9).

On pourra dire que les pointes D_7 et D_9 et variantes sont des *interdits* de classe d'hypomorphie (voir §5.3).

PREUVE. Soit R et R' deux relations binaires hypomorphes. Soit {a,b,c} un 3-emble de R vérifiant $R|(b,a)=(+,-)$, $R|(c,a)=(+,-)$ et $R|(b,c)=(-,-)$ tel qu'un (R,R')-chemin $(a,x,\cdots,b)$ soit de longueur minimum parmi tous les chemins de ce genre possibles pour toutes les restrictions de type D_7 de R. De tels chemins existent car (a,b) ne change pas. On doit avoir aussi $R|(b,a)=(+,-)$, $R|(c,a)=(+,-)$ et $R|(b,c)=(-,-)$. Supposons quitte à permuter R et R' que $R|(x,a)=(+,-)$. $R|\{a,b,x\}$ ne pouvant être un 3-cycle, $R'|\{a,b,x\}$ n'en n'est pas un non plus et donc $R'|(b,x)=(+,-)$. De même $R'|(c,x)=(+,-)$. $R'|\{b,x,c\}$ est de type D_7, donc $R|\{b,x,c\}$ aussi et le chemin $(x,\cdots,b)$ est plus court que le précédent — absurde. □

LEMME *(ii)* [Gérard Lopez et Claire Rauzy, [17]]. Une classe d'hypomorphie de cardinal infini ou fini ≥5 ne contient pas D_{18} ni D_{19}.

PREUVE. Soit R et R' deux relations binaires hypomorphes. Soit {a,b,c} un 3-emble de R vérifiant $R|(b,a)=(+,-)$, $R|(a,c)=(+,+)$ et $R|(b,c)=(-,-)$ tel qu'un (R,R')-chemin $(a,x,\cdots,b)$ soit de longueur minimum parmi tous les chemins de ce genre possibles pour toutes les restrictions de type D_{19} de R. Supposons quitte à permuter R et R' que $R|(x,a)=(+,-)$. L'hypomorphie appliquée à {a,b,x} impose à (x,b) d'être orienté et on doit avoir $R'|(b,x)=(+,-)$. L'hypomorphie appliquée à {a,x,c} exige que (x,c) soit plein ou orienté. Si (x,c) est plein $R'|\{b,x,c\}$ est de type D_{19} ainsi donc

que $R|\{b,x,c\}$ et le (R,R')-chemin $(x,\cdots,b)$ est plus court que le précédent. Si (x,c) est orienté on doit d'après le lemme *(i)* appliqué sur $\{a,x,c\}$ avoir $R'|(x,c)=(+,-)$. L'hypomorphie sur $\{a,c,x\}$ exige alors que $R|(c,x)=(+,-)$; puis l'hypomorphie sur $\{b,c,x\}$ que $R|(x,b)=(+,-)$. Si card $R \geq 5$ $R|\{a,b,c,x\}$ et $R'|\{a,b,c,x\}$ devraient être isomorphes or dans R une flèche part du seul élément c incident à deux arêtes neutres, dans R' une flèche au contraire arrive vers ce seul élément ($R|\{a,b,c,x\}$ est de type D'_{13} et $R'|\{a,b,c,x\}$ de type D_{12}). □

LEMME *(ii)bis* . Une classe de voisinage de cardinal infini ou fini ≥ 4 ne contient pas D_{18} ni D_{19}.

PREUVE. La preuve est la même. En effet l'hypothèse de cardinalité ≥ 5 ne sert que pour affirmer que $R|\{a,b,c,x\}$ et $R'|\{a,b,c,x\}$ devraient être isomorphes; mais c'est vrai également si R est une classe de voisinage à 4 éléments pour un R' bien choisi (par définition des classes de voisinage). □

LEMME *(iii)* [Gérard Lopez et Claire Rauzy, [17]]. Une classe d'hypomorphie de cardinal infini ou fini ≥ 5 ne contient pas de diamant.

PREUVE. Soit R et R' deux relations binaires hypomorphes. Soit $\{a,b,c,d\}$ un 4-emble de R vérifiant $R|(a,b)=R|(a,c)=R|(a,d)=(+,-)$, et $b<c, c<d, d<b$ mod R tel qu'un (R,R')-chemin $(a,x,\cdots,b)$ soit de longueur minimum parmi tous les chemins de ce genre possibles pour toutes les restrictions de R qui sont des R-diamants pourvus d'un R-minimum; un tel chemin existe car (a,b) ne s'inverse pas, le R-minimum devant rester un R'-minimum. Supposons quitte à permuter R et R' que $R|(a,x)=(+,-)$. $R|\{a,b,x\}$ ne pouvant d'après le lemme *(i)* être de type D_9, (b,x) doit être orienté. $R|\{a,b,x\}$ n'étant pas un cycle il faut que $R'|(x,b)=(+,-)$. Et de même $R'|(x,c)=R'|(x,d)=(+,-)$. $R'|\{x,b,c,d\}$ est donc un diamant de R'-minimum x et il en va donc de même

pour $R|\{x,b,c,d\}$ de R-minimum x. Le chemin $(x,\cdots,b)$ est plus court que le précédent. □

LEMME *(iv)* [Gérard Lopez et Claire Rauzy, [17]]. Si les relations binaires hypomorphes R et R′ de cardinal infini ou fini ≥4 ne forment qu'une (R,R′)-classe, les 3-consécutivités se dualisent en passant de R à R′.

PREUVE. Soit $c<a$, $a<b$ mod R une 3-consécutivité d'une classe d'hypomorphie R qu'on suppose par l'absurde conservée dans R′, telle qu'un (R,R′)-chemin $(a,x,\cdots,b)$ soit de longueur minimum parmi tous les chemins de ce genre possibles pour toutes les 3-consécutivités conservées de R. Supposons quitte à permuter R et R′ que $R|(a,x)=(+,-)$. $R|\{a,x,b\}$ ne devant être de type D_9 (d'après le lemme *(i)*) il faut que (x,b) soit orienté; $\{a,b,x\}$ ne pouvant être un R-cycle il faut que $R'|(x,b)=(+,-)$. L'arête (x,c) ne peut être neutre car $R'|\{c,a,x\}$ serait de type D_7. L'arête (x,c) est donc orientée et comme d'après le lemme *(i)* D_9 est interdit dans R′, il faut que $R'|(c,x)=(+,-)$. L'ensemble $\{c,x,b\}$ est donc une 3-consécutivité mod R et R′. Mais $\{a,x,c\}$ est une R′-chaîne et il est donc nécessaire que dans R on ait aussi $R|(c,x)=(+,-)$. La consécutivité $\{c,x,b\}$ ne se dualise pas et le chemin $(x,\cdots,b)$ de x à b extrait de celui qui allait de *a* à b est plus court que ce dernier — absurde. □

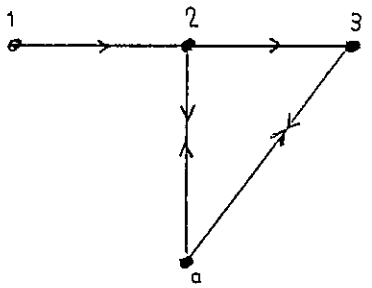
LEMME *(v)* [Gérard Lopez et Claire Rauzy, [17]]. Si les relations binaires hypomorphes R et R′ de cardinal infini ou fini ≥5 ne forment qu'une (R,R′)-classe, les 3-cycles se dualisent en passant de R à R′.

PREUVE. Soit $c<a$, $a<b$, $b<c$ mod R un 3-cycle d'une classe d'hypomorphie R qu'on suppose par l'absurde conservé dans R′ tel qu'un (R,R′)-chemin $(a,x,\cdots,b)$ soit de longueur minimum parmi tous les chemins possibles de ce genre associés à n'importe quel 3-cycle conservé de R. Supposons quitte à permuter R et R′ que $R|(a,x)=(+,-)$. $R|\{a,x,b\}$ ne devant (d'après le lemme

(*i*)) être de type D_9 il faut que (x,b) soit orienté; {a,b,x} ne pouvant être un R-cycle il faut que $R'|(x,b)=(+,-)$. L'arête (x,c) ne peut être neutre car $R'|\{c,a,x\}$ serait de type D_7. L'arête (x,c) est donc orientée et comme d'après le lemme *(iii)* les diamants sont interdits dans R' il faut que $R'|(c,x)=(+,-)$. {x,b,c} est donc un 3-cycle qui ne se dualise pas et le chemin (x,···,b) de x à b tiré de celui qui allait de a à b est plus court que ce dernier — absurde. □

Les diamants fournissent un contrexemple, pour le cardinal 4, à l'énoncé du lemme *(v)*.

Soit Δ_4 une relation binaire sur {1,2,3,a} vérifiant: (a,1) est neutre, (a,2) et (a,3) sont orientés et {1,2,3} est une 3-consécutivité d'extrémités 1 et 3. Δ_4 désigne donc plusieurs types.



LEMME *(vi)* [Gérard Lopez]. Une classe d'hypomorphie de cardinal infini ou fini ≥5 ne contient jamais Δ_4.

PREUVE. Supposons Δ_4 dans une classe d'hypomorphie. L'élément 1 étant le seul à être extrémité de deux arêtes neutres, est fixe dans tout isomorphisme de Δ_4 sur Δ_4, or la consécutivité s'inversant (d'après le lemme (*iv*)), le degré de 1 est (dans Δ_4) tantôt (1) tantôt (-1) — absurde. □

LEMME *(vi)bis* . Δ_4 n'est pas une classe de voisinage.

Même PREUVE. On n'utilise en effet que l'isomorphie de R et de son hypomorphe R' sur Δ_4. □

LEMME *(vii)* [Gérard Lopez]. Soit {1,2,3} une 3-consécutivité d'extrémités 1 et 3 dans une classe d'hypomorphie de cardinal ≥4. Soit a un élément de la classe d'hypomorphie autre que 1,2,3, tel que (a,2) soit orienté. Alors (a,1) et (a,3) sont orientés.

PREUVE . Si la conclusion était fausse {a,2,1} ou {a,2,3} serait grâce au lemme *(vi)* de type D_7 ou D_9 ce qui contre le lemme *(i)*. □

LEMME *(viii)* [Gérard Lopez]. Une classe d'hypomorphie de cardinal fini ≥5 contenant une 4-consécutivité est elle-même une consécutivité ou un cycle.

PREUVE . Dans une classe d'hypomorphie C supposée de cardinal fini ≥5 prenons une 4-consécutivité B et considérons une consécutivité (ou un cycle) maximale A (identifiée à {1,2,3,4,···,n}) contenant B et supposée ≠C. Un élément a non dans A est relié par une arête orientée à un p de A.

1er cas: (a,p) est orienté pour tout p de A. L'arête (1,4) étant neutre, {1,a,4} ne devant contenir ni D_7 ni D_9 grâce au lemme *(i)*, est une consécutivité. La relation {1,3,4,a} serait alors d'un type Δ_4 — contre le lemme *(vi)*.

2ème cas: Certaines arêtes sont neutres et donc d'après le lemme *(vii)* seules (a,1) ou (a,n) peuvent être orientées. Par exemple (a,1). Montrons que dans A∪{a} les arêtes neutres sont toutes vides ou toutes pleines. En effet (a,i) et (a,i+1) pour i∈{2,···,n-2} (et aussi i=n-1 si (a,n) est neutre) sont de même nature sans quoi D_{18} ou D_{19} se plongerait dans C contrairement à ce qu'affirme le lemme *(ii)*. Si par exemple (a,i) était plein pour tout i dans {2,···,n-1} tandis que les arêtes neutres de A seraient vides, alors D_{18} ou D_{19} se plongerait dans {1,3,a} contrairement à l'affirmation du lemme *(ii)*. L'identité de nature des arêtes neutres étant acquise, le lemme *(i)* appliqué à {a,1,2} montre que R|(a,1)=R|(1,2). Par hypothèse de maximalité de A, A∪{a} ne doit pas être une consécutivité, donc (a,n) ne peut être neutre; A∪{a} ne doit pas être un cycle non plus,

donc (a,n) ne peut être orienté que de a vers n. Dans ce dernier cas où $C|(a,n)=(+,-)$, $\{n-1,n,a\}$ est du type D_7 et le lemme *(i)* donne la contradiction finale. □

Le lemme *(viii)* sera évident pour les classes d'hypomorphie infinies quand celles-ci seront connues c'est à dire au lemme *(xvii)*. Il apparaîtra aussi qu'une classe d'hypomorphie de cardinal infini ou fini ≥5 ne contient pas de 4-cycle.

LEMME *(ix)* . Soit R et R' deux relations binaires hypomorphes sur une base de cardinal fini ≥4 ne formant qu'une seule (R,R')-classe de différence et qui ne sont ni un cycle ni une consécutivité. Alors les extrémités d'une arête neutre quelconque de R (ou R') sont liées par une 3-consécutivité changeante.

Pour les besoins de ce lemme disons qu'un chemin $(a,b,c,d,\cdots)$ est *à sens unique* si $R|(a,b)=R(b,c)=R|(c,d)=\cdots$.

PREUVE du lemme. Soit, dans une (R,R')-classe de différence, (x,y) une paire neutre dont les extrémités ne sont pas liées par une 3-consécutivité changeante et $(x,x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}=y_1,x_{n-1}=y)$ un (R,R')-chemin de différence reliant x à y qui ne serait *pas* à sens unique et de longueur minimum n parmi tous les (R,R')-chemins *non à sens unique* reliant les extrémités d'une arête neutre (x,y) quelconque de la base. Nous allons montrer que le chemin de longueur minimum en question est à sens unique, ce qui constituera une absurdité prouvant que les (R,R')-chemins reliant les extrémités d'une arête neutre sont à sens unique. Si $(x_1,\cdots,y)$ n'est pas à sens unique alors, par minimalité, (x_1,y) est orientée, et par hypomorphie sur $\{x,x_1,y\}$, dans un sens faisant de (x,x_1,y) un chemin à sens unique; x et y sont alors reliés par la 3-consécutivité changeante (x,x_1,y)

— contraire aux hypothèses de départ. De même $(x,x_1,\cdots,y_1)$ est à sens unique et donc tout le chemin $(x,x_1,x_2,\cdots,y_1,y)$. Les arêtes (x_i,x_j) "intermédiaires" [c'est à dire vérifiant $i\neq j$ et $i\neq j\pm 1$] ne peuvent, par minimalité, changer. Elles doivent, pour éviter des cycles qui en vertu du lemme *(v)* se dualisent, être neutres. Pour éviter que $\{x_1,x_2,y\}$ soit de type D_{18} ou D_{19} il faut que (x_2,y) soit de même nature que (x_1,y) et de proche en proche toutes les arêtes intermédiaires du chemin sont de même nature. Le chemin est donc une consécutivité qui d'après le lemme *(viii)* doit être de cardinal 3. □

On peut voir, mais nous n'en aurons pas besoin, que, sous les mêmes hypothèses qu'au lemme *(ix)*, toute arête neutre forme avec tout élément (qui n'est pas une extrémité de cette arête) une 3-consécutivté changeante. Exemple. Considérons sur $\{1,2,3,4\}$ les deux chaînes $1<3<2<4$ mod. R et $2<1<4<3$ mod R'; $(1,2,3,4)$ est le seul (R,R')-chemin allant de 1 à 4; il est de longueur 4 car $(1,4)$ n'est pas neutre. Par contre si l'arête est non changeante mais pas neutre, un chemin à sens unique n'existe pas toujours pour relier ses extrémités, c'est par exemple le cas de l'arête $(2,3)$ de D_{13}.

LEMME *(x)* . Dans une relation binaire de cardinal infini ou fini ≥ 5, si une partie P d'une classe d'hypomorphie est pourvue d'un maximum a (c'est à dire vérifie $R(x,a)=+\neq R(a,x)$ pour tout $x \in P-\{a\}$) alors cette partie P est une chaîne. Si la relation est de cardinal ≤ 4 alors P ne peut qu'être une chaîne, D_7 ou un diamant.

PREUVE . Si la partie $P-\{a\}$ n'est pas une chaîne elle inclut soit un 3-cycle soit une paire (b,c) non orientée, ces deux éventualités étant irréalisables d'après, respectivement les lemmes *(iii)* et *(i)*. Si card $(R)\leq 4$ l'énoncé découle du lemme *(i)*. □

§7.5. Lemme de restriction.

PRÉ-LEMME *(xi)*. Dans une classe de voisinage à 4 éléments qui n'est pas une consécutivité, il ne peut y avoir 2 arêtes non orientées adjacentes (i.e. ayant un sommet commun).

PREUVE. Soit R la classe de voisinage, R' une relation qui lui est hypomorphe et isomorphe et dont la base ne forme qu'une seule (R,R')-classe de différence. Soient (1,a) et (1,3) les deux arêtes neutres de l'énoncé et 2 l'élément restant. Utilisons le lemme *(ix)*. Les extrémités de l'arête (1,a) sont liés par une 3-consécutivité changeante. De même pour l'arête (1,3). Quitte à permuter R et R' on peut donc affirmer que $1<2, 2<a, 2<3$ mod R, et l'inverse mod R'. Le lemme *(i)* affirme donc que (a,3) est orienté. R est alors de type Δ_4 et le lemme *(vi)bis* permet de conclure. □

LEMME DE RESTRICTION *(xii)*. Toute partie propre F de cardinal ≥4 d'une classe d'hypomorphie non lopezienne R de cardinal fini ≥5, est une classe de voisinage (d'elle-même). (Plus précisément si la classe d'hypomorphie initiale R est une (R,R')-classe de différence, F est une (R|F,R'|F)-classe de différence sauf possiblement quand R|F est une presque-chaîne).

PREUVE . Contentons-nous pour l'instant d'une partie obtenue en enlevant un seul élément à |R|. Soit e un élément de la base E de la relation R qui est une unique (R,R')-classe pour une R' hypomorphe à R. Posons F=E-{e}.

Première situation à voir: chaque classe de différence de (R|F,R'|F) est réduite à un élément, il y a donc au moins 4 classes {a}, {b}, {c}, {d} dans F. Si e est un extremum de E (mod R ou mod R') alors, d'après le lemme *(x)*, E est une chaîne – absurde. Sinon on a par exemple

$R|(a,e)=R|(e,b)=(+,-)$. Le triplet (a,e,b) étant l'unique (R,R')-chemin de a vers b, (a,e) et (e,b) s'inversent dans R'. L'hypomorphie appliquée sur $\{a,b,e\}$ oblige l'arête (a,b) à être neutre. Soit c un autre élément de F. L'arête (c,e) doit être orientée pour qu'un (R,R')-chemin puisse relier *a* à c. Si $R|(c,e)=(+,-)$ alors (b,c) est neutre; si $R|(e,c)=(+,-)$ alors (a,c) est neutre. Dans les deux cas $\{a,c,b,e\}$, qui ne forme qu'une (R,R')-classe de différence, possède deux arêtes neutres adjacentes contrairement au pré-lemme précédent.

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que $F=E-\{e\}$ soit formé relativement à $(R|F,R'|F)$ d'au moins deux classes A et B et supposons que B a au moins deux éléments b et c (si A en possède plusieurs et B un seul on inverse les rôles de A et de B). Soit *a* un élément de A. Supposons d'abord (a,b) non orienté (donc aussi (a,c) puisque B est une $(R|F,R'|F)$-classe de différence). D'après le lemme *(ix)* il existe, si card $R\geq 5$, une consécutivité changeante reliant a à b laquelle ne peut être que (a,e,b). De même pour l'arête (a,c). $F'=\{a,b,c,e\}$ ne forme donc si card $R \geq 5$ qu'une seule $(R|F',R'|F')$-classe de différence. La cardinalité de E oblige F' à en être une partie propre et donc à être une R-classe de voisinage. R n'étant pas lopezienne le lemme *(viii)* empêche F' d'être une consécutivité. Les deux arêtes non orientées de F' contredisent alors le dernier pré-lemme. Les arêtes (a,b) ni (a,c) ne peuvent donc être toutes deux neutres.

Remarquons que dans un (R,R')-chemin de différence liant un élément a de A à e, l'avant dernier élément a' avant e est encore dans A.

Souvenons nous que A et B sont des intervalles de F et supposons donc par exemple, que $R|(a,b)=R|(a,c)=(+,-)$. Un (R,R')-chemin de différence reliant *a* à b doit être de la forme $(a,\cdots,a',e,b',\cdots,b)$ où $a'\in A$ et $b'\in B$ (éventuellement $a'=a$ et/ou $b'=b$). L'isomorphie entre $R|\{a',b',e\}$ et $R'|\{a',b',e\}$ exige, puisque (a',b') est orienté et non changeant, que $R|(e,b)=R|(e,a)$ pour éviter un 3-cycle modulo une des relations R ou R',

qui serait irréalisable modulo l'autre. Supposons quitte à échanger les rôles de R et R' que $R|(e,b)=R|(e,a)=(+,-)$. L'élément e est alors un R-majorant (ou un R-minorant) de $A \cup B$. En raisonnant de même avec les autres $(R|F,R'|F)$-classes de différence on voit, de proche en proche, que e est extremum de R. Grâce au lemme *(x)* on peut affirmer que R est une chaîne auquel cas $R|F$ est encore une $(R|F)$-classe de voisinage.

Procédons enfin à la récurrence. Il suffirait que la technique qui vient d'être utilisée pour E s'applique encore à F, c'est à dire que F soit non lopezien. Mais si F était lopezien et était une presque-chaîne alors il resterait encore une presque-chaîne (qui est une classe de voisinage) si on enlevait de F un nouvel élément. Si F était lopezien et était une consécutivité ou un cycle, il contiendrait, tant que son cardinal est ≥ 5, une 4-consécutivité ce qu'infirme le lemme *(viii)* puisque R est non lopezien. Finalement, que F soit lopezien ou non, la récurrence peut se poursuivre. □

D_{10} est une (D_{10},D_{11})-classe de différence mais sa restriction à $\{a,2,3\}$ n'est pas une classe de voisinage puisque même pas connexe!

En fait l'énoncé de ce lemme est vrai pour une partie F dès qu'elle est de cardinal ≥ 3 dans une classe R de cardinal fini ≥ 5 (on peut le déduire des lemmes *(i)*, *(ii)* et du corollaire 1 suivant). L'énoncé est vrai aussi si R est une classe de voisinage de cardinal fini ≥ 4.

Un lemme analogue se démontrerait de même pour *les parties propres <u>connexes</u> de tout cardinal dans une classe d'hypomorphie (même lopezienne) de tout cardinal (même infini)*. On pourra le vérifier directement sur la liste des classes d'hypomorphie lorsqu'elle sera définitivement établie. L'énoncé d'un tel lemme serait plus esthétique et plus général que celui du lemme *(xii)* puisque les parties de cardinal ≥ 4 dans une classe

d'hypomorphie non lopezienne de cardinal fini ≥5 sont connexes. Mais un tel lemme serait insuffisant pour la suite car il n'est pas aisé de vérifier qu'une partie est connexe ...

La pléthore de lemmes fait que le suivant, pourtant utilisé pour établir la liste des classes d'hypomorphie, végète dans ses fonctions de simple corollaire!

COROLLAIRE 1 [LOPEZ]. Dans une classe d'hypomorphie non lopezienne de cardinal fini ≥5 deux arêtes non orientées ne peuvent être adjacentes.

(Le mot "fini" s'avérera inutile quand on saura grâce au lemme *(xvii)* que les classes d'hypomorphie infinies sont toutes lopeziennes).

PREUVE . En effet une restriction à 4 éléments contenant les deux arêtes non orientées donnerait, grâce au dernier lemme de restriction, au pré-lemme *(xi)* et au lemme *(viii)*, une contradiction. □

Petit lemme 4 . Soit R une classe de voisinage de cardinal fini n ≥4 ou une classe d'hypomorphie de cardinal fini n ≥5. S'il existe dans R une chaîne maximale de longueur n-1 celle-ci est unique (au sens que sa base et l'ordre lui même sont chacun définis de manière unique) sauf si R est une presque-chaîne.

Ce petit lemme sera vérifié dans le prochain sous-paragraphe 7.6.2 pour chacune des classes d'hypomorphie inventoriées et on démontrera que l'inventaire est exhaustif. Ce petit lemme ne sera en fait utilisé que pour n=4 et 5.

Le petit lemme suivant est facile à établir.

Petit lemme 5 . Soit $\{1,2,3,\cdots,n-1,a\}$ une presque-chaîne non chaîne de cardinal fini n sans arête neutre où $1<2<3<\cdots<n-1$. Alors on a toujours $a<1$ et $n-1<a$.

§7.6. Recherche des classes d'hypomorphie finies.

§7.6.1.

Pour expliquer ma démarche j'annonce un mini-lemme *(xviii)* qui a sa place au §7.7 où il sera démontré:

Mini-lemme *(xviii)* . Les relations binaires finies non reconstructibles de cardinal ≥4 sont des classes d'hypomorphie non lopeziennes.

Pour trouver les relations binaires finies non reconstructibles il suffit donc, outre de regarder les relations binaires de cardinal 2 ou 3, de déterminer *toutes* les classes d'hypomorphie non lopeziennes finies. C'est ce qu'on va maintenant faire pour conclure que:

Les types des relations binaires non reconstructibles seront exactement les motifs finis, ce qui constituera le théorème d'exhaustivité n°2.

§7.6.2.

RECHERCHE EXHAUSTIVE DES CLASSES D'HYPOMORPHIE ET DES CLASSES DE VOISINAGE non lopeziennes finies de cardinal ≤6.

Appelons **hauteur** d'une relation binaire *finie* R la longueur (i.e. la cardinalité) maximale que peut avoir une chaîne extraite de R. Nous noterons habituellement *r* cette hauteur.

Nous allons établir la liste des types des classes d'hypomorphie non lopeziennes finies en prenant comme guide le cardinal n et la hauteur r de la classe. Et ceci par récurrence: la liste des classes de voisinage

établie pour un cardinal n sera utilisée dans la recherche des classes d'hypomorphie de cardinal n+1. On verra au §7.7 suivant qu'il n'y a plus de classe d'hypomorphie non lopezienne dès que le cardinal n est infini ou fini ≥7.

Commençons la recherche: On vérifie qu'il n'y a pas de classe de voisinage non lopezienne à 3 éléments.

Recherche des classes de voisinage non lopeziennes R de hauteur r=2 sur une base E à 4 éléments.

Supposons d'abord l'existence d'une arête non orientée (1,3). Il existe un (R,R')-chemin liant 1 à 3 qui ne peut être que de la forme (1,2,3) ou (1,2,4,3) 2 et 4 étant les autres éléments de la base. Dans ce deuxième cas, (2,3) devant être orienté à cause du lemme *(xi)*, le lemme *(i)* lui imposerait de changer d'orientation; alors (1,2,3) serait un (R,R')-chemin liant 1 à 3. Finalement il y a toujours quand (1,3) est neutre, un (R,R')-chemin à 3 éléments reliant 1 à 3. Toujours dans ce cas il existe (quitte à permuter les rôles de R et R' et/ou des éléments 2 et 4) un (R,R')-chemin (1,2,3) avec un élément "2" vérifiant R(1,2)=R(2,3)=+. L'arête (4,1) doit être orientée pour ne pas faire cohabiter deux arêtes adjacentes non orientées; si on avait R(1,4)=+, (2,4) ne pourrait être ni orienté (à cause de r=2) ni non orienté car 1 serait minimum dans {1,2,4} et R|{1,2,4} ne serait pas une classe de voisinage; on a donc R(4,1)=+ et on voit aussi que R(3,4)=+. Une orientation quelconque de (2,4) donnerait la valeur r=3 dans {2,3,4} ou dans {1,2,4}; donc (2,4) est non orienté et alors R est soit un 4-cycle (si les 2 arêtes non orientées sont de même nature) soit W_4 .

Si maintenant toutes les arêtes sont orientées trois éléments quelconques

1,2,3 forment un cycle pour qu'on puisse avoir r=2. {1,2,4} en forme un aussi, et {2,3,4} ne peut alors en constituer un !

Recherchons maintenant les autres classes d'hypomorphie de cardinal 4 et de hauteur r=2 sur un ensemble {a,b,c,d}. Le seul cas non traité par le raisonnement précédent est celui où deux arêtes adjacentes au même sommet *a* sont neutres et lient a à b et à c. R devant être une classe d'hypomorphie, *a* est lié au dernier sommet d par une flèche. Nécessairement (b,d) ou (c,d) est orientée pour que {b,c} et {a,d} ne soient pas dans des classes différentes, disons par exemple que (c,d) est orienté. L'hypomorphie appliquée à {a,c,d} montre que R y est une consécutivité changeante. Si (b,d) était orienté, {a,b,d} devrait aussi être une consécutivité changeante, alors c, seul élément incident à aucune arête neutre, serait conservé par isomorphisme de R sur R' alors que son degré ne serait pas maintenu; Par suite (b,d) est neutre. Pour que b soit dans la même (R,R')-classe que le reste il faut que (b,c) soit orienté, par suite {b,c,d} est une consécutivité changeante et finalement {a,b,c,d} est une consécutivité, donc lopezienne. — contradiction.

Recherche des classes d'hypomorphie et classes de voisinage non lopeziens R de hauteur r=3 sur une base E à 4 éléments. Soit A la chaîne 1<2<3 et *a* l'autre élément. L'élément *a* est incident à au plus deux arêtes neutres. S'il existe effectivement deux arêtes neutres, elles ne peuvent être (a,1) et (a,3) car D_7 ou D_9 apparaîtrait alors. Si ces arêtes neutres sont de même nature (deux pleines ou deux vides) on tombe sur D_{10}, D_{11} ou D'_{10}, D'_{11} (qui ne sont pas des classes de voisinage). Si ces deux arêtes neutres ne sont pas de même nature (une pleine, une vide) on aboutit à D_{12}, D_{13} ou

D'_{12}, D'_{13} (qui ne sont pas non plus des classes de voisinage). Supposons donc qu'il existe au plus une seule arête non orientée incidente à *a*. Si la seule arête non orientée est (a,1) ou (a,3) alors A est une presque-chaîne. Si (a,2) est non orientée, comme 1 ne peut être minimum ni 3 maximum de R on tombe sur V_4 ou V'_4. Si toutes les arêtes sont orientées la suite (R(a,1),R(a,2),R(a,3)) est soit (+++) [R est alors une chaîne], soit (++-) et on tombe sur une presque-chaîne, soit (+--) [presque-chaîne], soit (+-+) [diamant D_6], soit un dual des précédents, ce qui redonne une presque-chaîne ou aboutit au diamant D_5 qui comme D_6 est une classe d'hypomorphie mais pas une classe de voisinage.

Recherche des classes d'hypomorphies R non lopeziennes de hauteur r=3 sur une base E à 5 éléments. Prenons une partie A à 4 éléments a,1,2,3 dont trois forment une chaîne 1<2<3.

Supposons d'abord que A n'est pas une presque-chaîne. Dans chacune des classes de voisinage non lopeziennes à 4 éléments déjà vues la 3-chaîne est unique (petit lemme 4 du §7.5) et à chaque fois l'arête (a,2) qui joint l'élément *a* (qui n'est pas dans une 3-chaîne) au milieu *2* de la 3-chaîne, est neutre. Soit b l'élément restant de R. Si {b,1,2,3} n'est pas une presque-chaîne, (b,2) est neutre aussi et deux arêtes neutres sont ainsi adjacentes ce qui est impossible. Donc A ou B={b,1,2,3} est une presque-chaîne (et pas une chaîne puisque r=3), par exemple A.

On a alors par exemple a<1<2. Si {b,1,2,3} n'était pas une presque-chaîne (b,2) serait neutre, de même si {b,a,1,2} n'était pas une presque-chaîne (b,1) serait neutre, d'après le corollaire 1 du lemme *(xii)*, une de ces deux parties disons {b,1,2,3} est une presque-chaîne.

On a donc soit b<1<2 soit 2<3<b. Plaçons nous dans la première éventualité. Pour éviter le plongement de D_7 dans R il faut que (a,b) soit

orienté; {a,b,1,2} serait alors une 4-chaîne — absurde. Donc la première éventualité est exclue et on a 2<3<b.

Est donc acquis que A et B sont des presque-chaîne et que a<1<2 et 2<3<b. Commençons par supposer (a,b) neutre et donc (b,1) et (a,3) orientés. Pour éviter l'apparition de D_7 sur {a,1,b} il faut que 1<b et {1,2,3,b} deviendrait une 4-chaîne. Il faut donc admettre que (a,b) est orienté.

Dans ce cas si (1,b) est neutre l'orientation de (a,b) ne peut être (pour éviter un plongement de D_7) que b<a. Suivant que (3,a) est soit d'une autre nature que l'autre arête neutre (1,b), soit de même nature, soit orienté (nécessairement alors 3<a pour éviter une 4-chaîne) R est de type soit D_{22} ou D'_{22} (déformés) soit D_{24} ou D'_{24} ou D_{16} ou D'_{16} (classes de voisinages). Les duales D_{23} ou D'_{23} auraient pu être obtenues dans l'hypothèse où c'est {b,a,1,2} qui aurait été une presque-chaîne.

Reste à supposer (1,b) orienté ainsi que par symétrie (a,3) auquel cas R est finalement un tournoi. Pour éviter des 4-chaînes il faut que b<1 et 3<a. Si a<b apparaît avec R|{a,b,1,2} un diamant contrairement au lemme *(iii)*. Il faut donc que b<a et R est de type X_5 (c'est une classe de voisinage).

Recherche des classes de voisinage non lopeziennes R de hauteur r=4 sur une base E à 5 éléments. Notons 1<2<3<4 une chaîne et a l'élément restant de |R|. Il ne peut y avoir au plus qu'une arête neutre. Supposons d'abord que (a,1) est une arête neutre, alors pour éviter D_7 et D_9 il faut que 2<3<4<a; alors R est une presque-chaîne. Supposons maintenant que (a,2) est une arête neutre, on a de même a<1 et 3<4<a, et R est alors de type D_{14} ou D'_{14}. Si l'arête neutre était (a,3) on obtiendrait D_{15} ou D'_{15}.

Supposons maintenant qu'il n'y a pas d'arête neutre dans R. Faute d'arêtes neutres, toutes les 4-restrictions sont d'après le lemme de

restriction *(xii)*, des classes de voisinage sans arêtes neutres donc des presque-chaînes. Étudions la suite des valeurs de (a,1), (a,2),···,(a,4). Une alternance (···,+,−,···,+,···) ferait apparaître un diamant, donc il ne peut apparaître qu'un seul changement (···,+,−,···) ou (···,−,+,···). Un changement (···,+,−,···) au moins est nécessaire si R n'est pas une chaîne. Considérons donc la suite obtenue. La suite (+++−) fait de R une presque-chaîne, (++−−) rend R de type C_5, (+−−−) fait de R une presque-chaîne.

Recherche des classes de voisinage non lopeziennes R de hauteur r=2 sur une base E à ≥5 éléments. On sait (n°5.1 de [15]) qu'il n'y en a pas ce que nous allons revérifier. Si V est une classe de voisinage à 4 éléments de R, elle ne peut être une presque-chaîne (car alors la hauteur serait 4 ou 3) et ne peut donc être qu'un cycle, une consécutivité ou W_4. Soit 1<2 une chaîne de R. 1 et 2 sont donc chacun extrémité d'une arête neutre. Enlevons un élément de V autre que 1 ou 2 et rajoutons un élément restant de R−|V|. Une *nouvelle* arête neutre apparaît qui est d'extrémité 1 ou 2, ce qui donne deux arêtes neutres adjacentes contrairement au corollaire 1 du lemme *(xii)*.

Recherche des classes d'hypomorphie R de hauteur r=3 sur une base E à 6 éléments.

Nous allons montrer que de telle classes existent contrairement à ce qui est annoncé par G. Lopez en [16] au n°2.2.2.

Soit 1<2<3 une chaîne de R et a, b, c les 3 autres éléments.

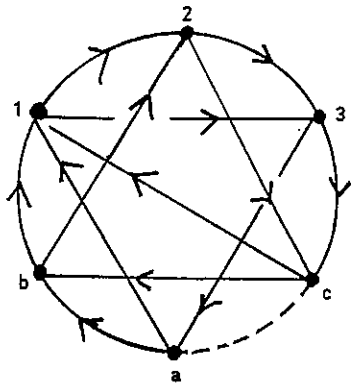
1er cas: il n'y a pas d'arête neutre dans R. D'après le lemme de restriction {1,2,3,a} est une classe de voisinage de cardinal 4 sans arête neutre et ne peut donc être qu'une presque-chaîne non chaîne d'après la

liste déjà vue des classes de voisinage de cardinal 4. On a donc $R|(3,a)=(+,-)$ et de même $R|(3,b)=R|(3,c)=(+,-)$. L'élément 3 est donc un R-minimum de {a,b,c} qui d'après le lemme *(iii)* ne peut pas être un cycle. {a,b,c} est donc une chaîne ainsi que {3,a,b,c} — absurde.

2ème cas: il existe dans R exactement 1 arête neutre. Il a donc dans {a,b,c} deux éléments au moins, par exemple b et c, qui sont reliés chacun à 1 à 2 et à 3 par des arêtes orientées. Comme dans le 1er cas, 3 est R-minimum de {b,c} ce qui est contraire au lemme *(i)* qui interdit D_9.

3ème cas: il y a dans R exactement deux arêtes neutres. D'après le lemme *(xi)* ces arêtes ne peuvent être adjacentes. Si deux sommets de {a,b,c} (disons a et b) sont liés par une arête neutre, alors a et b sont chacun reliés à chacun des sommets 1, 2 et 3 par des arêtes orientées et le raisonnement du premier cas s'applique encore.

Etudions dans la fin de ce troisième cas ce qui se passe si {a,b,c} ne possède pas d'arête neutre.



Soient par exemple a et b les éléments de {a,b,c} qui sont extrémités d'arêtes neutres. L'élément c est donc, lui, lié aux autres sommets par des arêtes orientées.

Montrons que 2 ne peut pas être extrémité d'une arête neutre, par exemple (2,a), en supposant que disons (b,3) est l'autre arête neutre. {a,1,2} doit être une consécutivité et on doit donc avoir a<1. {1,2,3,c} étant sans arête neutre doit être une presque chaîne et le petit lemme 5 dit alors que

c<1. R-{2} possède une arête neutre (b,3), son extrémité 3 n'est pas dans la même position par rapport aux autres éléments de R-{2}; R-{2} n'est donc pas une presque-chaîne. R-{2} est donc une classe de voisinage non lopezien de cardinal 5 doté d'exactement une arête neutre, par conséquent de type D_{16} ou variante. Or on voit à l'examen de ces classes de voisinages, que les 3 éléments qui ne sont pas extrémités de l'arête neutre forment un cycle; or les informations que nous avons déjà empêchent {1,a,c} de former un cycle. — contradiction qui démontre que seuls 1 et 3 sont extrémités d'arête neutre.

Soit *a* le sommet lié à 1 par une arête neutre et b celui lié à 3 par une arête neutre. Pour éviter D_9 et D_7 il faut que les restrictions {1,2,a}, {1,3,a}, {b,1,3}, {b,2,3}, {a,b,1} et {a,c,1} soient des consécutivités. On a par suite R|(2,a)=R|(3,a)=R|(b,1)=R|(b,2)=R|(a,b)=(+,-). L'ensemble {1,2,3,c} étant une presque-chaîne on doit avoir R|(c,1)=(+,-) et donc aussi R|(a,c)=(+,-). L'ensemble {2,3,a,c} étant une presque-chaîne non chaîne, ses presque extrémités 2 et c sont liées par R|(c,2)=(+,-). La restriction de R à {1,2,a,b,c} est de type D_{15} ou D'_{15}. Or D_{15} et D'_{15} ne sont pas des classes de voisinage ce qui contredit le lemme de restriction.

4ème cas: Il y a au moins 3 arêtes neutres dans R. Pour des raisons de place et pour éviter que deux d'entre elles soient adjacentes les arêtes neutres doivent lier par exmple a à 2, c à 1, b à 3. Comme dans le 2ème cas montrons que ce lien entre a et 2 est irréalisable. {a,1,2} doit être une consécutivité et on doit donc avoir a<1. R-{2} possède deux arêtes neutres. R-{2} est donc une classe de voisinage non lopezienne de cardinal 5 doté de deux arêtes neutres, par conséquent de type D_{24} ou variante. Or on voit à l'examen de dy type D_{24} (§7.1), que de l'unique élément qui n'est extrémité d'aucune arête neutre partent 2 arêtes et en arrivent autant; cet élément est *a*, on a donc c<a puisque manifestement 3<a et donc a<b. {1,3,c} devant

être une consécutivité il faut que 3<c et donc c<b. Le type de la classe d'hypomorphie nous est complêtement connu puisque comme au 3ème cas on a déjà b<1, 3<a, a<b. Si les trois arêtes neutres sont de même nature on tombe avec (1,2,3,c,a,b) sur une relation de type S_3 ou S'_3. Si elles sont de nature différente, par exemple deux pleines - une vide, ôtons une extrémité d'une arête pleine pour retomber sur une classe de voisinage de cardinal 5 possédant deux arêtes neutres de nature différente; or une telle classe de voisinage n'existe pas.

Recherche des classes d'hypomorphie non lopeziennes R de hauteur r=4 sur une base E à 6 éléments. Soit 1<2<3<4 une chaîne A maximale de E et a et a' les autres éléments. R-{a} est une classe de voisinage de cardinal 5 et de hauteur 4 ce qui, on vient de le voir n'est possible que si R-{a} est une presque chaîne ou de type C_5 et de même pour R-{a'}.

1er cas: R possède exactement une arête neutre.

1er sous-cas (1,a') est cette arête neutre. Alors {1,2,3,4,a'} est la presque-chaîne 1<2, 2<3<4<a'. R-{1} doit alors être une classe de voisinage de cardinal 5 et de hauteur 4 qui ne peut donc être qu'une presque-chaîne non chaîne. On a donc a'<a et a<2. On a soit a<2<3<4 soit 3<4<a'<a. Dans le premier cas {a,1,2,3,4} serait une 5-chaîne, dans le second cas R-{2} serait de type D_{15} qui n'est pas une classe de voisinage — contradiction.

R-{a} étant une presque-chaîne où de type C_5, une éventuelle arête neutre de R-{a} ne peut-être que (a',1) ou (a',4), ces deux situations relevant d'un traitement analogue. Reste donc le sous-cas où (a',a) est l'arête neutre. Pour i=1,2,3,4, (a,i,a') est alors une consécutivité. R-{a'} est une presque-chaîne ou de type C_5. A chaque fois on a a<1; de même en examinant R-{a} on voit que a'<1 ce qui fait apparaître un type D_7 sur {a,a',1}.

2ème cas. Il existe deux arêtes neutres dont aucune n'est donc (a,a'). Quitte à échanger les rôles de *a* et a' on peut supposer que les arêtes neutres sont (a,1) et (a',4). Sont des consécutivités les restrictions à {1,2,a}, {1,3,a}, {1,4,a}, {a',1,4}, {a',2,4}, {a',3,4} et {a,a',1}; donc on a 2<3<4<a et a'<1<2<3 et de (a'<1) on tire que a<a'. Alors R-{4} est de type D_{14}, or ce dernier n'est pas une classe de voisinage — contradiction.

3ème cas. R est sans arête neutre. R-{a'} est une classe de voisinage de cardinal 5 de hauteur 4 sans arête neutre, par suite une presque-chaîne ou de type C_5.

Donc en posant par exemple a'<a on a 4<a'<a et a'<a<1. Restent à examiner les flèches reliant {2,3} à {a,a'}.

α) 2<a<3 est impossible car 2 minorerait le cycle (3,4,a) alors que les diamants sont interdits.

β) Si on avait 2<a et 3<a alors {2,3,4,a'} serait majoré par *a*; {2,3,4,a'} ne contiendrait donc pas de 3-cycle et serait donc une chaîne, {2,3,4,a',a} serait alors une 5-chaîne — impossible. Conclusion: a<2. Conversement 3<a'.

γ) Si on a en plus a<3 et a'<2, on tombe sur une relation R de type V_6 ({1,2} est le seul intervalle).

δ) Si on a a<3 et 2<a', on retombe sur V_6 ({2,3} est le seul intervalle).

ε) Si on a 3<a et a'<2, on tombe sur $R \approx C_6$ ({1,2} {3,4} et {a,a'} sont les seuls intervalles.)

η) Si on a 3<a et 2<a', on tombe encore sur V_6 ({3,4} est le seul intervalle.)

On n'a finalement trouvé que C_6 et V_6 comme 6-classes d'hypomorphie non lopezienne de hauteur 4.

Recherche les classes d'hypomorphie non lopeziennes de hauteur r=5 à 6 éléments (disons $E=A\cup\{a\}\supset A=\{1<2<3<4<5\}$); on va montrer que ces classes ne peuvent être que D_{20} ou D_{21}. D'après le lemme de restriction, toute restriction S de R à 5 éléments est une classe de voisinage. Une classe de voisinage de cardinal 5 contenant une 4-chaîne ne peut être que, soit C_5 qui n'a alors pas d'arête neutre, soit une presque-chaîne. Si toute restriction S est soit sans arête neutre soit une 5-presque-chaîne, son éventuelle arête neutre lie *a* au premier ou au dernier élément de $S\cap A$. Donc cette arête neutre ne peut être que (a,1) ou (a,5), par exemple (a,1). Faute d'une autre autre arête neutre, {1,i,a} est une consécutivité, pour i=2,3,4,5; la relation R-{1} ne peut donc qu'être une chaîne dont *a* est dernier élément et finalement R est une presque-chaîne, donc lopezienne – contradiction. Toutes les arêtes de R sont donc orientées. La suite (R(a,1), R(a,2),···, R(a,5)) ne peut valoir que (+++++) [R est alors une chaîne], ou (++++-) [presque-chaîne], (+++--) [D_{21}], (++---) [D_{20}], (+----) [presque-chaîne] ou enfin (-----) [chaîne]; une alternance ···,+,-,···,+,··· ferait apparaître un diamant ce qui est absurde.

On va voir, au §7.7, qu'il n'existe pas de classe d'hypomorphie non lopezienne de cardinal fini ≥7 autre que de type V_7. Auparavant on énonce au §7.6.3 un théorème sur la structure des tournois sans diamants. Ce théorème aurait pu apporter quelques menues simplifications à l'exposé du §7.6 mais il n'est vraiment indispensable que maintenant: le théorème du §7.6.3 et le mini-lemme du §7.6.4 qui suivra, interviendront dans l'élaboration de la preuve du lemme *(xiv)*.

§7.6.3. Structure des tournois *finis* sans diamants.

Nous rappelons ici le récent résultat de G. Lopez et C. Rauzy [17] concernant les tournois sans diamants, dont ces auteurs (finitistes impénitents) ne se soucient pas de préciser qu'ils doivent être finis. La précision sera apportée ici où le mot *fini* n'est jamais sous-entendu !

Un tournoi est dit *sans diamant* si aucune de ses restrictions n'est un diamant (c'est à dire de type D_6 ou D_5). On n'envisagera ici que les tournois *réflexifs*.

Une permutation d'un ensemble fini est dite *circulaire* si elle ne laisse invariante aucune partie propre non vide. Il revient au même de dire que l'ensemble peut être identifié à $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ de telle sorte que la permutation revienne à $p \mapsto p+1 \bmod m$.

Soit h un entier ≥ 0. Notons $\mathbf{T}_h$ le type du tournoi T de base $\mathbb{Z}/_{(2h+1)\mathbb{Z}}$ (identifié à $\{1,2,3,\cdots,2h+1\}$) défini par $T(x,y)=(+)$ si et seulement si $y-x$ est dans $\{1,2,3,\cdots,h\}$ mod $2h+1$ et $T(x,y)=(-)$ dans les autres cas. On appelle **rotatifs** les tournois de base finie pour lesquels il existe une permutation circulaire de la base qui est un automorphisme. Les tournois rotatifs sont exactement ceux de types $\mathbf{T}_h$.

On dira qu'un tournoi fini R est **dilaté** du tournoi T **par des chaînes** si les intervalles propres maximaux de R sont des chaînes et si la relation quotient entre ces intervalles est précisément T. On envisagera ici que des *dilatations par des chaînes* et cette précision sera donc omise. La collection des dilatés *finis* de $\mathbf{T}_h$ (par des chaînes) est notée $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$. Par paresse, on dira simplement d'un élément de $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$ qu'il est " *un* $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$ ".

THÉORÈME (G. Lopez et C. Rauzy). Tous les tournois finis sans diamant sont des $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$.

Cet énoncé n'est pas adaptable à un tournoi infini: Le tournoi T de base $\mathbb{N}\times\{0,1\}$ défini par $(a,x)<(b,y)$ mod T ssi $a<b$ mod $\mathbb{N}$ quand $x=y$,

$(a,x)<(b,y)$ mod T ssi $a>b$ mod $\mathbb{N}$ quand $x\neq y$,

est sans diamant mais ne possède aucun automorphisme autre que l'identité.

PREUVE.

Soit R un tournoi sans diamant de base E de cardinalité n. On vérifie immédiatement l'énoncé si $n\leq 3$. On procède par récurrence sur n en supposant vrai cet énoncé pour n-1.

1er cas. Si R de cardinal n possède un R-intervalle I, non trivial (i.e. de cardinal $\neq 0,\neq 1$ et $\neq n$), contenant au moins deux éléments distincts x et y. Par hypothèse de récurrence il existe un h tel que $R-\{x\}$ est un $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$. Un élément u non dans I ferait naître un diamant s'il existait un 3-cycle dans I. I est donc une chaîne et donc R est dilaté de $\mathbf{T}_h$.

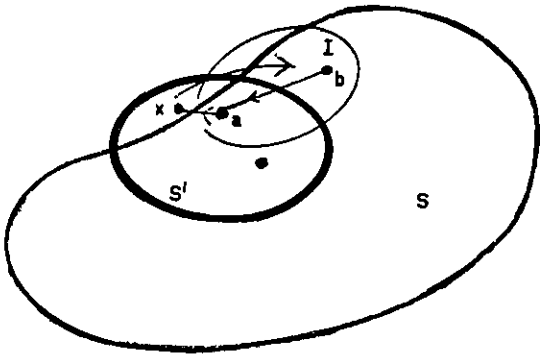
2ème cas. Les seuls R-intervalles non vides sont les singletons. Soit x un élément de la base. $S=R-\{x\}$ est par hypothèse de récurrence un $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$, mais h ne peut être nul sans quoi apparaîtraient des S-intervalles non singletons.

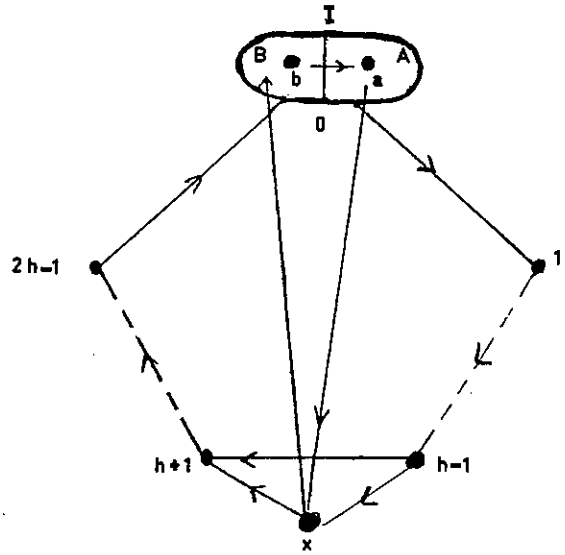
1er sous-cas. Si chaque S-intervalle de S est un singleton auquel cas $S\approx\mathbf{T}_h$. Identifions S avec le tournoi rotatif $\{0,1,2,\cdots,2h\}$. L'interdiction des diamants fait que S ne peut être un R-intervalle et il existe donc deux éléments y et z dans S tels que $R(x,y)\neq R(x,z)$. Il existe deux tels y et z consécutifs. Comme en tournant circulairement apparaissent aux moins deux alternances de tels y et z consécutifs, on peut se ramener à $y=0$, $z=1$, $0<x$ et $x<1$. $\{0,1,x\}$ est alors une chaîne. $\{0,1,h+1\}$ est un cycle. Soit k strictement compris entre 1 et h+1, pour que $\{0,x,1,k\}$ ne soit pas un

diamant il faut que $\{x,1,k\}$ ne soit pas un cycle et donc que $R|(x,k)=(+,-)$. De même pour tout j strictement compris entre $h+1$ et $2h+1$ on a $R|(x,j)=(-,+)$. Suivant l'orientation de $(x,h+1)$, l'un des ensemble $\{x,0\}$ ou $\{x,1\}$ est un R-intervalle contrairement à l'hypothèse de ce cas.

$2^{\text{ème}}$ sous cas. Il existe un S-intervalle propre I de S d'au moins deux éléments a et b. Notons $S'=R-\{b\}$. Les R-intervalles étant de cardinal 1, $\{a,b\}$ n'est pas un R-intervalle, il existe donc un z dans S' tel que $R(z,a)\neq R(z,b)$. a et b sont contenus dans le S-intervalle I qui doit donc contenir z si celui ci est dans S. Mais si I contenait un élément z autre que a et b, il faudrait pour que $\{a,b\}$ ne soit pas un R-intervalle (son cardinal est $\neq 1$) que $R(x,a)\neq R(x,b)$; pour que (a,z) ne soit pas un R-intervalle, il faudrait de même que $R(x,a)\neq R(x,z)$; de même pour que (b,z) ne soit pas un R-intervalle, il faudrait de même que $R(x,b)\neq R(x,z)$ — ces 3 non-égalités sont incompatibles et par suite z est identique à x. Supposons sans perte de généralité que $a<x$ et $x<b$. S' est une dilatation d'un T_k avec $k\neq 0$, choisissons donc un u dans $|S'|$ tel que (u,a,x) est un S'-cycle. Comme $\{a,b\}$ est un S-intervalle on a $S(u,b)=S(u,a)=(+)$. Pour éviter que $\{u,a,x,b\}$ ne forme un diamant, b se doit d'être $<a$. $\{a,b,x\}$ est alors un cycle. Pour éviter les diamants aucun u de $|R|-\{a,b\}$ ne doit vérifier $R(u,a,)=R(u,b)=R(u,x)$; par suite si u est dans un S-intervalle U, vérifiant $u<a$ et $u<b$, on doit nécessairement avoir $u>x$. On aurait de même $u'>x$ pour tout u' de U, et U serait un R-intervalle. Les R-intervalles devant être des singletons, U, comme tous les S-intervalles autres que I, ne doit contenir qu'un seul élément. Pour fixer les idées disons que le squelette de $E-\{x\}$ est, pour un certain h, de la forme $\{0,1,2,\cdots,2h\}$ et que a et b sont dans le même S-intervalle I que 0. Prenons $u=1$: comme on a $a<1$ et $b<1$ il faut que $1<x$; et de même $p<x$ pour tout p de $[1,h]$; et tout aussi bien $p>x$ pour tout p de $]h,2h[$. Les éléments de I sont partagés entre ceux qui sont $>x$ et qui forment un ensemble B, et ceux, formant un A, qui sont $<x$; comme

$\{a,b,x\}$ est un cycle on a $b \in B < A \ni a$. Finalement R est dilaté du tournoi rotatif $(a,1,\cdots,h,x,h+1,\cdots,2h-1,b)$ de type T_{h+1}, A dilatant l'élément a et B dilatant b. D'ailleurs les R-intervalles étant des singletons, R est finalement de type T_{h+1}. □





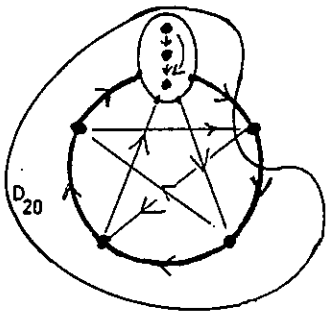
7.6.4. <u>Structure des classes d'hypomorphie qui sont des tournois sans diamants de cardinal 7</u>.

Chaque type de tournoi sans diamant de cardinal 7 est caractérisé par la donnée, à une permutation circulaire près, d'une suite (ordonnée) formée d'un nombre impair d'entiers >0 dont la somme est 7; chacun de ces entiers représente le cardinal de chacun des intervalles propres maximaux du tournoi dans l'"ordre circulaire" naturel.

Voici ces suites données chacune à une dualité près et à une permutation circulaire près:

1+1+1+1+1+1+1, Le tournoi correspondant est V_7.

1+1+1+1+3, Le tournoi correspondant contient D_{20} ou D_{21} obtenu en enlevant le premier " 1 "



1+1+1+2+2, Le tournoi correspondant contient D_{20} ou D_{21} obtenu en enlevant le premier " 1 "

1+1+2+1+2, Le tournoi correspondant contient D_{20} ou D_{21} obtenu en enlevant le premier " 1 "

1+3+3, Le tournoi correspondant contient D_{20} ou D_{21} obtenu en enlevant un élément de l'intervalle " 3 "

2+2+3, Le tournoi correspondant contient D_{20} ou D_{21} obtenu en enlevant un élément du premier " 2 "

1+2+4, Le tournoi correspondant contient D_{20} ou D_{21} obtenu en enlevant un élément de l'intervalle " 4 "

1+1+5, Le tournoi correspondant est la presque-chaîne non chaîne notée N_7.

7 Le tournoi correspondant est une chaîne.

On en conclut:

Mini-lemme . V_7 est donc le seul tournoi sans diamant de cardinal 7 à être une classe d'hypomorphie non lopezienne.

Notons N_5 le type de la presque-chaîne non chaîne à 5 éléments sans arête neutre (c'est à dire où le presque dernier est inférieur au presque premier).

On voit facilement que les restrictions à 6 éléments de V_7 sont toutes de type V_6; que les restrictions à 5 éléments de V_6 sont de type X_5 ou C_5 ou N_5; que les restrictions à 5 éléments de C_6 sont de type C_5; les restrictions à 5 éléments de S_3 sont de type D_{16}.

Le lecteur pourra trouver curieux qu'on s'acharne ainsi sur les structures à 6 ou 7 éléments. La théorie de la reconstruction montre justement que ces petits cardinaux peuvent déceler des richesses insoupçonnées.

§7.7. Recherche des classes d'hypomorphie infinies et fin de la preuve du théorème de reconstruction.

§7.7.1.

On rappelle qu'une consécutivité infinie est par définition isomorphe à la consécutivité habituelle sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^-$ (ensemble des entiers ≤ 0), ou $\mathbb{Z}$.

Remarquons que:

LEMME *(xiii)*. Une relation binaire infinie est une consécutivité si et seulement si toute partie finie de la base est incluse dans une consécutivité finie.

PREUVE. Montrons la suffisance de la condition, la nécessité allant de soi. Considérons dans la relation, une consécutivité maximale A dont l'existence est évidente. On voit que A n'est pas réduit à un singleton car deux éléments $a \in A$ et a" quelconque de la base sont dans une même consécutivité finie, qui, si A était un singleton, serait un sur-ensemble propre de A contrairement à la maximalité de A. S'il existe un élément b extérieur à A, prenons un élément a intérieur à A et affirmons que $\{a,b\}$ se trouve dans une consécutivité finie B. Il existe donc un chemin de flèches allant de a à b, par exemple orientées de a vers b. Nécessairement il existe sur ce chemin une flèche (u,v) d'origine u dans $A \cap B$ et de but v dans $B-A$. Le sommet u se trouvant dans A est but ou source d'une flèche dont l'autre extrémité est aussi dans A. Premier cas: supposons que u est le plus grand élément de A (modulo la chaîne qui est la transitivisée de A). Alors $A \cup \{v\}$ est une consécutivité. Il suffit, pour le voir, de constater que chaque intervalle $[a',v]$ de A est finie et est donc une consécutivité. Ce résultat

contredit la maximalité de A. Deuxième cas: si u n'est pas le plus grand élément de A (mod la transitivisée de A) il est suivi d'un successeur immédiat w. Or {u,v,w} n'est pas une consécutivité contrairement à ce que réclame l'hypothèse. □

Disons qu'une relation binaire R est une **fini-classe** d'hypomorphie (ou plus simplement une *fini-classe*) s'il existe R' de même base, fini-hypomorphe à R (c'est à dire isomorphe à R sur chaque restriction finie) telle que la base commune ne soit formée que d'une seule (R,R')-classe de différence. Les fini-classes peuvent bien sûr être infinies; les fini-classes finies ne sont pas autre chose que les classes d'hypomorphie finies.

Lemme *(xii) bis* . Dans une fini-classe C non lopezienne de cardinal infini, toutes les parties finies de cardinal ≥4 sont des classes d'hypomorphie.

On verra plus loin qu'en fait il n'existe pas de fini-classe infinie non lopezienne!

PREUVE. Supposons que C soit une (C,C')-classe d'hypomorphie et prenons une partie E de cardinal fini ≥4. À toute paire {x,y} d'éléments de E associons l'ensemble f(x,y) des éléments d'un (C,C')-chemin arbitrairement choisi liant x à y. Soit F la réunion de E et de tous les f(x,y) quand x,y parcourent E. Constatons que F est formé d'une seule (C,C')-classe de différence puisque tout élément a de F-E est relié par un (C|F,C'|F)-chemin à un x de E, et que les éléments de E sont aussi reliés entre eux par des (C|F,C'|F)-chemins, la transitivité faisant le reste. Si F n'est pas lopezien, E en est une partie de cardinal fini ≥4 donc est une classe d'hypomorphie d'après le lemme *(xii)*. Si F était une presque-chaîne, E en

serait une aussi, donc serait une classe d'hypomorphie. Dernier cas que nous allons maintenant examiner: F est une consécutivité ou un cycle. On a pour l'instant démontré que toute partie E de cardinal fini ≥4 est soit une classe d'hypomorphie soit est incluse dans une consécutivité finie. Si toute partie E est incluse dans une consécutivité finie, C est une consécutivité. Reste donc à voir le cas où une partie E' de cardinal fini ≥4 est une classe d'hypomorphie qui n'est pas une consécutivité, et où une autre partie E" (de cardinal fini ≥4) n'est pas une classe d'hypomorphie mais est incluse dans une consécutivité finie. Dans ce cas E'∪E" soit est une classe d'hypomorphie (et alors E" en serait une aussi d'après le lemme *(xii)*) soit est incluse dans une consécutivité finie. Dans ce cas E', classe d'hypomorphie incluse dans cette consécutivité finie, ne peut qu'être une consécutivité – contraire à l'hypothèse faite sur E'. □

Les trois lemmes suivants constituent le dénouement de la problématique de la reconstruction. Ils formalisent le fait que C_6, S_3 et V_7 sont, grâce à leur incompatibilité réciproque, des interdits de classe d'hypomorphie non lopezienne et que V_6 est interdit dans les classes de cardinal ≥8. Seuls donc les voisinages lopeziens peuvent être des 6-restrictions de classe d'hypomorphie de cardinal ≥8 et le recollement de ces voisinages lopeziens donnera une classe lopezienne donc reconstructible. Ceci explique la valeur 6 du seuil de reconstructibilité. Au contraire le voisinage C_5 à 5 éléments n'est pas un interdit de classe d'hypomorphie et se retrouve dans par exemple D_{20} qui n'est pas reconstructible...

Lemme *(xiv)* . Dans une fini-classe non lopezienne de cardinal infini ou fini ≥7 *autre que* V_7, toute partie de cardinal 4,5 ou 6 est lopezienne.

On verra qu'en fait il n'existe pas, hormis V_7, *de fini-classe de cardinal* ≥7 *non lopezienne!*

PREUVE. Prenons une partie U à 7 éléments qui est donc une classe d'hypomorphie en vertu des lemmes *(xii)* et *(xii) bis*.

Nous allons prouver qu'il ne peut y avoir dans U de 6-restriction qui soit non lopezienne.

Constatons tout de suite que si une 6-restriction est de type S_3 les autres ne peuvent être de type V_6 ou C_6, ces derniers étant sans arête neutre; les autres restrictions ne peuvent être alors que de type S_3 ou être lopeziennes. Si deux restrictions U-{a} et U-{b} étaient de type S_3, apparaîtraient dans U deux arêtes neutres adjacentes puisque dans S_3 chaque sommet est incident à une telle arête neutre. On conclut que si une 6-restriction est de type S_3 les autres sont lopeziennes. Or si une 6-restriction est de type S_3, en ôtant un élément quelconque de cette restriction restent deux arêtes neutres et des 3-chaînes ce qui est impossible dans une classe d'hypomorphie lopezienne de cardinal ≥7. La conclusion de cette alinéa est que S_3 ne peut être une 6-restriction de U.

Montrons que trois restrictions distinctes à 6 éléments de U ne peuvent être chacune d'un des types C_6 ou V_6. Si les trois 6-restrictions étaient chacune de types C_6 ou V_6, U serait un tournoi sans diamant donc un $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$. Or on a vu en 7.6.4 que seul V_7 pouvait convenir mais il a été exclu.

Supposons alors que deux restrictions U-{a} et U-{b} sont chacune de type C_6 ou V_6. Une troisième U-{c} ne peut donc être qu'une presque-chaîne ou de type S_3. Reste le cas où U est une presque chaîne. Si (a,b) est neutre, U-{c} est une presque chaîne de presque extrémités *a* et b; b est alors dans

la même position par rapport à 4 éléments de U autres que *a*, or ceci est impossible dans U-{a} que le type de U-{a} soit C_6 ou V_6. Si enfin (a,b) est orienté, U est encore un tournoi sans diamant de cardinal 7; or on a vu au §7.6.4, que V_7 est le seul d'entre eux à être une classe d'hypomorphie non lopezienne mais il a été exclu et ne toute façon il ne contient pas de 6-presque-chaîne (ni d'ailleurs de type C_6).

On a donc vu que si une 6-restriction de U est de type C_6 ou V_6, les autres sont nécessairement lopeziennes. Or ceci n'est pas possible car en ôtant de C_6 ou V_6 un élément qui se trouve dans un intervalle à 2 éléments, restent au moins deux 3-cycles sans arête commune ce qui est irréalisable dans une classe d'hypomorphie lopezienne.

Finalement aucune partie à 6 éléments de U ne peut donc être de type C_6, V_6 ou S_3 et toutes sont en fin de compte lopeziennes.

Enfin les sous-parties à au moins 4 éléments sont des classes d'hypomorphie (grâce aux lemmes *(xii)* et *(xii) bis*) et les sous-classes d'hypomorphie d'une classe d'hypomorphie lopezienne finie sont lopeziennes. □

LEMME *(xv)* . Soit C une fini-classe de cardinal infini ou fini ≥7. Si toutes les parties de cardinal 5 ou 6 sont lopeziennes, C l'est aussi (en fait une presque-chaîne).

PREUVE. Faisons préalablement la remarque suivante dont nous nous servirons plusieurs fois: dans une presque chaîne deux éventuels 3-cycles ont nécessairement une arête commune (celle liant les deux presque extrémités).

Dans toute la preuve raisonnons par l'absurde en supposant C non lopezienne. Si C est fini s'applique le lemme *(viii)* pour dire que les parties de cardinal 5 ou 6 ne peuvent être ni des cycles ni des consécutivités et sont donc des presque-chaînes, en effet si une de ces

parties à 5 ou 6 éléments était une consécutivité ou un cycle elle contiendrait une 4-consécutivité et C serait donc aussi une consécutivité ou un cycle. Si maintenant C est infini on peut affirmer que les parties à 5 ou 6 éléments sont incluses dans un ensemble à 7 éléments qui d'après le lemme *(xii) bis* est une classe d'hypomorphie. Cette classe est finie et le lemme *(viii)* permet encore de dire que ces parties à 5 ou 6 éléments sont des presque-chaînes. Les parties à 4 éléments aussi.

Une presque-chaîne ne pouvant contenir qu'une paire d'éléments incomparables, il y a au plus une telle paire dans C.

1er cas . Il existe a et b incomparables. Toute partie à 6 éléments contenant a et b est une presque-chaîne d'extrémités a et b. S'il y avait dans C-{a,b} un 3-cycle alors une 6-partie contenant a et b et chaque sommet de ce 3-cycle ne pourrait être une presque-chaîne. Comme C-{a,b} est un tournoi c'est en fait une chaîne. A cause du lemme *(i)* tout x de C-{a,b} vérifie une des deux conditions: soit $a<x$ et $x<b$, soit $b<x$ et $x<a$. Montrons maintenant qu'en fait l'une des conditions est vraie pour tout x de C-{a,b}. Sinon il existerait deux éléments h et k autres que a et b vérifiant $a<h$ et $h<b$ mais $b<k$ et $k<a$. Toute orientation de (h,k) donnerait un 3-cycle (a,h,k) ou (b,h,k). L'ensemble {a,b,h,k} ne pourrait alors être une presque chaîne. C-{a,b} est donc bien une chaîne d'intermédiaires entre a et b, et C est par suite lopezien.

2ème cas . C est sans paire de sommets incomparables et possède une partie $F=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\nu\}$ vérifiant $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$, $\gamma<\delta$, $\delta<\mu$, $\mu<\nu$, $\nu<\alpha$ qui est une presque-chaîne (non chaîne). S'il y avait un 3-cycle dans $C-\{\alpha,\nu\}$, l'ensemble formé par α, ν, β et les trois sommets de ce 3-cycle serait un ensemble à 5 ou 6 éléments doté de deux 3-cycles sans arête commune. Comme une presque-chaîne ne peut posséder deux 3-cycles sans arête commune,

$C-\{\alpha,\nu\}$ ne doit pas contenir de 3-cycle, $C-\{\alpha,\nu\}$ est donc une chaîne. Il faut montrer que $C-\{\alpha,\nu\}$ est une chaîne d'*intermédiaires* entre α et ν.

C étant un tournoi, dire qu'un h de $C-\{\alpha,\nu\}$ est un intermédiaire revient à dire qu'on ne peut avoir ($h<\alpha$ et $h<\nu$) ni ($h>\alpha$ et $h>\nu$). Raisonnons par l'absurde en supposant une de ces éventualités vérifiée, par exemple la première: ($h<\alpha$ et $h<\nu$). Remarquons alors que pour éviter un diamant sur $\{\alpha,\beta,\nu,h\}$ il faut que $\beta<h$. On aurait alors affaire avec (α,δ,ν) et (h,α,β) à deux 3-cycles sans arêtes commune ce qui est irréalisable dans la presque-chaîne $\{\alpha,\nu,\beta,\delta,h\}$. □

En appliquant successivement les lemmes *(xiv)* et *(xv)* on voit que

Lemme *(xvi)*. *Les fini-classes de cardinal infini ou fini* ≥ 7 *autre que* V_7 sont lopeziennes.

Il saute aux yeux que n'importe quelle chaîne est fini-hypomorphe à sa duale et forme avec elle une seule fini-classe.

§7.7.2.

Vérifions maintenant que

LEMME *(xvii)*. Si deux relations binaires infinies R et R′ de même base sont $\{\text{fini},\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*\}$-hypomorphes les (R,R′)-classes infinies sont de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$. En particulier il n'y a pas d'autre classe d'hypomorphie infinie que de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$.

Par goût de la gymnastique intellectuelle on n'utilisera dans la preuve que l'isomorphie sur les parties finies et sur les parties *propres* de type ω, ω^*, Ω ou Ω^*.

PREUVE. D'après le lemme *(xvi)* les fini-classes infinies sont lopeziennes donc sont soit des presque-chaînes soit des consécutivités (un cycle ne peut être infini). Prenons le cas où une fini-classe est une chaîne infinie C, notons $C'=R'||C|$. Dans un chemin de (C,C′)-différence parcourant tout C il existe, si C n'est pas de type ω, ω^* ni $\omega^*+\omega$, deux éléments successifs $a<b$ tels que $[a,b]$ soit infini incluant par exemple un ensemble A contenant a tel que $A\cup\{b\}$ soit de C-type $\omega+1$. b étant C′-antérieur à a et A de C′-type ω, $A\cup\{b\}$ doit être de C′-type ω ce qui est contraire à l'ω-hypomorphie.

Si C est une presque-chaîne non chaîne enlevons lui une des ses presque-extrémités en sorte que ce qui reste ne soit pas de type ω, ω^* ni $\omega^*+\omega$, et appliquons le même raisonnement.

Supposons maintenant que C est une consécutivité infinie par exemple de type Ω. Le premier élément 0 de C ne peut être lié par $S_{C,C'}$ qu'à 1. Puis 1 à 2 etc ... On a alors $1<0 \bmod C'$, $2<1 \bmod C'$ etc ... $C-\{0\}\approx\Omega$ n'est pas alors isomorphe à $C'-\{0\}\approx\Omega^*$. □

On a donc trouvé toutes les classes d'hypomorphie non lopeziennes réflexives de cardinal ≤6 et celles de cardinal infini et on a vu qu'il n'y en avait pas d'autre de cardinal fini ≥7. On constate qu'elles figurent toutes dans la liste des déformées (donc non reconstructibles) soit dans la liste des classes de voisinage (dont on va voir qu'elles sont en général reconstructibles). Ce qui permet de conclure au:

THÉORÈME n°1 d'exhaustivité de la liste des classes d'hypomorphie du §7.2. (Voir précisions au §7.9).

Rappelons, avant de continuer, le résultat classique suivant:

Mini-lemme *(xviii)*. Les relations binaires non reconstructibles de cardinal infini ou fini ≥4 sont des classes d'hypomorphie.

PREUVE. Considérons deux relations binaires R et R' hypomorphes et de même base. Partageons la base en (R,R')-classes de différence. Si card R≥4 ces (R,R')-classes sont des intervalles et quand plusieurs (R,R')-classes cohabitent dans R les isomorphismes définis sur chacune se recollent. Si R et R' ne sont pas isomorphes cela signifie donc, soit que R est formée d'une seule (R,R')-classe, soit que R est de cardinal ≤3. □

Nous allons maintenant, pour trouver la liste des types non reconstructibles, éliminer donc de la liste des classes d'hypomorphie, les classes de voisinage de cardinal infini ou fini ≥4 dont on va voir maintenant qu'elles sont reconstructibles. La définition même des classes de voisinage fait que, réciproquement, les classes d'hypomorphie reconstructibles sont évidemment des classes de voisinage.

Mini-lemme *(xix)*. Les classes de voisinage infinies ou de cardinal fini ≥4 sont reconstructibles.

Preuve. La preuve consiste en une succession de vérifications sans intérêt sur la liste des classes de voisinage non lopeziennes, vérifications dont je ne donne qu'un seul exemple détaillé. Utilisons le mini-lemme *(xviii)* et montrons par exemple que si $R=D_{24}$, tout R' qui lui est hypomorphe et dont la base n'est constituée que d'une seule (R,R')-classe, lui est isomorphe. Les autres cas se résolvant par la même technique. Chaque arête orientée sauf (3,4), (2,4) et (2,3) se trouve dans un 3-cycle ou dans une 3-consécutivité contenant (a,1), elle s'inverse donc dans R' si (a,1) s'inverse d'après les lemmes *(iv)* et *(v)*; mais (2,4) et (2,3) se trouvent eux-mêmes dans une 3-consécutivité ou un 3-cycle contenant une arête qui doit s'inverser. Or l'inversion éventuelle de la seule arête (3,4) ne change pas R'. Si maintenant (a,1) ne s'inversait pas, on verrait par la même méthode que le reste non plus, sauf peut-être (3,4) dont l'inversion ne ferait pas de la base une seule (R,R')-classe de différence. □

Il est regrettable que je ne dispose d'aucune démonstration intelligente du précédent résultat, c'est à dire une démonstration utilisant la définition des classes de voisinage et susceptible d'être étendue à, par exemple, la (≤-k)-hypomorphie. La morale de cet énoncé est pourtant jolie puisqu'elle dit que si une relation binaire R', hypomorphe à une classe d'hypomorphie R, lui est isomorphe et si la base ne forme qu'une seule (R,R')-classe alors tous les autres R" hypomorphes à R lui seront aussi isomorphes. Je n'arrive pas à trouver de raison profonde à cette étonnante morale.

On peut constater de manière tout aussi étonnante que les déformées d'une relation binaire donnée de cardinal ≥4 sont toutes isomorphes entre elles!

De la liste des classes d'hypomorphie candidates à un poste de déformée, ne restent que les classes d'hypomorphie de relations binaires réflexives ou irréflexives dont le type est déjà dans la liste des motifs. Nous sommes donc en mesure de démontrer le théorème d'exhaustivité des non reconstructibles:

THÉORÈME n°2 D'EXHAUSTIVITÉ de la liste des DÉFORMÉS. Les types des relations binaires (pas nécessairement réflexives) non Fraïssé-reconstructibles sont exactement les motifs finis.

PREUVE. Le cas des relations binaires de cardinal ≤3 est vérifié à la main. Si maintenant la relation R est de cardinal ≥4 on applique le mini-lemme qui précède. L'énoncé est donc vérifié. □

Pour achever la preuve du théorème de {motifs}-reconstructibilité il reste à démontrer maintenant le lemme *(xxi)* de $\{\text{fini},\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*\}$-reconstructibilité des relations infinies (déjà vue d'ailleurs au §7 de [9]):

PRÉ-LEMME *(xx)*. Le type $\omega^*+\omega$ est $\{\text{fini},\omega,\omega^*\}$-reconstructible. De même la consécutivité sur $\mathbb{Z}$ est $\{\text{fini},\Omega,\Omega^*\}$-reconstructible.

PREUVE. Soit R et R' deux chaînes hypomorphes, la première étant de type $\omega^*+\omega$. R' contient les types ω et ω^*; pour montrer que R' est de type $\omega^*+\omega$ il suffira de monter que R' ne contient ni 3-cycle ni d'arête neutre (c'est une conséquence de la {fini}-hypomorphie) ni de type $1+\omega^*$ ni non plus de type $\omega+1$. Supposons par l'absurde l'existence d'une partie A de R'-type

$\omega+1$. La $\{\text{fini},\omega,\omega^*\}$-hypomorphie a pour conséquence que A ne peut être de R-type ω ni ω^* donc, étant infini, A est de R-type $\omega^*+\omega$. Mais alors la partie B obtenue en privant A de son plus grand élément modulo R′ doit être aussi de type $\omega^*+\omega$ ce qui est incompatible avec la ω-hypomorphie. Raisonnement plus simple pour la consécutivité sur $\mathbb{Z}$ car l'isomorphie sur une partie de type Ω est en fait une identité. □

LEMME *(xxi)* . Soit deux relations R et R′ de même base *infinie* qui sont isomorphes sur leur parties finies et sur celles des parties infinies qui, mod R ou R′, sont de types ω, ω^*, Ω ou Ω^*. Alors R et R′ sont isomorphes.

PREUVE. Découpons la base en (R,R′)-classes de différence et recollons les isomorphismes de R dans R′ définis sur chacune des classes. Si certaines classes sont infinies (en particulier si la base n'est formée que d'une seule (R,R′)-classe) celles-ci sont lopeziennes d'après le lemme *(xvi)* donc de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$, ou encore Ω, Ω^* ou du type de la consécutivité sur $\mathbb{Z}$ et on applique le pré-lemme précédent. (En fait on verra au théorème suivant que les (R,R′)-classes ne peuvent ici être que des chaînes.) □

En [9] §7 on prouve un peu mieux puisqu'on se restreint à celles des parties de types ω, ω^*, Ω ou Ω^* qui sont *propres*. Mais on a remarqué au lemme *(xvii)* que cette amélioration est de faible portée.

On peut remarquer qu'en fait la $\{\Omega^*\}$-hypomorphie est inutile dans l'hypothèse du lemme *(xxi)* puisqu'elle est conséquence de la $\{\Omega,\leq 3\}$-hypomorphie.

Lemme *(xxii)*. Si deux relations finies R et R′ de même base sont isomorphes sur chaque restriction F (propre ou pas) de la base où R|F ou R′|F est non reconstructible, alors R et R′ sont isomorphes.

PREUVE. Ce lemme est en fait tautologique, il résulte de la simple définition de la Fraïssé-reconstructibilité sans faire intervenir la structure des relations ni même le fait qu'elles soient binaires. Prenons, sur une base finie commune, deux relations binaires R et R′ non isomorphes mais dont les restrictions à chaque partie non Fraïssé-reconstructible sont isomorphes. Si R et R′ ne sont pas isomorphes cela signifie d'après l'hypothèse (en prenant F=|R|) que R est reconstructible puisqu'il y a isomorphie sur les parties non reconstructibles. Il existe alors, par définition de la reconstructibilité, une partie propre F′ minimale pour l'inclusion sur laquelle R|F′ et R′|F′ ne sont pas isomorphes. Cette non isomorphie entraîne, d'après l'hypothèse de l'énoncé, la Fraïssé-reconstructibilité de R|F′. Par définition de la Fraïssé-reconstructibilité on peut alors trouver une partie propre F" ⊊F′ sur laquelle il n'y a pas isomorphie entre R et R′ ce qui est contraire à la minimalité de F′. □

On peut maintenant prouver le théorème de reconstruction.

THÉORÈME de reconstruction. Si deux relations binaires R et R′ de même base sont isomorphes sur chaque restriction F (propre ou pas) de la base où R|F ou R′|F est un motif alors R et R′ sont isomorphes.

PREUVE . Si R est de base finie, les restrictions où R|F et R′|F sont des motifs sont, d'après le théorème d'exhaustivité n°2, exactement les restrictions non reconstructibles. Le lemme *(xxii)* précédent donne alors la réponse. Si R et R′ hypomorphes sont de base infinie on utilise le lemme

(xxi) de $\{\text{fini},\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*\}$-reconstructibilité des relations binaires infinies: on vient de voir qu'il y a isomorphie sur les parties finies, ceci joint à l'isomorphie sur les motifs infinis entraîne bien l'isomorphie sur le tout. □

COROLLAIRE . Les relations binaires de cardinal infini ou fini ≥ 7 sont Fraïssé-reconstructibles.

C'est l'ancienne forme figurant en [9] §7 du théorème de reconstruction. Elle découle directement du fait que les motifs finis sont de cardinal ≤ 6.

§7.8. Existence des classes d'hypomorphie infinies.

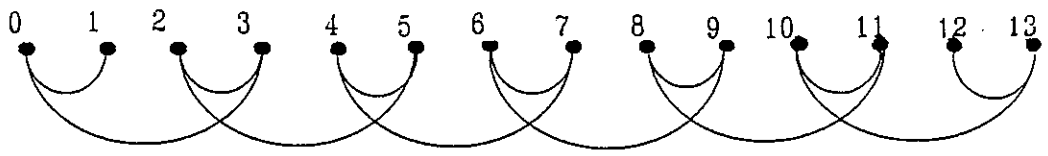
Il est encore nécessaire de montrer que ω est une classe d'hypomorphie. En effet la notion même de versatilité a d'abord été définie pour une classe d'hypomorphie puis étendue aux grands motifs (p.87). Pour savoir que c'est la première définition qui s'applique il faut être sûr que ω est une classe d'hypomorphie: toute ses arêtes seront alors versatiles et il n'y aura donc rien à vérifier pour prouver le sous-lemme 2 de multiplicité des classes quand E est de type ω !

Montrons donc que les chaînes de types ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$ sont bel et bien des classes d'hypomorphie comme on l'a déjà vu au §7 de [9]:

MINI-LEMME . Une chaîne infinie de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$ est une classe d'hypomorphie.

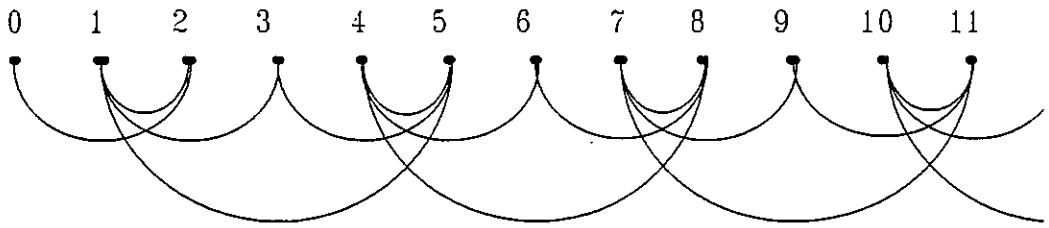
PREUVE. Prenons par exemple le cas de ω. Soit R la chaîne $\mathbb{N}$ des entiers (naturels) munie de l'ordre habituel. R' est par exemple le même ordre avec les inversions suivantes 0>1 (mod R'), 0>3 (mod R'), puis translation de 2: 0+2>1+2 (mod R'), 0+2>3+2 (mod R') et plus généralement 0+2n>1+2n (mod R'), 0+2n>3+2n (mod R') c'est à dire que $1<3<0<5<2<7<4<9<6<11<8<\cdots$ mod R'. La relation R' est isomorphe à R et il n'y a qu'une (R,R')-classe de différence dans la base de R. □

Le dessin suivant représente le graphe $S_{R,R'}$ associé aux relations R et R' de la preuve précédente, *on notera* $\mathbb{N}'$ *cette relation R' qui sera souvent réutilisée par la suite (ou une relation analogue)*:



On peut trouver d'autres relations binaires R', ne formant qu'une classe avec R, et qui seront des chaînes de type ω. Ainsi définissons R' comme étant le même ordre que R=$\mathbb{N}$ avec les inversions suivantes 0>2, 1>2, 1>3 (mod R'), puis translation de 3: 0+3>2+3 (donc par transitivité 1>2+3), 1+3>2+3, 1+3>3+3 (toujours mod R'), et plus généralement 0+3n>2+3n (donc par transitivité 1+3(n-1)>2+3n), 1+3n>2+3n, 1+3n>3+3n (toujours mod R'). La relation R' est isomorphe à R et il n'y a qu'une (R,R')-classe de différence dans le base $|\mathbb{N}|$.

Le dessin suivant représente le graphe $S_{R,R'}$ de l'alinéa précédent:



La poursuite de telles constructions vers la gauche permet d'obtenir des classes d'hypomorphie de type $\omega^*+\omega$.

Je remercie de nouveau J. Bénard qui m'a laissé accéder à son ordinateur et à son imprimante. Sans lui mes lecteurs auraient été privés de ces si jolis dessins. Je n'aurais en effet pas eu l'abnégation nécessaire pour me servir des divers procédés artisanaux dont usent les autres mathématiciens obscurs d'Orsay pour tracer des cercles sans bosses: tasse à café (uniquement pour les arcs à cause de l'anse qui dépasse), sangle métallique savamment enroulée, rondelle de saucisson etc ...

PROPOSITION (§8 de [9]) . Si R et R′ sont deux relations binaires hypomorphes, le graphe de différence $S_{R,R'}$ est localement fini c'est à dire que le degré de chaque sommet y est fini.

PREUVE . Le théorème de Ramsey affirme l'existence d'un sommet a $S_{R,R'}$-lié à une infinité d'autres a_i tels que par exemple $R|(a,a_i)=(+,-)$. Utilisons le lemme *(x)* pour affirmer que l'ensemble des a_i est une chaîne contenant par exemple une partie A de R-type ω. $A\cup\{a\}$ est alors de R-type ω et de R′-type $\omega+1$ — absurde. □

Fin de toute la démonstration du théorème de demi-reconstructibilité.

CONCLUSION

Le lecteur risque de sourire en constatant que nous avons dû développer des théories sophistiquées, aussi bien pour la reconstruction que dans la demi-reconstruction, pour résoudre des problèmes ne se posant que sur des structures ne dépassant pas en général une douzaine d'éléments. Nous avons procédé ainsi parce qu'il n'y avait pas d'autre choix. D'abord des arguments théoriques complexes sont nécessaires pour montrer que seuls ces petits cardinaux posent problème. Malgré tout, ces cardinaux sont trop grands pour qu'une démonstration artisanale et "combinatoricienne" soit envisageable, sauf dans des cas très simples, même avec l'aide d'un ordinateur. Il est indispensable d'introduire des outils théoriques comme les voisinages, les motifs, les classes de différence etc··· même si ces concepts n'ont d'intérêt que pour les petits cardinaux. C'est une revanche sur la loi des grands nombres...

§7.9. Épilogue.

Pour conclure nous allons préciser les listes obtenues:

THÉORÈME n°1 d'EXHAUSTIVITÉ de la liste des CLASSES d'HYPOMORPHIE et des CLASSES de VOISINAGES.

Une classe de voisinage d'une relation binaire réflexive est soit une consécutivité finie, soit un cycle, soit une presque-chaîne finie, soit une chaîne de type ω ou ω ou $\omega^*+\omega$, soit isomorphe à un des 14 types V_4, V'_4, W_4, X_5, C_5, C_6, V_6, V_7, S_3, S'_3, D_{24}, D'_{24}, D_{16} ou D'_{16}. Les autres classes d'hypomorphie d'une relation binaire réflexive sont d'un des types D_5 à D_7, D_9 à D_{15}, D_{20} à D_{23}, ou D'_9, D'_7, D'_{11}, D'_{10}, D'_{13}, D'_{12}, D'_{15}, D'_{14}. Outre les classes d'hypomorphie irréflexives associées restent D_{26} et D_{27} qui sont des classes d'hypomorphie ni réflexives ni irréflexives (et pas lopeziennes).

Si on ne s'intéresse qu'aux types des relations binaires réflexives finies on a finalement obtenu outre les 14 classes de voisinages non lopeziennes (W_4, V_4, V'_4, X_5, C_5, C_6, V_6, V_7, S_3, S'_3, D_{24}, D'_{24}, D_{16}, D'_{16}), 6 classes d'hypomorphie lopeziennes non reconstructibles: D_2, D_3, D_4, D_8 et D'_8 et le singleton réflexif; 22 classes non lopeziennes non reconstructibles à savoir D_5 à D_7, D_9 à D_{15}, D_{20} à D_{23} y compris pour celles qui possèdent des arêtes non orientées, leurs négations D'_9, D'_7, D'_{11}, D'_{10}, D'_{13}, D'_{12}, D'_{15}, D'_{14}; et 4 relations non Fraïssé-reconstructibles qui ne sont pas des classes d'hypomorphie: D_0, D_1, D_{18}, D_{19}. Soit 28 classes d'hypomorphie réflexives non reconstructibles et en tout 36 classes d'hypomorphie réflexives non lopeziennes.

Si on s'intéresse à toutes les relations binaires réflexives ou pas on a donc trouvé 74 classes d'hypomorphie non lopeziennes ($2\times34+ D_{26}$ et D_{27}) et 58 classes d'hypomorphie non reconstructibles ($2\times28+ D_{26}$ et D_{27}).

On a donc bien montré que la liste des classes d'hypomorphie et des classes de voisinage non lopeziennes réflexives donnée au §7.2 est exhaustive.

On constate empiriquement, grâce à cette liste, que les classes d'hypomorphie finies (réflexives ou pas) sont des classes de voisinage si et seulement si elles sont autoduales. Elle ne forment alors avec leur duale qu'une seule classe de différence. Je ne trouve pas à ce curieux phénomène de justification théorique.

Remarquons aussi sur cette liste que les classes d'hypomorphie non autoduales sont incomparables entre elles relativement au plongement execptions faites des D_{18} inclus dans les D_{13} et variantes.

PROPOSITION (a). Toute hypomorphe à une classe d'hypomorphie est encore une classe d'hypomorphie.

PREUVE. Soit R une classe d'hypomorphie et R' une relation binaire hypomorphe à R. Supposons le cardinal de la base infini ou fini ≥4. D'après le mini-lemme *(xviii)* soit R' est une classe d'hypomorphie soit R' est reconstructible donc isomorphe à R qui est déjà une classe d'hypomorphie. Le cas d'une base de cardinal ≤3 se résoud à la main. □

Comme corollaire du théorème d'exhaustivité des classes d'hypomorphie donnons l'énoncé suivant:

COROLLAIRE . Hormis les presque-chaînes finies de presque-extrémaux comparables et à part W_4, X_5, C_5, C_6, S_3, S'_3, V_6 et V_7, il n'existe pas de tournoi héréditairement auto-dual (c'est à dire vérifiant sur toute partie F [propre ou pas] de la base $T|F \approx T^*|F$).

PREUVE . T serait alors hypomorphe et isomorphe à T^* et la base ne serait formée que d'une seule (T,T^*)-classe de différence. T serait alors un voisinage. Or les cycles et les consécutivités pas plus que D_{24}, D'_{24}, D_{16} ou D'_{16} ne sont des tournois et ω n'est pas auto-dual pas plus que ω^*. Quant à $\omega^*+\omega$ ses restrictions de type ω ne sont pas auto-duales. □

Recherchons les relations binaires héréditairement autoduales. On voit comme précédemment que chaque composante connexe est un voisinage donc soit un tournoi héréditairement auto-dual, soit une presque-chaîne finie, soit une consécutivité finie, soit un cycle, soit V_4, V'_4, W_4, D_{16}, D'_{16}, D_{24} ou D'_{24}. Ces composantes sont reliées par des arêtes neutres. En effet si a et b sont deux éléments d'une même composante reliés par une arête orientée et c un élément d'une autre composante, l'auto-dualité de la restriction à {a,b,c} de la relation impose à (a,c) et (b,c) d'être de même nature (vide ou pleine) et de proche en proche toutes les arêtes reliant deux composantes connexes données sont de même nature. On obtient ainsi la forme générale des relations binaires héréditairement auto-duales: des composantes connexes, chacune partout réflexive ou partout irréflexive, qui sont des consécutivités finies ou des cycles ou des presque-chaînes finies ou de type V_4, V'_4, W_4, D_{16}, D'_{16}, D_{24}, D'_{24}, X_5, C_5, C_6, V_6, V_7, S_3 ou S'_3, ces composantes étant deux à deux reliées par des arêtes neutres de même nature.

COMPLÉMENTS.

On peut par simple examen de la liste des classes d'hypomorphie observer que:

Complément 1 . Dans une (R,R')-classe d'hypomorphie de cardinal ≥5 toute partie d'au moins 3 éléments qui ne contient pas une 3-chaîne se dualise

(c.à.d. $R'=R^*$ sur cette partie). Les 3-consécutivités se dualisent dans une classe d'hypomorphie de cardinal quelconque.

Complément 2 . Une classe d'hypomorphie de cardinal ≥ 5 qui possède un presque-maximum a (c'est à dire vérifiant $R(x,a)=(+)\neq R(a,x)$ pour tout $x\neq a$ sauf un y pour lequel on a néanmoins $R(y,a)=+$) est une presque-chaîne de presque-maximum a.

D_{10} fournit un contrexemple aux énoncés précédents si card E=4.

Complément 3 . Dans une classe d'hypomorphie non lopezienne si on oriente arbitrairement certaines arêtes non orientées on obtient encore une classe d'hypomorphie.

La classe d'hypomorphie obtenue peut éventuellement être lopezienne, par exemple D_{22} peut donner une presque-chaîne de cardinal 5 d'extrémités incomparables. Si on part de la classe de voisinage D_{24} cette opération peut donner une classe d'hypomorphie D_{14} qui n'est plus une classe de voisinage.

§8. VOISINAGES D'UNE RELATION BINAIRE.

Mon but est d'étendre la notion de voisinage dans une chaîne aux relations binaires quelconques. J'introduis la relation transitive "R-voisin de" dans une relation binaire R, et les "R-voisinages" de R qui sont les classes d'équivalence associées. On a déjà introduit la notion de "R-classe de voisinage" : une restriction S d'une relation binaire R est une R-classe de voisinage s'il existe R' hypomorphe et isomorphe à R telle que la base de S n'est formée que d'une seule (R,R')-classe de différence. Il est vrai mais non évident qu'un R-voisinage est une R-classe de voisinage. J'introduis encore la notion intrinsèque de "voisinage" : une relation binaire R est un voisinage si elle est un R-voisinage. On montrera la synonymie entre ce terme et celui déjà défini de "classe de voisinage" (en soi). Cette généralisation du concept de voisinage se fait avec succès, elle est à la fois difficile et triviale: difficile pour ce qui est de la définition même des voisinages et du fait qu'ils généralisent par leurs propriétés la notion classique de voisinage d'une chaîne; triviale par l'aboutissement puisque, en dehors de ω, ω^*, $\omega^*+\omega$, et en dehors des classes d'hypomorphie lopeziennes finies déjà obtenues par G. Lopez en [16], on ne trouve comme nouveaux voisinages que 14 types de relations réflexives et autant d'irréflexives (certains déjà connus pour d'autres raisons), et, bien pis, rien de remarquable ne se passe pour ces nouveaux voisinages sinon qu'ils vérifient banalement les propriétés souhaitées. En effet un des buts du paragraphe est de montrer que si deux relations R et R' sont hypomorphes et isomorphes les (R,R')-classes de différence sont soit des R-voisinages soit des R-intervalles de ces R-voisinages, intervalles qui ne peuvent qu'être des chaînes; réciproquement toute partition de R en R-intervalles plus fine que la partition en voisinages est une partition en

(R,R′)-classes de différence pour un R′ bien choisi hypomorphe et isomorphe à R. Ce résultat généralise de manière fort esthétique le cas classique où R et R′ sont des chaînes. Hélas on verra que bien peu de voisinages ont des intervalles non triviaux, en fait seulement les presque-chaînes et trois autres types (réflexifs et autant d'irréflexifs) à 5 et 6 éléments qui sont C_5, C_6 et V_6, si bien que cette généralisation ne généralise pas grand chose! On peut tout de même en tirer que la partition d'une relation R en (R,R′)-classes de différence est relativement indépendante du choix d'une R′ hypomorphe et isomorphe à R puisqu'elle coïncide moralement avec la partition en voisinages dans laquelle n'intervient pas de R′.

Dans ce § les relations binaires continuent à être implicitement supposées réflexives (ou irréflexives).

§8.0. Définition des voisinages.

DÉFINITION. Une (R,R′)-classe de différence où R et R′ sont hypomorphes et isomorphes est appelée une **(R,R′)-classe de voisinage.** Rappelons qu'une restriction A d'une relation binaire R est une *R-classe de voisinage* s'il existe une relation R′ hypomorphe et isomorphe à R telle que la base de A soit formée d'exactement une (R,R′)-classe de différence.

Si deux relations binaires R et R′ sont hypomorphes et si une partie propre V est formée d'une seule (R,R′)-classe alors R|V est donc une classe de voisinage. On verra qu'une partie propre V vérifie cette condition exactement quand V est un intervalle propre.

DÉFINITION . Soit R une relation binaire dont la base contient x et y. On dira que x et y sont **R-voisins** s'il existe une relation R' Fraïssé-hypomorphe et isomorphe à R, telle que x et y sont dans la même (R,R')-classe de différence.

Si R est une chaîne (au sens restreint) on retrouve la relation classique de voisinage.

On verra plus loin, mais cela peut aider l'intuition dès maintenant, que dans une relation binaire R, *quand l'arête (x,y) est orientée* alors x et y sont R-voisins si et seulement si il existe R' hypomorphe et isomorphe à R telle que $R(x,y) \neq R'(x,y)$ et qu'en transitivisant cette dernière relation entre x et y on obtient la relation de voisinage générale entre x et y quand l'arête (x,y) est quelconque. Dans $R=D_{20}$, *a* et 1 ne sont pas R-voisins mais néanmoins $D_{20}(a,1) \neq D_{21}(a,1)$ bien que D_{20} et D_{21} soient hypomorphes car D_{20} et D_{21} ne sont pas isomorphes.

Une fois montré que la relation de R-voisinage est une relation d'équivalence on appellera **R-voisinage** les classes d'équivalence associées. On dira par abus de langage qu'une relation binaire R est un **voisinage** (sous-entendu *en soi* ou *de lui-même*) si elle est un R-voisinage. Il est évident que la restriction d'une relation binaire R à une partie de la base qui est un R-voisinage, est un voisinage en soi, ce qui justifie l'abus de langage; mais la réciproque n'est pas vraie: toute paire orientée réflexive est un voisinage d'elle-même sans être un voisinage de n'importe quelle extension dans laquelle elle se trouve. Néanmoins il est immédiat que dans une relation binaire R, un intervalle I qui est un voisinage de lui-même est aussi un voisinage de R.

EXEMPLES . Les relations R de cardinal 1 sont des R-voisinages. Dans les diamants $R=D_5$ (resp. D_6) où un élément majore (resp. minore) les 3 éléments d'un 3-cycle, les éléments du 3-cycle forment un R-voisinage alors que le maximum ou minimum ne leur est pas R-voisin. Dans $R=D_{20}$ (ou D_{21}) [voir définition au §7.3] les ensembles {1,2}, {3,4,5}, {a} sont les R-voisinages. Dans $R=V_6$ qui est un R-voisinage, {a,a'} est aussi un R-voisinage.

Il est évident qu'une relation binaire R qui est une R-classe de voisinage est évidemment un R-voisinage; mais une restriction S (de R) peut être une R-classe de voisinage sans être un R-voisinage (par exemple si S est un singleton) mais elle sera un S-voisinage (voir corollaire 1 du §8·1).

Les termes "R-voisinage" et "R-voisins" avaient déjà été définis en [9] pour des ordres. La nouvelle définition est équivalente à l'ancienne pour les ordres entièrement réflexifs ou entièrement irréflexifs. Dans cette ancienne définition x et y étaient R-voisins si et seulement si $\{z|x\leq z\leq y\}\cup\{x,y\}$ est une chaîne finie qui est aussi un intervalle. Dans un "ordre" pas nécessairement réflexif ni irréflexif c'est à dire en fait une relation binaire seulement transitive et anti-symétrique (voir §4 de [9]) deux éléments x,y ($x\leq y$) sont voisins au sens de la nouvelle définition si et seulement si $\{z|x\leq z\leq y\}\cup\{x,y\}$ est une chaîne finie partout réflexive ou partout irréflexive, cette chaîne finie étant en même temps un intervalle (aussi bien dans le sens de Fraïssé au §4 de [9] qu'au sens du §4 du présent article). Par contre l'ancienne définition d'un voisinage du §4 de [9] n'est plus idoine dans un "ordre" au sens élargi pas nécessairement réflexif ni irréflexif: D_{26} serait, avec la définition du §4 de [9], un voisinage puisque l'ensemble des intermédiaires [extrémités comprises] entre les deux éléments de D_{26} est un "ordre" total fini sauf qu'il n'est

ni réflexif ni irréflexif, alors que les deux éléments de D_{26} ne sont pas D_{26}-voisins avec la nouvelle définition.

Pour que cette relation de R-voisinage s'avère une généralisation intéressante du cas des chaînes il faut démontrer les objectifs suivants:

OBJECTIF 1. La relation "x est R-voisin de y " est transitive et les classes d'équivalence associées peuvent donc être appelées des **R-voisinages.** [Selon ma mauvaise habitude, la terminologie ne distinguera pas toujours entre le R-voisinage en tant qu'ensemble et la restriction de R à cet ensemble.]

Il est clair que les R-classes de voisinage ont leurs éléments qui sont R-voisins. *On montrera* (dans l'objectif 5) *la réciproque: les R-voisinages sont des R-classes de voisinage.*

OBJECTIF 2. Les R-voisinages sont des R-intervalles de R (aussi bien au sens du §4 qu'au sens de Fraïssé ([6]) car il sont partout réflexifs ou partout irréflexifs) (et ceci quel que soit le cardinal de R et pas seulement à partir du cardinal 4 comme pour les classes de différence).

OBJECTIF 3. Deux relations binaires hypomorphes R et R′ ont mêmes voisinages mod R ou mod R′ (i.e. les R-voisinages ont mêmes bases que les R′-voisinages) et il y a isomorphie entre R et R′ sur chaque voisinage (même égal à la base), en particulier les voisinages sont Fraïssé-reconstructibles.

OBJECTIF 4. Pour tout R′ hypomorphe et isomorphe à R, chaque R-voisinage est une réunion de (R,R′)-classes de différence.

OBJECTIF 5. Etant donné une relation binaire R il existe R′ hypomorphe et isomorphe à R, telle que chaque R-voisinage est une (R,R′)-classe de

différence (en particulier chaque R-voisinage est une R-classe de voisinage). Si la relation R est elle-même un R-voisinage fini, elle est auto-duale et on peut prendre $R'=R^*$.

Les objectifs 4) et 5) peuvent se résumer en disant qu'une R-classe de voisinage est une (R,R')-classe de différence maximum pour l'inclusion parmi toutes les (R,R')-classes de différence où R' est hypomorphe et isomorphe à R. Ce qui est encore renforcé par l'objectif suivant:

OBJECTIF 6. Si deux relations R et R' sont hypomorphes et isomorphes les (R,R')-classes de différence sont soit des R-voisinages soit des R-intervalles de ces R-voisinages, intervalles qui ne peuvent qu'être des chaînes; réciproquement toute partition en intervalles plus fine (ou aussi fine) que la partition en R-voisinages est une partition en (R,R')-classes de différence pour un R' bien choisi hypomorphe et isomorphe à R.

Ce dernier objectif permet de comprendre comment sont faites les partitions en (R,R')-classes de différence d'une relation binaire R donnée avec une hypomorphe R'. Si R et R' sont isomorphes l'énoncé précédent en permet une description complête indépendante de R'. Si R' est non isomorphe à R qui est donc non reconstructible, la base n'est formée que d'une (R,R')-classe (mini-lemme *(xviii)*) dès que card $R\geq 4$. Si R est de cardinal 3 un examen manuel permet de voir que peuvent être des (R,R')-classes de différence pour un R' bien choisi hypomorphe à R, toutes les parties connexes de R.

Il est nécessaire dans la définition de "R-voisin" d'imposer la condition "Fraïssé-hypomorphe <u>*et*</u> <u>*isomorphe*</u> ". En effet définissons sur $|R|=\{m,a,b,c\}$ l'ordre $a<c$, $b<c$, $m<a$, $m<b$, $m<c$, $a|b \pmod R$, posons $I=\{a,b,c\}$; sans cette

exigence d'isomorphie a et b seraient I-voisins (en prenant $I'=I^*$) ce qui serait incompatible avec la définition déjà donnée du voisinage dans les ordres au §4 de [9]; et qui plus est ce serait choquant compte tenu du fait que a et b ne seraient pas R-voisins alors que I est un intervalle de R. Par ailleurs, l'existence de paires de relations Fraïssé-hypomorphes mais non isomorphes et ne formant qu'une classe, rendrait irréalisable l'objectif n°3 si la condition d'isomorphie n'était pas imposée.

Grâce à l'objectif 5 on montrera l'identité entre la notion de classe de voisinage et celle de voisinage. Cette identité n'est pas évidente car la définition d'un voisinage R dit que pour deux éléments x et y de R il existe $R_{x,y}$ hypomorphe et isomorphe à R mais dépendant de x et y telle que x et y soient dans la même $(R,R_{x,y})$-classe. La définition d'une classe de voisinage R dit qu'on peut trouver un R', *toujours le même*, hypomorphe et isomorphe à R qui fait de $|R|$ une seule (R,R')-classe. Il est seulement évident qu'une relation binaire R qui est une R-classe de voisinage est un R-voisinage, il n'est même pas immédiat qu'une restriction S (de R) qui est une R-classe de voisinage est un S-voisinage.

On verra aussi que tout intervalle propre d'une classe de voisinage est une chaîne.

§8.1 Démonstrations des différents objectifs.

PROPOSITION *(b)* (OBJECTIF 1). La relation "est voisin de" est transitive.

PREUVE. Supposons que x et y sont R-voisins et contenus dans une (R,R')-classe de différence U', et que y et z sont R-voisins et contenus dans une même (R,R")-classe de différence U", R' et R" étant Fraïssé-hypomorphes à R et isomorphes à R; on supposera en outre, pour éviter les cas banaux, que $x \notin U"$ et $z \notin U'$. On admettra encore que card $R \geq 4$.

Étape I). Soit a dans $U' \cap U"$. Soit v' un élément de U'-U" avec par exemple $R|(a,v')=(+,-)$ et v" un élément de U"-U'. U" étant un R-intervalle (puisque card $R \geq 4$), $R|(a,v')$ vaut $R|(v",v')$ et, U' étant un R-intervalle, $R|(v",v')$ vaut $R|(v",u')$ pour tout u' de U'-U", donc $R|(a,v')=R|(a,u')$. Par suite U'-U" est un R-intervalle.

Puisque un $S_{R,R'}$-chemin relie un élément de U'-U" à un élément de $U' \cap U"$ il existe dans ce chemin une arête orientée reliant un s' de U'-U" à un s de $U' \cap U"$. Comme U" est une (R,R")-classe de différence on a $R|(s',s)=R|(s',a)$ et comme U'-U" est un R-intervalle on a $R|(s',a)=R|(v',a)$; Donc (a,v') est R-orienté et de la même manière pour tout v' de U'-U" et tout a de $U' \cap U"$. Il en résulte par le lemme *(x)* que U'-U" est une chaîne R-majorant a (puisqu'on a choisi $R|(a,v')=(+,-)$).

Si maintenant $U' \cap U"$ contient un deuxième point $b \neq a$, v' R-majore tous les éléments de $U' \cap U"$ qui donc d'après le lemme *(x)* est une chaîne R-antérieure à U'-U". Conclusion de cette étape I) : U' est une R-chaîne. De même pour U".

Étape II). Voyons donc maintenant le cas où U' est une R-chaîne ainsi que U".

D'après le lemme *(xvii)* U' ne peut être que finie ou de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$. Représentons-nous U' par $\cdots<-p-1<-p<\cdots<0<1<2<3<\cdots<n<n+1<\cdots$ (mod R), 0 étant dans U'∩U" et un i<0 et un j>0 étant tous deux dans U'-U". Soit encore un m dans U"-U', m étant $S_{R,R''}$-lié à 0. On a R|(0,j)=(+,-)= R|(m,j) (car U" est un R-intervalle) =R|(m,0) (car U' est un R-intervalle). Et de même R|(m,i)=(+,-). Comme 0∈U" et j∉U" on a R|(m,i)=R|(j,0)=(-,+), contradiction. On tire de cette contradiction que si un élément de la R-chaîne U' est dans U'∩U" tous les éléments antérieurs (s'il en existe) sont dans U'∩U" ou bien tous les postérieurs (s'il en existe).

On prend par exemple R|(m,0)=(+,-). La chaîne U' ne peut être de type ω^* ni $\omega^*+\omega$ car alors {m}∪U' contiendrait une chaîne de type $1+\omega^*$ qui serait aussi dans U" lequel ne pourrait plus, d'après le lemme *(xvii)*, être une classe d'hypomorphie. U' ne peut donc être que de type fini ou ω (si R|(m,0)=(+,-)). De la même manière, toujours si R|(m,0)=(+,-), U" est de R-type ω^* ou fini. Comme tout élément m de U"-U' est R-antérieur à tout élément de U' (car R|(m,0)=(+,-)), U'∪U" ne peut être que de type ω, ω^*, $\omega^*+\omega$ ou fini. Dans chacun de ces cas on sait que deux éléments quelconques x et z de U'∪U" sont R-voisins.

Étape III). Supposons maintenant que card R=3 donc |R|={x,y,z}. Supposons que R|(x,y)=R|(y,z)=(+,-) alors R^* est hypomorphe et isomorphe à R et met x et z dans la même (R,R^*)-classe. Supposons maintenant que R|(x,y)= R|(z,y)=(+,-). R' change (x,y), quelle que soit son action sur (y,z) il faut, pour que R et R' soient isomorphes, que R soit une chaîne. x et z y sont alors voisins. □

On a donc vu dans cette preuve que *dans une relation binaire R deux R-classes de voisinage ne peuvent se chevaucher* (intersection non vide et non inclusion) *que si leur réunion est une chaîne.*

PROPOSITION *(c)* (Objectif 2). Tout R-voisinage est un R-intervalle.

PREUVE . Soit V un R-voisinage et *a* un élément extérieur à V. Deux éléments quelconques x et y de V sont R-voisins, ils sont donc dans la même (R,R')-classe de voisinage U pour un R' hypomorphe et isomorphe à R. L'élément a n'étant pas voisin de x ni de y n'est pas dans la classe U. Cette classe U est donc un a-intervalle et par suite $R|(a,x)=R|(a,y)$. Ceci étant vrai pour tout x et y de V on conclut que V est un *a*-intervalle pour tout *a* extérieur à V donc un R-intervalle. □

PROPOSITION (d) (Objectif 4). Pour tout R' Fraïssé-hypomorphe et isomorphe à R, chaque R-voisinage est une réunion de (R,R')-classes de différence.

PREUVE . Chaque élément de la base est contenu dans une (R,R')-classe de différence C où R est isomorphe à R', et une telle classe ne peut être à cheval sur un R-voisinage V et son complémentaire car par définition tout élément de $V \cap C$ serait R-voisin de tout élément de C-V. □

PROPOSITION (e) (Objectif 5). Etant donné une relation binaire R il existe R' Fraïssé-hypomorphe et isomorphe à R, telle que chaque R-voisinage est une (R,R')-classe de différence. Si la relation R est elle-même un R-voisinage fini, elle est auto-duale et on peut prendre $R'=R^*$.

PREUVE . On veut montrer qu'il existe R" hypomorphe et isomorphe à R tel que tout R-voisinage V soit une (R,R")-classe. Sinon V est d'après l'objectif 4 réunion de, disons, deux classes de voisinage A et B. Soit $a \in A$ et $b,c \in B$. Les éléments a et b étant R-voisins il existe une relation Q hypomorphe et isomorphe à R telle que $Q(a,b) \neq R(a,b)$ (donc {a,b} est

orientée), par exemple R(a,b)=+ ≠ Q(a,b)=- . L'hypo- et l'isomorphie entre R et Q appliquée à {a,b,c} prouve que {b,c} est orientée. Soit b,c,d 3 éléments distincts (s'il en existe) de B. Si {b,c,d} est un cycle le diamant R|{a,b,c,d} ne peut être isomorphe au diamant Q|{a,b,c,d} qui est de type dual du premier; on en conclut que {b,c,d} n'est pas un cycle mais donc une chaîne ainsi donc que {a,b,c,d}. Si card B ≤2 on vérifie encore que B∪{a} est une chaîne. Il n'y a donc dans V ni cycle ni paire non orientée par conséquent V est une chaîne. Si V est fini on définit R''_V de base V comme étant, sur les couples extraits de V, opposée à R; si V est infini par exemple de type ω on définit R''_V comme la relation $\mathbb{N}'$ définie au sous-paragraphe 7.8. On procède de même pour chaque R-voisinage et on définit R" comme étant, sur les couples extraits du même voisinage V, le recollement des R''_V, et comme étant identique à R pour les couples à cheval sur deux R-voisinages. Ce qui donne bien une relation hypomorphe et isomorphe à R puisque les R-voisinages sont des intervalles, chacun de ces R-voisinages devient une (R,R")-classe d'hypomorphie. La dernière clause de l'énoncé se vérifie sur la liste des voisinages une fois établie l'identité entre les notions de voisinage et de classe de voisinage. □

Est donc acquis maintenant qu'un *voisinage est une classe de voisinage*. La réciproque étant conséquence du premier des deux corollaires suivants du lemme *(x)*:

COROLLAIRE 1. Soit I un intervalle d'une relation binaire R, deux éléments de I sont R-voisins si et seulement si ils sont I-voisins.

PREUVE . La dernière condition est évidemment suffisante car si I' est une relation hypomorphe et isomorphe à I et si un x de |I| est $S_{I,I'}$-lié à un y de |I|, on peut définir R' hypomorphe et isomorphe à R qui ne diffère de R

que sur les couples extraits de $|I|$ où elle est identique à I' et la $S_{I,I'}$-arête de x à y sera encore une $S_{R,R'}$-arête (R' est hypomorphe et isomorphe à R car I est un R-intervalle). Réciproquement le lemme *(x)* précédent montre qu'un intervalle propre $I \cap C$ d'une (R,R')-classe de différence C, ne peut être qu'une chaîne ou un 3-cycle ou de type D_7 ou D_9; sauf dans ces deux derniers cas, deux quelconques des éléments de C peuvent être liés par un (I,I')-chemin, I' étant défini comme identique à I sauf pour les couples extraits de $|I \cap C|$ qui est un intervalle de I et où on inverse le cycle ou la chaîne; si $|I \cap C|$ est égal à $|C|$ tout (R,R')-chemin inclus dans C est encore un (I,I')-chemin. On vérifie maintenant que si $|C|$ est de type D_7 (resp. D_9), R lui est identique (lemme *(i)*) et C ne possède qu'un seul intervalle non trivial I [formé des deux sources (resp. extrémités)] et les éléments de I ne sont pas voisins ni mod I ni mod R. □

En conséquence tout intervalle d'un voisinage est voisinage de lui-même. Soit R une relation binaire dont une restriction S est une R-classe de voisinage; soit V l'ensemble des éléments R-voisins d'un élément de S. Cette restriction S est un intervalle de la relation $R|V$ dès que R est de cardinal infini ou fini ≥ 3, donc S est un S-voisinage. Une vérification manuelle pour le cardinal 2 permet de montrer complètement l'identité entre les deux concepts de "voisinage" et de "classe de voisinage" !

COROLLAIRE 2. Soit C un voisinage, toute partie propre C' qui est un C-intervalle est une chaîne. De même si C est une classe d'hypomorphie, une partie propre C' qui est un C-voisinage est une chaîne ou un 3-cycle (ce dernier cas n'arrivant que si C est un diamant).

PREUVE . La partie C′ est un m-intervalle orienté pour un m extérieur à C′ d'après la connexité de C. Si C est de cardinal ≥4 le lemme *(x)* précédent donne le résultat. Si le cardinal de C est 3 on vérifie à la main. □

REMARQUE. Soit R la chaîne a<b<c<d<e et R′ la chaîne a<d<b<c<e, b et c sont dans la même (R,R′)-classe mais pas dans la même (I,I′)-classe si I est l'intervalle R|{b,c} et si I′ est l'intervalle R′|{b,c}.

Dans une relation binaire R on peut définir $\sigma(x,y)$ qui vaut + si et seulement si il existe R′ hypomorphe et isomorphe à R tel que $S_{R,R'}(x,y)=+$. On peut définir la clôture transitive τ de la relation σ; $\tau(x,y)=+$ n'est autre que la relation de voisinage "x est R-voisin de y ". En effet si x et y sont voisins on a (objectif 5) $T_{R,R'}(x,y)=+$ pour un R′ hypomorphe et isomorphe à R, et donc il existe une suite $(x,x_1,\cdots,x_p,y)$ vérifiant $S_{R,R'}(x,x_1)=S_{R,R'}(x_1,x_2)=S_{R,R'}(x_2,x_3)=\cdots=S_{R,R'}(x_p,y)=(+)$ et alors $\sigma(x,x_1)=\sigma(x_1,x_2)=\sigma(x_2,x_3)=\cdots=\sigma(x_p,y)=(+)$ donc $\tau(x,y)=+$ et la relation de voisinage est plus forte (au sens large) que τ; réciproquement si $\sigma(x,y)=+$ alors x et y sont déjà voisins. Par examen de la liste des voisinages on verra qu'en fait, quand l'arête (x,y) est orientée, x et y sont R-voisins si et seulement si il existe R′ hypomorphe et isomorphe à R telle que $R(x,y)\neq R'(x,y)$ [ceci parce que dans le cas fini on pourra prendre $R'=R^*$, dans le cas infini le R-voisinage sera une chaîne et il suffira alors pour définir R′ d'y inverser l'intervalle [x,y] (ou [y,x] suivant que x<y ou y<x)].

Énonçons encore comme conclusion le théorème suivant (l'objectif 6) qui condense les deux objectifs précédents:

THÉORÈME *(f)* **. Soient R et R′ deux relations binaires hypomorphes et isomorphes; chaque (R,R′)-classe de différence est soit un R-voisinage soit un R-intervalle d'un R-voisinage (intervalle qui s'il est propre est donc une chaîne). Soient R et R′ deux relations binaires hypomorphes; chaque (R,R′)-classe de différence est soit toute la relation soit un R-voisinage soit une chaîne. Réciproquement toute partition en intervalles plus fine que la partition en R-voisinages d'une relation binaire R est une partition en (R,R′)-classes de différence pour un R′ bien choisi hypomorphe et isomorphe à R.**

PREUVE . La proposition directe vient du fait que les classes sont des intervalles et que deux éléments non voisins ne peuvent être mis dans la même classe.

Le dernier cas de la proposition directe doit être examiné à la main quand card(R)≤3 car les classes ne sont plus nécessairement des intervalles. La chaîne de l'énoncé n'est peut-être pas du coup un voisinage, par exemple si R est un 3-cycle et R′ une déformée obtenue en changeant une arête.

La réciproque s'obtient ainsi. Soit R une relation binaire partitionnée en intervalles d'éléments R-voisins. Si un intervalle I est inclus dans un R-voisinage V, R|I est aussi un R-voisinage W auquel est associé grâce à l'objectif 5 une relation W′ de même base qui fait de |W| une seule (W,W′)-classe. Prenons pour R′|I cette relation W′. Entre éléments appartenant à des intervalles différents de la partition prenons pour R′ la relation R elle-même. □

La situation typique de la première partie de l'énoncé direct précédent est celle de R $=C_6$ et R′ déduite de R par inversion de, par exemple, l'arête (3,3′) obtenue en posant 3′<3 mod R′; alors les (R,R′)-classes sont {3,3′}

et les singletons {1}, {1'}, {2}, {2'}; il s'agit bien d'une partition plus fine que la partition en R-voisinages laquelle ne donne qu'un seul voisinage (le tout); chaque partie de cette partition est bien une chaîne. V_6, C_6 et C_5 sont d'ailleurs les seuls cas de ce genre en dehors des presque-chaînes puisque ce sont les seuls voisinages à avoir des intervalles propres non triviaux.

Reste donc à pourvoir à l'objectif 3.

OBJECTIF 3 du §8.0:

PROPOSITION *(g)* . Deux relations hypomorphes ont les mêmes voisinages. (Plus précisément si R et R' sont hypomorphes tout R-voisinage est un R'-voisinage.)

PREUVE. Soit R et R' deux relations binaires hypomorphes et V un R-voisinage de R.

1) Si $|V|\neq|R|$, il existe S hypomorphe et isomorphe à R qui fasse de $|V|$ une (R,S)-classe. $|V|$ est un R-intervalle. Montrons que c'est aussi un R'-intervalle. Si ça n'était pas le cas on aurait par exemple pour des x, y de $|V|$ et pour un *a* non dans $|V|$: $R'|(x,a)\neq R'|(y,a)$. Comme on a $R|(x,a)=R|(y,a)$ il faut que (x,a) et (y,a) soient orientés. Supposons par exemple que (y,a) change par passage de R à R' et pas (x,a), par exemple $R|(x,a)=R'|(x,a)=R|(y,a)=(+,-)=R'|(a,y)$. Alors y et *a* sont dans la même (R,R')-classe. Si R et R' étaient isomorphes alors x et *a* seraient voisins ce qui est absurde. Montrons que R et R' sont effectivement isomorphes. Soit z un élément de $|V|$, $R|(|V|\cup\{a\}-\{z\})$ est isomorphe à $R'|(|V|\cup\{a\}-\{z\})$, le premier possèdant un maximum (à savoir *a*) il doit en aller de même avec le second. Le $(R'|(|V|\cup\{a\}-\{z\}))$-maximum ne peut être *a* et est donc un v de $|V|$. Or les seuls voisinages V qui une fois qu'on leur a ôté un élément z

quelconque possèdent un maximum v sont les chaînes. Mais si V est une chaîne, $R|(|V|\cup\{a\})$ en est une aussi, obtenue en rajoutant un maximum. R', s'il est de base $(|V|\cup\{a\})$, est alors aussi une chaîne et donc isomorphe à R. Si d'autres éléments b que a existent dans $|R|-|V|$ et si (a,b) est neutre il ne peut y avoir pour un quelconque t de $|V|$, isomorphie entre $R|\{a,b,t\}$ (de type D_7 ou D_9) et $R'|\{a,b,t\}$ dès que $|R|\neq\{a,x,y\}$. Tous les liens entre éléments de $|R|-|V|$ sont donc orientés. Dès que card $V \geq 2$ il ne peut non plus y avoir de 3-cycle dans $R|(|R|-|V|)$ car ils formeraient un diamant avec tout t de $|V|$. R est donc, dès que card $V \geq 2$, une chaîne et R' qui lui est hypomorphe lui est aussi isomorphe. Reste enfin le cas où V est un singleton sommet du diamant R, cas qui est trivial.

Puisque $|V|$ est un R'-intervalle on peut définir S' de la façon suivante. Un isomorphisme f envoie $R|V$ sur $R'|V$; sur $|V|$ on définit alors S' comme étant f(S) (classiquement f(S) est défini par $f(S)(u,v)=S(f^{-1}(u),f^{-1}(v))$) et comme étant R' sur les couples autres que ceux extraits de $|V|$ (ceux extraits de $|R|-|V|$ et ceux à cheval sur $|R|-|V|$ et $|V|$). R' et S' sont bien hypomorphes et isomorphes et les éléments de $|V|$ dans la même (R',S')-classe.

La symétrie des rôles entre R et R' permet d'affirmer que les voisinages de R et de R' ont les mêmes bases.

2) Si $|V|=|R|$, R et R' sont isomorphes, d'après le mini-lemme *(xviii)*, dès que le cardinal de R est ≥ 4. Le même type de preuve qu'à la proposition *(a)* permet d'aboutir, puisque R est alors un voisinage, au fait que R' en est aussi un. Si le cardinal de R est ≤ 3 une vérification manuelle suffit. □

Cet objectif n'allait nullement de soi. En effet dire que V est un voisinage de R veut dire qu'il existe S hypomorphe à R tel que ··· ; si maintenant R' est hypomorphe à R rien ne dit a priori qu'il va exister un S' hypomorphe à R' tel que ···

§8.2. Arêtes versatiles.

J'introduis la notion générale d'arête *versatile* d'une classe d'hypomorphie (elle figurait déjà dans [9]) qui dans le cas des classes d'hypomorphie non autoduales coïncide avec celle donnée jusqu'ici. Cette généralisation permet d'étendre certaines propriétés des chaînes aux voisinages quelconques, mais le plus souvent de façon banale: en dehors des presque-chaînes une vérification systématique suffit.

L'esprit de ce § est de voir que les arêtes versatiles sont sans importance. Par exemple deux relations binaires hypomorphes et isomorphes seront identiques sauf peut-être sur ces arêtes. Nous verrons que si R, R' et R" sont trois relations binaires hypomorphes et isomorphes une (R,R')-classe d'hypomorphie ne peut en chevaucher une (R,R")-classe que sur les arêtes versatiles lesquelles forment en plus une chaîne. Ceci peut expliquer le peu d'intérêt pratique des R-voisinages: ceux-ci étant des (R,R')-classes de voisinage *maximum* quand R' reste hypomorphe et isomorphe à R, ont l'avantage de ne pas dépendre de R'. Mais ils sont rarement différents des autres (R,R')-classes de voisinages non triviales: uniquement quand R possède des intervalles propres maximaux (qui sont en plus des chaînes) formés d'arêtes versatiles que C_5, C_6 et V_6 sont seuls, avec les presque chaînes, à posséder.

DÉFINITIONS . Deux (multi)relations binaires R et R' de même base sont dites **unimorphes** si elles sont hypomorphes et si leur base n'est formée que d'une seule (R,R')-classe de différence. On dit qu'une arête d'une classe d'hypomorphie R est **versatile** si elle est orientée et s'il existe un R' unimorphe à R pour lequel l'arête change et un R" unimorphe à R pour lequel elle ne change pas (c.à.d. que R' diffère de R" sur cette arête).

Les extrémités d'une arête versatile sont bien sûr voisines.

La notion d'arête versatile n'est pas intrinsèque: dans un diamant {a,b,c,d} de maximum a, (b,c) est versatile mais ne l'est plus dans

$R|\{b,c,d\}$; dans D_{20}, (1,3) n'est pas versatile mais le devient dans $D_{20}-\{a\}$.

Il n'y a pas d'arête versatile dans les consécutivités ni les cycles. Dans une presque-chaîne qui n'est pas une chaîne les arêtes incidentes à au moins un des presque-extrémaux sont les seules à être non versatiles (voir preuve plus loin).

EXEMPLES . Les seuls voisinages non lopeziens où existent des arêtes versatiles sont C_5, C_6 et V_6, ces arêtes sont, $\{1,1'\}$ et $\{2,2'\}$ pour C_5 et C_6, $\{3,3'\}$ pour C_6, et $\{a,a'\}$ pour V_6. Les seules autres classes d'hypomorphie, en dehors des presque-chaînes, où existent des arêtes versatiles sont D_5, D_6, D_{20}, D_{21}, D_{10} et D'_{10}, D_{14}, D_{15}, D'_{14}, D'_{15}, D_{11} et D'_{11}: dans D_{20} ces arêtes sont (1,2), (3,4), (4,5) et (3,5); dans D_{10}, l'arête joignant les deux derniers éléments de la chaîne $\{1,2,3\}$; dans D_{14} ce sera (3,4).

Remarquons que dans C_6 (qui est autoduale), une arête faisant partie d'un 3-cycle n'est pas versatile alors qu'elle vérifie la condition de versatilité donnée jusqu'à ce sous-paragraphe pour les classes non autoduales.

THÉORÈME 8.2.1 . Dans une chaîne, les voisinages infinis ou de cardinal ≥ 4 ont toutes leurs arêtes versatiles. Réciproquement les seules classes d'hypomorphie dont toute arête est versatile sont les chaînes de cardinal ≥ 4.

On voit facilement qu'une chaîne de cardinal ≤ 3 a son arête reliant les éléments extrêmes qui est non versatile, les autres arêtes, elles, sont versatiles. En effet soit $1<2<3$ cette chaîne; dans une chaîne qui lui est unimorphe, 1 ne peut rester premier tandis que 3 reste dernier, comme il n'y a qu'un seul second un des extrêmes doit passer à l'autre bout et l'arête joignant les deux extrémités change à tout coup.

On vérifie alors facilement que deux classes d'hypomorphie hypomorphes, dont aucune n'est une 3-chaîne, ont les mêmes arêtes versatiles.

Ce théorème 8.2.1 sera une conséquence du lemme suivant:

LEMME 8.2.2. Soit R une chaîne de cardinal ≥ 4 qui est formée d'un seul R-voisinage, et soit x_0, x_1 deux éléments, il existe R' et R" unimorphes à R tels que $R(x_0,x_1)=R'(x_0,x_1)\neq R''(x_0,x_1)$.

PREUVE. Si R est fini R" est obtenu en inversant R et procédons comme suit pour obtenir R'. Si x_0 et x_1 ne sont pas les extrémaux, inversons le reste de la chaîne et réinsérons x_0, x_1 en conservant leurs positions entre eux et par rapport aux autres éléments. Si x_0 est minimum et x_1 pas maximum, inversons le reste de la chaîne et rajoutons $\{x_0,x_1\}$ à la fin dans cet ordre. Si x_0 est minimum et x_1 maximum, inversons le reste de la chaîne et insérons (ni au début ni à la fin ce qui est possible grâce à la cardinalité de R) $\{x_0,x_1\}$ dans l'ordre: $x_0<x_1$. Si R est infini par exemple de type ω, usons du stratagème suivant: Inversons pour y définir R" l'intervalle initial fini de R engendré par x_0 et x_1. L'intervalle final complémentaire est de type ω et au §7.8 est défini $\mathbb{N}'(x,y)$ de type ω, qui sera par définition la relation R" pour les $x,y>x_0$ et $>x_1$. Entre un x de l'intervalle initial et un y de l'intervalle final on pose $x<y$ mod R". R' est défini de même sauf que l'intervalle initial n'est pas inversé mais réinséré quelque part au beau milieu de l'intervalle final une fois que celui-ci a été réordonné par $\mathbb{N}'$. Deux éléments de cet intervalle R-initial sont alors liés par un (R,R')-chemin faisant une escale au R'-minimum. □

La réciproque du théorème s'obtient en regardant l'inventaire des classes d'hypomorphie et en utilisant le lemme 8.3.2. pour le cas restant des presque-chaînes.

§8.3

On se souvient que si deux relations binaires R et R′ sont hypomorphes et isomorphes et si x et y de |R| ne sont pas R-voisins alors R(x,y)=R′(x,y) [l'hypomorphie ne suffit pas: prendre a et 1 dans D_{20} et D_{21}]. Complétons cet énoncé par ce dernier théorème après avoir remarqué qu'une classe d'hypomorphie R et sa duale R^* ont les mêmes arêtes versatiles:

THÉORÈME 8.3.1. Soit R une relation binaire de cardinal ≥4 formée d'un seul R-voisinage et R′ une relation hypomorphe à R. Si |R| est formé d'au moins deux (R,R′)-classes de différence alors R′ est isomorphe à R et ne diffère de R qu'éventuellement sur les arêtes versatiles (les éléments qui ne sont pas sommet d'une telle arête sont alors chacun seul dans leur classe qui est réduite à un singleton); si |R| n'est formé que d'une (R,R′)-classe de différence alors R′ est isomorphe à R^* et ne diffère de R^* qu'éventuellement sur les arêtes versatiles.

Cet énoncé est encore vrai pour une classe d'hypomorphie finie de cardinal ≥5. Par exemple pour un diamant: tout diamant qui lui est unimorphe ne peut différer du dual du premier sur les arêtes versatiles c'est à dire sur le cycle.

Les relations $R=D_3$ (1<2,2<3,3<1) et $R'=D_4$ (1<2<3) fournissent un contrexemple pour le cardinal 3: il y a deux (R,R′)-classes {2} et {1,3} mais R′ n'est pas identique à R. Avec D_3 et D_4^* il n'y a qu'une classe de différence {1,2,3} mais R′ et R^* ne sont pas identiques. La base de $R=D_{12}$ et $R'=D_{13}$ de cardinal 4 ne forme qu'une (R,R′)-classe de différence bien que les paires (2,3) soient identiques mod R ou R′.

Le cas des voisinages infinis (donc de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$) est sans intérêt puisque toutes les arêtes y sont versatiles.

La preuve est une fastidieuse vérification coup par coup sur chaque classe d'hypomorphie des listes ci-dessus. Contentons-nous du cas des presque-chaînes (finies) après avoir observé qu'une presque-chaîne de cardinal ≥ 4 ne peut être un cycle:

LEMME 8.3.2. Soit P une presque-chaîne finie qui n'est pas une chaîne ni un cycle, de presque-minimum m et de presque-maximum M, qui est hypomorphe (et donc isomorphe) à une presque-chaîne P'.

1) Si P' est unimorphe à P alors m est presque-maximum de P' et M en est le presque-minimum, et P^* et P' sont identiques sur les arêtes non versatiles.

On en tire que toute arête joignant au moins un des presque-extrémaux est non versatile (ce sont bien sûr les seules arêtes à être non versatiles).

2) Si P et P' forment au moins deux (P,P')-classes de différence alors P et P' ne diffèrent que sur les arêtes versatiles.

PREUVE . 1) Soit m' le presque-minimum de P' et M' son presque-maximum. Supposons d'abord m' et M' tous deux différents de m et de M; on a $P|(m,M)\neq(+,-)$ puisque P n'est pas une chaîne donc $P|(m,M)=(-,+)$ puisque $\{m,M\}$ est une P'-chaîne; alors $\{m,m',M\}$ serait une P'-chaîne donc une P-chaîne alors qu'en fait $\{m,m',M\}$ est un P-cycle. Par hypothèse de classe unique on ne peut avoir m=m' car m formerait alors une classe à lui seul. Supposons donc que m'=M. Pour tout x de P, $\{m,M,x\}$ est un P-cycle donc un P'-cycle ce qui serait absurde si m était différent de M'.

2) Si $|P|$ est formé d'au moins deux (P,P')-classes de différence prouvons que m est P'-presque-minimum et M est P'-presque-maximum. En effet soit m' le presque-minimum de P' et M' son presque-maximum. Supposons par l'absurde

que $m'<m$ (mod P') et $M'>M$ (mod P'). Supposons d'abord m' et M' tous deux différents de m et de M; on a comme précédemment $P|(m,M)\neq(+,-)$ puisque P n'est pas une chaîne donc $P|(m,M)=(-,+)$ puisque $\{m,M\}$ est une P'-chaîne; alors $\{m,m',M\}$ serait une P'-chaîne donc une P-chaîne alors qu'en fait $\{m,m',M\}$ est un P-cycle. Supposons donc que $m'=M$. Tout $x<M$ (mod P) devient $>M$ (mod P') et est donc dans la même classe que M, pour qu'il y ait deux classes il faudrait que $\{m\}$ fasse une classe à lui seul ce qui n'est possible que si m est second élément de P' car sinon m serait $S_{P,P'}$-lié à ce second élément de P', mais alors $P-\{m\}$ est une P-chaîne et pas une P'-chaîne. On a donc $m=m'$. Pour tout x différent de m et M, $\{M,m,x\}$ est un P-cycle si $M\neq M'$, donc un P'-cycle ce qui est absurde; on a donc bien $M=M'$. □

On tire du dernier théorème 8.3.1 que, hormis le cas des chaînes, les voisinages ne sont pas autre chose que les $T_{R,R'}$-classes de différence. Plus précisément:

COROLLAIRE 8.3.3. Soit R une relation binaire. Sur les arêtes (x,y) non versatiles de chaque voisinage la relation de voisinage "x est R-voisin de y " est identique à la relation $T_{R,R'}(x,y)$, et ceci pour tout R' hypomorphe et isomorphe à R, à l'exclusion du cas où R' est identique à R sur les arêtes non versatiles du voisinage.

PREUVE . Le théorème précédent prouve que la relation " R-voisin " est plus forte que la relation $T_{R,R'}$ avec les hypothèses de l'énoncé. La réciproque est une conséquence de la définition de la relation "R-voisin". □

L'exemple de la relation $R=D_{20}$ et de $R'=D_{21}$ qui est hypomorphe mais pas isomorphe à R' est une illustration du cas où la relation "R-voisin" est strictement plus forte que $T_{R,R'}$ puisque par exemple (a,1) [tel que défini au §7.3] satisfait la relation $T_{R,R'}$ alors que a et 1 ne sont pas R-voisins.

Le dernier théorème 8.3.1 peut se formuler ainsi:

Soit R' une relation hypomorphe à une relation binaire R. Soit V un R-voisinage. A moins que R' ne soit identique à R sur les arêtes non versatiles du voisinage, les éléments de V ne forment qu'une (R,R')-classe de différence (le cas où toutes les arêtes sont versatiles entre donc dans les exceptions).

ou encore:

PROPOSITION 8.3.4. Soient R' et R" deux relations hypomorphes à une relation R. Sur chaque voisinage, *sauf les presque-chaînes et* C_6, la partition en (R,R')-classes de différence est la même que la partition en (R,R")-classes à moins que certaines classes ne soient formées de singletons.

PREUVE . Sur chaque voisinage V de R, R" ne diffère de R' que sur les arêtes versatiles. Si le voisinage n'est pas une presque-chaîne, d'abord il est fini et par ailleurs, sauf dans le cas de C_6, un élément au moins n'est pas extrémité d'une arête versatile et peut donc servir d'étape pour un $(R|V,R^*|V)$-chemin à 3 éléments reliant deux éléments quelconques du voisinage V, ce chemin sera formé d'arêtes non versatiles où donc R', R" et R^* sont identiques et sera donc un (R,R')-chemin et un (R,R")-chemin. □

Par exemple D_5 et D^*_6 partagent $|D_5|$ en deux (D_5,D^*_6)-classes de différence à savoir {a} et {b,c,d} alors que D_5 n'est formé que d'une (D_5,D^*_5)-classe.

Autrement dit R′ n'a pas beaucoup d'importance, un autre R′ (en particulier R^* pour toutes les classes finies à l'exception de D_{12} et D_{13}) redonnant, *en général*, les mêmes classes.

Dans le cas de C_6 une relation C'_6 inversant 1 et 1′, 2 et 2′, 3 et 3′ partage C_6 en 3 classes de différence {1,1′}, {2,2′}, {3,3′}.

On vérifie encore sur la liste des classes:

THÉORÈME 8.3.5. Si R, R′, R" sont trois relations binaires hypomorphes, une (R,R′)-classe de différence ne peut chevaucher une (R,R")-classe (non inclusion et intersection non vide) que si ces classes sont des chaînes dont toutes les arêtes sont versatiles dans chacune des classes. Une (R,R′)-classe de différence ne peut être incluse dans une (R,R")-classe que si la première classe a toutes ses arêtes qui sont des arêtes versatiles de la seconde classe.

Ce que précise l'énoncé suivant:

PROPOSITION 8.3.4. Dans une classe d'hypomorphie autre qu'un diamant une partie (pas nécessairement propre) dont toute arête est versatile ne peut être qu'une chaîne.

PREUVE . En effet cette partie ne peut contenir d'arête neutre ni de 3-cycle (un 3-cycle formé d'arêtes versatiles ne peut exister que dans un diamant [vérification sur la liste] or d'après le lemme *(iii)* ce diamant est toute la classe et cette classe (et donc la partie) possède alors des arêtes non versatiles qui lient le cycle à l'extremum). □

§8.4

DÉFINITION . Disons par analogie avec le §3 de [9] qu'une permutation f d'une relation binaire |R| est *localisée* si pour tout x de la base f(x) est R-voisin de x et si, dans le voisinage engendré par x, l'arête (x,f(x)) est versatile dès lors que $f(x)\neq x$. On peut alors affirmer la forme suivante du dernier corollaire.

COROLLAIRE 8.4.6. Si deux éléments x et y d'une relation binaire R sont R-voisins alors pour toute relation R' hypomorphe et isomorphe à R, x et y sont dans la même (R,R')-classe de différence sauf si une permutation localisée est un isomorphisme de R sur R'.

Mais avec cette définition on ne peut plus, au contraire du §3 de [9], affirmer que si deux relations sont hypomorphes et isomorphes, une permutation localisée réalise un isomorphisme entre elles: ainsi dans $|X_5|$ la permutation $1\leftrightarrow a'$ $2\leftrightarrow 3$ est un isomorphisme de X_5^* sur X_5 bien que dans X_5 aucune arête ne soit versatile; on peut seulement affirmer qu'un isomorphisme est réalisé par une permutation envoyant chaque élément sur un voisin.

Deux relations binaires Fraïssé-hypomorphes *finies* R et R' se révèlent au bout du compte quasiment identiques: sauf dans le cas des relations à deux éléments, sauf dans le cas de la 3-chaîne 1<2<3 et du 3-cycle 1<3,3<2,2<1, et sauf avatar de D_{12} ou D_{13} *(on voit au §2 que toutes ces exceptions sont exactement des relations binaires non demi-reconstructibles)* il existe une application canonique de l'une sur l'autre, qui sur chaque (R,R')-classe de différence est un isomorphisme ou un anti-isomorphisme, et qui est

localisée (c'est à dire qu'elle ne diffère de l'identité que sur les arêtes versatiles). Notons qu'il peut y avoir isomorphie sur une classe (si par exemple il y a plusieurs (R,R')-classes) sans que cette isomorphie soit nécessairement localisée: par exemple X_5^* est isomorphe à X_5 mais la seule permutation localisée de X_5 est l'identité qui est un *anti*-isomorphisme de X_5 sur X^*_5. La simplicité de la situation ne peut que contraster avec la lourdeur des techniques utilisées pour la mettre en lumière. Il semble en tout cas que la ($\leq$-1)-hypomorphie des relations binaires finies ne décèlent plus de secret, mais le cas infini n'est pas tout à fait clair: on ne sait pas exactement quelles sont les chaînes $\mathbb{N}'$, hypomorphes à $\mathbb{N}$, telles que la base de $\mathbb{N}$ ne forme qu'une seule ($\mathbb{N}$,$\mathbb{N}'$)-classe de différence.

Le cas des *multirelations* est encore plus problématique (voir §8.6).

§8.5 . Les (≤k)-voisinages.

Ce sous-paragraphe requiert la connaissance de [17] et de [9].

Les voisinages envisagés jusqu'ici peuvent être considérés comme des (≤6)-voisinages si on donne la définition suivante:

Une partie V de la base d'une relation binaire R est dite une **classe de (≤k)-voisinage** de R s'il existe une relation binaire R', (≤k)-hypomorphe à R, telle que V soit formée d'exactement une (R,R')-classe de différence. Dire d'une relation binaire R qu'elle est une "**classe de R-(≤k)-voisinage**" revient à dire qu'elle est une "classe de (≤k)-hypomorphie".

On définit de même la notion de **(≤k)-voisinage.** Deux éléments x et y de R sont dits **(≤k)-voisins** s'il existe R_{xy} , (≤k)-hypomorphe à R, telle que x et y sont dans la même (R,R_{xy})-classe de différence. La relation ainsi définie entre x et y sera une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence seront appelées des (≤k)-voisinages.

Pour k=4 ou 5 l'identité des deux notions de "(≤k)-voisinages" et de "classes de (≤k)-voisinage" se démontre comme au §8.1 qui n'utilise pas plus que la (≤4)-hypomorphie.

Pour k=2, deux éléments de la même composante connexe sont (≤2)-voisins (il suffit de dualiser). L'identité des deux notions est alors évidente et toute composante connexe d'une relation binaire R en est un (≤2)-voisinage. On retrouve les propriétés analogues à celles des (≤-1)-voisinages: toute partition $\mathfrak{P}$ de R, en R-intervalles, plus fine que la partition en composantes connexes, est banalement une partition en (R,R')-classe de différence pour un R', (≤2)-hypomorphe à R, obtenu en conservant les flèches de R qui sont à cheval sur deux parties de la partition $\mathfrak{P}$ et en inversant les autres.

Pour k=3 la situation est plus complexe. Il semblerait que les classes de $(\leq 3,\omega,\omega^*,\Omega,\Omega^*)$-hypomorphie soient caractérisées par les interdits suivants: D_7, D_9 et variantes, ainsi que $\omega+1$, $1+\omega^*$, Ω, Ω^* et les 3-types, que nous appelerons **drapeaux**, dont deux arêtes au moins sont neutres; ces drapeaux seraient néanmoins **tolérés** s'ils font pas partie d'un D_{10}, D_{13} ou variante ou d'une consécutivité ou d'un cycle.

Dans [17] G. Lopez et C. Rauzy définissent des relations binaires $\mathbf{S}_n$ (avec un **S** *gras*) qui désignent, pour un *n* entier ≥0 donné, plusieurs relations finies dont les arêtes neutres de ne sont pas nécessairement de même nature, alors que dans le présent article S_3 (avec un S *maigre*) désigne *une unique* relation dont les arêtes neutres sont toutes vides et S'_3 la variante où elles sont toutes pleines. L'article [17] ne se préoccupant pas de finitude nous conviendrons que les $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$ et les $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)$ qui y sont définis sont par définition toujours *finis*!

Dans [17] G. Lopez et C. Rauzy ont découvert la structure des (≤4)-voisinages finis qui sont les lopeziens finis et les $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)$ sans diamants (ces deux familles n'étant d'ailleurs pas complètement disjointes):

THÉORÈME . Les membres (finis) sans diamants des $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ et les lopeziens finis constituent exactement les (≤4)-voisinages finis.

En [14] (Théorème 4.4) Pierre Ille démontre (en d'autres termes) l'énoncé suivant:
Lemme (Ille). Les (≤5)-voisinages finis qui ne sont pas des (≤6)-voisinages sont des tournois.

Ainsi D_{20} et D_{21} sont des (≤5)-voisinages (contrairement aux (≤6)-voisinages, D_{20} et D_{21} ne sont pas autoduaux ni (-1)-reconstructibles). Or ces deux relations sont les seuls tournois à 5 éléments à ne pas être des (-1)-voisinages. Les $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$ sont donc (5)-hypomorphes à leur dual d'où on tire que:

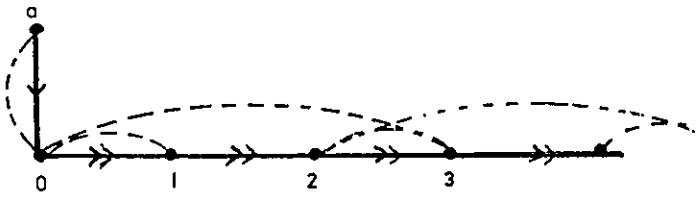
THÉORÈME. Les membres (finis) des $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)_{(h\in\mathbb{N})}$ sont exactement les ($\leq$5)-voisinages finis qui sont des tournois; les autres ($\leq$5)-voisinages finis sont déjà des ($\leq$6)-voisinages.

La dissymétrie dans les énoncés des deux derniers théorèmes est le reflet de la dissymétrie même des définitions de $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$ et $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)$, puisque les $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)$ incluent comme cas particulier quand n=0 les $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)=\mathcal{E}(\mathbf{S}_0)$.

§8.5.1.

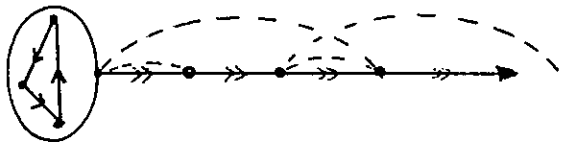
Le cas infini mérite qu'on se penche sur lui pour déterminer les ($\leq k,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*$)-voisinages éventuellement infinis (on a déjà vu qu'un seul des types Ω ou Ω^* est en principe nécessaire). C'est ce que nous allons maintenant faire. Je montrerai ainsi que *les ($\leq$5,$\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*$)-voisinages soit sont finis et sont les lopeziens finis ou les $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$, soit sont infinis et sont des chaînes de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$* <u>*et*</u> <u>*rien*</u> <u>*d'autre*</u> (rappelons l'hypothèse de réflexivité sans laquelle il faudrait prendre aussi les versions irréflexives de ω, ω^* et $\omega^*+\omega$). De même *les ($\leq$4,$\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*$)-voisinages soit sont finis et sont les lopeziens finis ou les $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)$ sans diamants, soit sont infinis et sont des chaînes de type ω, ω^** ou $\omega^*+\omega$.

Donnons d'abord un exemple de ($\leq$2,$\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*$)-voisinage infini qui n'est pas une chaîne. Soit R de base $\mathbb{N}\cup\{a\}$ avec a<0 mod R, toutes les autres arêtes liant a à $\mathbb{N}$ étant vides. Modulo R', $\mathbb{N}$ devient $\mathbb{N}'$ déjà défini au §7.8 et (a,0) s'inverse.

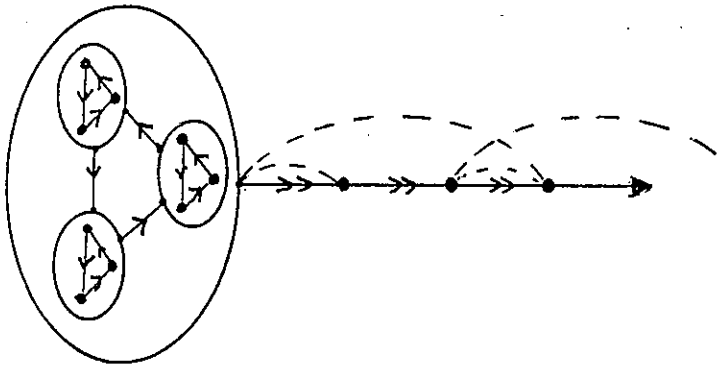


Les lignes en pointillé représentent le graphe de différence $S_{\mathbb{N},\mathbb{N}'}$.
Les doubles flèches $\twoheadrightarrow$ rappellent qu'on a affaire à des chaînes et sous-entendent la transitivité.

Donnons maintenant un exemple de $(\leq 3,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinage infini qui n'est pas une chaîne. R est obtenu à partir d'une relation de type $\mathbb{N}$ en dilatant l'élément 0 en un 3-cycle; modulo R', $\mathbb{N}$ se transforme en $\mathbb{N}'$ et le 3-cycle s'inverse.



Voici un autre exemple: on dilate encore chaque élément du dilaté de 0 du précédent exemple par des 3-cycles.



J'ignore si les $(\leq 2,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages infinis et les $(\leq 3,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages (finis ou non) possèdent une structure intéressante...

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que les lemmes de restriction *(xii)* et *(xii)bis* n'utilisent que la (≤ 4)-hypomorphie et qu'ils s'appliquent donc aux $(\leq 4,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages et aux $(\leq 5,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages. Ainsi toute partie *finie* d'un $(\leq 4,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinage non lopezien est encore un $(\leq 4,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinage. De même pour les $(\leq 5,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages non lopeziens. Quand nous connaîtrons les $(\leq 4,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages infinis et les $(\leq 5,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages infinis nous constaterons qu'on peut en dire autant de leurs parties *infinies*.

LEMME *I*. Soit R et R′ deux relations binaires infinies (≤ 5)-hypomorphes dont la base est formée d'une seule (R,R′)-classe de différence. Alors R et R′ sont des tournois ou des relations lopeziennes.

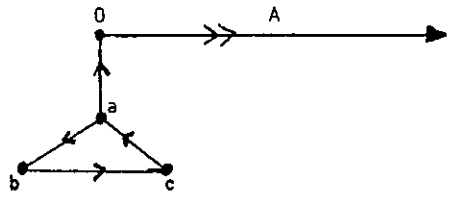
PREUVE. Raisonnons par l'absurde en supposant R et R′ non lopeziens. Le lemme de restriction étendu aux (≤ 5)-voisinages dit que R et R′ sont, sur chaque partie finie de cardinal >7, des (≤ 5)-voisinages. Utilisons le théorème précédent pour affirmer que ces (≤ 5)-voisinages sont soit des tournois, soit des relations lopeziennes puisqu'il n'existe pas de (≤ 6)-voisinage non lopezien de cardinal >7. Si chaque partie de cardinal fini >7 est un tournoi R en est un aussi et le lemme est démontré. Si certaines restrictions de cardinal fini >7 sont des consécutivités ou des cycles, leurs extensions ne peuvent être des tournois et sont donc aussi des consécutivités ou des cycles. Toutes les parties finies, puisqu'elles peuvent être incluses dans de telles extensions sont des consécutivités ou des cycles. Le lemme *(xiii)* permet alors de conclure. □

LEMME *II*. Soient T et T′ deux tournois $\{\leq 4,\omega,\omega^*\}$-hypomorphes de base infinie formée d'une seule (T,T′)-classe de différence. Alors ces deux tournois sont des chaînes de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$.

PREUVE. On supposera jusqu'en 3) que T n'est pas une chaîne. T contient par conséquent un 3-cycle (a,b,c). Extrayons de T une chaîne infinie A de type ω ou ω^*, par exemple ω, dont l'existence découle du théorème de Ramsey.

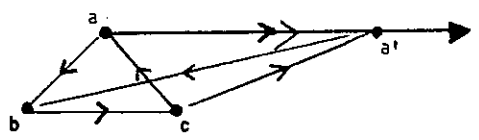
1) Montrons qu'on peut se ramener au cas où *a* est dans la chaîne A. Le lemme de restriction appliqué à une partie finie de $A\cup\{a,b,c\}$, contenant *a*, b et c dit encore que cette partie est un $\{\leq 4,\omega,\omega^*\}$-voisinage puisque $A\cup\{a,b,c\}$ ne peut être une consécutivité, cette partie est même une (T,T′)-classe de différence puisque T est supposée ne pas être une presque-chaîne. Donc une arête liant *a* à un élément disons 0 de A change, par exemple $T|(a,0)=(+,-) \neq T'|(a,0)$. Pour éviter un T-cycle sur {a,b,c} qui nous ramènerait à la situation désirée, il faut que $c<0$ mod T. On a alors

c>0 mod T'. Pour éviter de même un T-cycle sur {0,b,c} il faut que b<0 mod T et le contraire mod T'. L'ensemble {0,a,b,c} est alors un diamant – absurde. On se trouve donc ramené au cas souhaité: $a \in A$. Quitte à enlever ceux des éléments de A qui sont T-antérieurs à a, on peut même supposer que a est le T-premier élément de A.

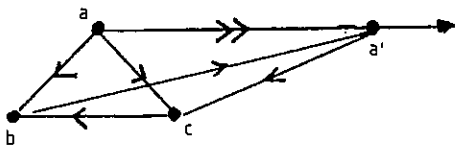


R

2) En notant A={1<2<3<4<5<··· mod T} on a donc a<1<2<3<··· mod T. T'|A devant être de type ω qui n'a pas de maximum, il existe un élément a' de A tel que (a,a') ne change pas. Il faut donc que c<a' mod T pour éviter un T-cycle sur (a,c,a') qui ne serait pas réalisable mod T'. De même pour éviter un T-diamant sur {a,b,c,a'} il faut que a'<b mod T; du coup (a',b,c) est un T-cycle qui doit s'inverser ce qui impose les inégalités: b<a' et a'<c mod T'. Mais il existe dans A une infinité de a' tels que (a,a') ne change pas, ils forment un ensemble A'. A chaque fois c T'-majorera a' et A'∪{c} ne pourra être de T'-type ω. Cet ensemble A'∪{c} n'est donc pas de T-type ω non plus, alors qu'on a montré qu'il l'est bien puisque c<a' mod T.



R



R'

3) Une fois acquis que T et T' sont des chaînes il suffit d'utiliser la théorie développée en [9] pour conclure que T et T' sont de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$. Rappelons l'argument. Raisonnons par l'absurde en supposant que T contient par exemple une chaîne X+{u} où X est de T-type ω. X et u devant être dans la même (T,T')-classe, une arête (x,v) doit changer pour un x dans X et un v > tout x de X mod T. X∪{v} est alors de type ω pour modulo une des relations T ou T' et de type ω+1 modulo l'autre. – absurde. □

THÉORÈME. Les $(\leq 5,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages infinis sont de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$.

PREUVE. Soit R et R′ deux relations binaires infinies $(\leq 5,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-hypomorphes dont la base commune ne forme qu'une seule (R,R′)-classe de différence. D'après le lemme *I*, R et R′ soit sont lopeziennes soit sont des tournois. Dans le premier cas la conclusion est évidente et a déjà été vue en [9]. Dans le second cas le lemme *II* termine la démonstration. □

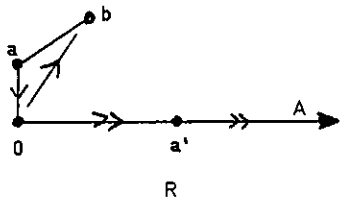
THÉORÈME. Les $(\leq 4,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-voisinages infinis sont de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$.

PREUVE. Soit R et R′ deux relations binaires infinies $(\leq 4,\Omega,\Omega^*,\omega,\omega^*)$-hypomorphes dont la base commune ne forme qu'une seule (R,R′)-classe de différence. D'après le lemme de restriction étendu aux (≤ 4)-voisinages, chaque partie finie de R, qu'on suppose non lopézien, est un $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)$. Si les relations R et R′ sont des tournois ces parties sont aussi (5)-hypomorphes puisque, sur les arêtes non incluses dans un intervalle propre (autrement dit sur les arêtes non versatiles), R′ est l'opposé de R (voir [17]). Le précédent théorème a alors résolu la question. Supposons donc l'existence d'une arête neutre (a,b). D'après Ramsey on peut extraire de la base soit un ensemble infini de sommets tous liés par des arêtes neutres soit un ensemble infini T de sommets tous liés par des arêtes orientées. La première éventualité conduit à un ensemble de sommets non connexe dont aucune partie finie ne peut être un $\mathcal{E}(\mathbf{S}_n)$ et se heurte par conséquent au lemme de restriction. La deuxième éventualité nous fait extraire un ensemble T de sommets qui est un tournoi. La (≤ 4)-hypomorphie fait de ce tournoi un tournoi sans diamant, dont toute partie finie est donc un $\mathcal{D}(\mathbf{T}_h)$ sur lequel R et R′ sont par conséquent (≤ 5)-hypomorphes. Cette deuxième éventualité accule donc les relations R|T et R′|T extraites à être elle-mêmes (≤ 5)-hypomorphes, ceci permet au théorème précédent d'affirmer qu'elles sont en fait de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$. On a donc montré qu'une partie, que nous nommerons A, de R, est de type ω ou ω^*, par exemple ω.

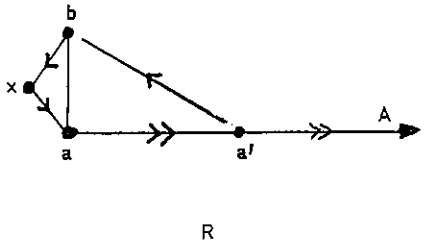
Montrons que nous pouvons nous ramener, comme dans le lemme *II*, au cas où *a* est dans A.

1) Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où l'arête (a,0) est orientée et changeante. Le lemme de restriction appliqué à une partie finie de A∪{a,b}, contenant *a* et b, prouve que cet ensemble est un (≤4)-voisinage et que donc une arête changeante lie *a* ou b (par exemple *a*) à un élément de A (par exemple 0).

2) Soit (a,b) une arête neutre et (a,0) une arête orientée changeante. Supposons par exemple que a<0 mod R. L'arête (0,b) ne peut être neutre sans quoi on serait déjà ramené à la situation désirée. L'ensemble {a,b,0} doit donc être une R-consécutivité. On a par suite 0<b mod R. La consécutivité {a,b,0} s'inverse dans R'. Il existe une infinité de a' de A tels que (0,a') ne change pas, ils forment un ensemble A'. On a *a*<a' mod R. Comme précédemment {a,a',b} est une consécutivité et par suite a'<b mod R. La (4)-hypomorphie sur {a,b,a',0} montre que (a',a) et (a',b) s'inversent. L'ensemble {a}∪A' est de R-type ω et de R'-type ω+1. — absurde.



3) On est donc ramené au cas où *a*∈A. Par exemple *a*=0. Prenons encore une arête (a,b) neutre. L'interdiction de D_9 nécessite qu'on ait y<b mod R pour tout y de A qui serait >a mod R. Les éléments *a* et b sont liés par une consécutivité changeante (a,x,b). En prenant dans A un a' tel que (a,a') ne change pas, on voit que la (4)-hypomorphie sur {a,b,a',x} est irréalisable. □



J'espère un jour conclure à la ($\leq$4,-1,ω,ω^*,Ω,Ω^*)-reconstructibilité des relations binaires même infinies. Mais si R et R' sont deux relations binaires ($\leq$4,-1,ω,ω^*,Ω,Ω^*)-hypomorphes la preuve de ([17]) ne s'adapte pas immédiatement pour prouver l'isomorphie sur chaque (R,R')-classe finie entre R et R' dés lors qu'une infinité de classes cohabitent. Les classes infinies étant elles de type ω, ω^* ou ω^*+ω, la {ω,ω^*}-hypomorphie impose sans problème l'isomorphie entre leur restriction mod R et mod R'.

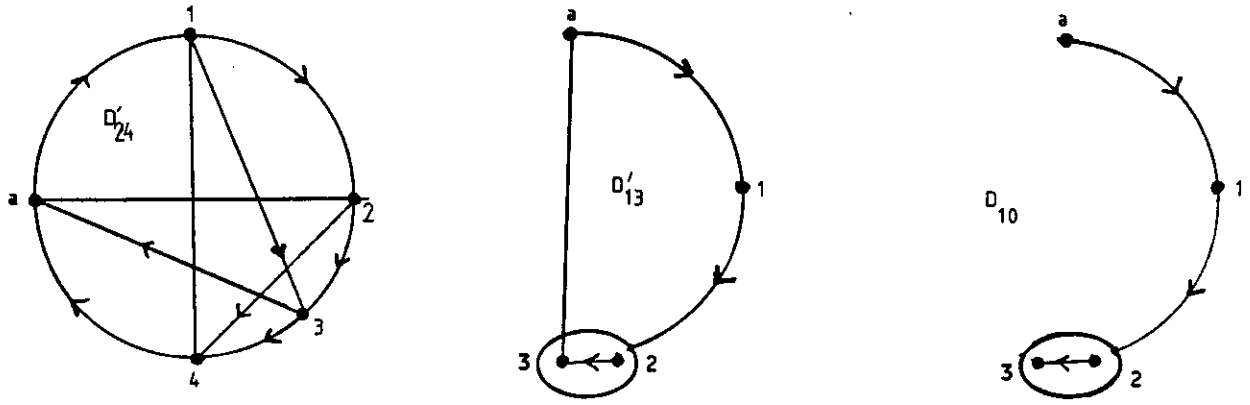
Manèges. Disons qu'une relation binaire R est un <u>manège</u> si elle se représente de la façon géométrique suivante. La base E est une partie de la circonférence d'un cercle du plan ; Soit x et y deux éléments de E, si le segment reliant x à y passe par le centre, R(x,y) sera neutre, sinon R(x,y) sera orienté de telle sorte que le centre soit situé à droite de l'arête (x,y) quand celle-ci est tournée en position verticale et dirigée vers le haut. Autrement dit, tirer sur n'importe quelle flèche fait tourner le manège dans le même sens rétrograde. On peut appeler manèges neutres les manèges dont chaque sommet est incident a une arête neutre, ce sont les S_n. Il va de soi que les manèges finis sont les $\mathcal{E}(S_n)$.

Donnons la définition équivalente suivante des « manèges » due à Luc Rigollet. Les manèges M sont par défnition construits ainsi : on dilate une chaîne C par, éventuellement, des arêtes neutres (au plus 1 arête neutre par sommet de la chaîne), on partitionne la base E du dilaté D obtenu, en F$\cup$G de sorte que chaque arête neutre soit cassée en deux par la partition, et on recolle à l'envers, c'est à dire qu'on pose : x<y mod M ssi (x<y mod D et x et y sont dans la même partie F ou G) ou (x>y mod D et x et y sont dans des parties différentes de la partition), les arêtes neutres sont inchangées mod M et mod D.

Cette définition s'étend à n'importe quel cardinal même non dénombrable. Elle est équivalente à celle des "prechains" dans :

« Youssef Boudabbous, Christian Delhommé : Prechains and self duality. Discrete Mathematics 2(10), (2012), pp. 1743-1765 ».

Il peut être intéressant de dessiner certaines classes d'hypomorphie sous la forme de manèges ou de manèges dont des sommets d'arêtes neutres ont été dilatés par des presque-intervalles.



§8.5.3 Morphologie des (≤k)-voisinages:

Parmi les (≤5)-voisinages finis ceux qui ne sont pas des (≤6)-voisinages sont caractérisés par le fait qu'ils abritent D_{20} ou ses variantes.

Parmi les (≤4)-voisinages finis ceux qui ne sont pas des (≤5)-voisinages sont caractérisés par le fait qu'ils abritent D_{22} ni D_{14} ou leurs variantes.

Parmi les (≤3)-voisinages finis ceux qui ne sont pas des (≤4)-voisinages sont caractérisés par le fait qu'ils abritent des diamants ou D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13} ou variantes.

Parmi les (≤2)-voisinages finis ceux qui ne sont pas des (≤3)-voisinages sont caractérisés par le fait qu'ils abritent D_7, D_9 ou variantes ou, D_{18} ou D_{19} sans abriter D_{12}, D_{13} ou variantes.

On retrouve comme "interdits" les grands motifs utilisés au lemme de multiplicité des classes du §6. On peut donc espérer, en adaptant la preuve des § 2 à 6, démontrer que:

Deux relations binaires finies (≤k)-hémimorphes mais non (≤k)-hypomorphes ni (≤k)-anti-hypomorphes contiennent un double motif de cardinal >k.

§8.6 . VOISINAGES DES MULTIRELATIONS.

Dans le cas des multirelations la théorie des voisinages semble, avec les mêmes définitions, se maintenir en se compliquant. Ainsi si M est la multirelation sur {a,b,c} définie par (R_1,R_2) avec $R_1(c,a)=R_2(a,b)=+$, partout ailleurs (-). Alors a et b sont voisins pour la deuxième composante de M (penser au dual de cette composante) mais pas pour M puisque la seule multirelation hypomorphe et isomorphe à M est M elle-même. Soit maintenant la multichaîne $C=(C_1,C_2)$, C_1 étant la chaîne $\mathbb{N}+\{a\}$ et C_2 la chaîne $a<1<2<\cdots<\cdots<0$, alors 1 et a sont voisins dans C_2 mais pas dans C_1 ni dans C; les voisinages de C sont ici $\mathbb{N}-\{0\}$, {0} et {a}. On peut raisonnablement espérer qu'à partir d'un certain seuil (aux environs de 4) les voisinages de M peuvent être reconstitués à partir des voisinages des composantes et, en dehors du cas des multichaînes, deux éléments voisins pour une des composantes sont sans doute voisins pour la multirelation; mais nous n'en savons pas plus pour l'instant.

Je donne néanmoins une conjecture dont l'énoncé, quoique labyrinthique, permet d'y voir plus clair. Pour les besoins de cette conjecture on introduit quelques définitions.

J'appelle *affaiblissement versatile* la multi-relation V de même base que M formée uniquement des arêtes versatiles de M c'est à dire vérifiant $V(x,y)=M(x,y)$ si (x,y) est versatile, $V(x,y)=-$ sinon. M est donc la disjonction d'un affaiblissement versatile et du complément (dans l'ensemble des arêtes) appelé *affaiblissement non versatile.*

CONJECTURE sur les voisinages de multirelations binaires. Si deux multirelations binaires M et M' sont unimorphes et de cardinal infini ou fini ≥ 4 alors une des composantes de M (disons R) est unimorphe à la

composante correspondante de M'. Si cette composante R est une presque-chaîne non chaîne, les autres composantes sont soit constantes sauf éventuellement sur l'arête joignant les deux presque-extrémaux où ces autres composantes peuvent être quelconques, soit identiques soit opposées; si cette composante R n'est pas une presque-chaîne non chaîne, les autres composantes sont sur l'affaiblissement non versatile soit constantes, soit identiques, soit opposées, et sont des chaînes sur la base de chaque chaîne versatile de R de la composante ou encore des constantes sur une ou plusieurs des chaînes versatiles dans le cas où ces autres composantes sont aussi constantes sur l'affaiblissement non versatile.

Les voisinages des multirelations binaires, la recherche des "multi-motifs" de reconstruction, la demi-reconstruction de ces multirelations semblent être des prolongements prometteurs du cas des relations binaires.

§9 . CAS DES RELATIONS m-AIRES:

J'ignore si les développements suivants présentent un intérêt.

Soit σ une permutation de $\{1,\cdots,m\}$. Deux relations m-aires R et R' de bases E et E' sont dites *σ-morphes* s'il existe une injection φ de E sur E' telle que pour tous $x_1 \ldots x_m$ de E on a $R'(\varphi(x_{\sigma(1)}),\ldots,\varphi(x_{\sigma(m)}))=R(x_1,\ldots,x_m)$.

Si σ est l'élément neutre du groupe Σ_2 des permutations de $\{1,2\}$, un σ-morphisme n'est autre qu'un isomorphisme; si σ est l'autre élément de Σ_2, un σ-morphisme n'est autre qu'un anti-isomorphisme.

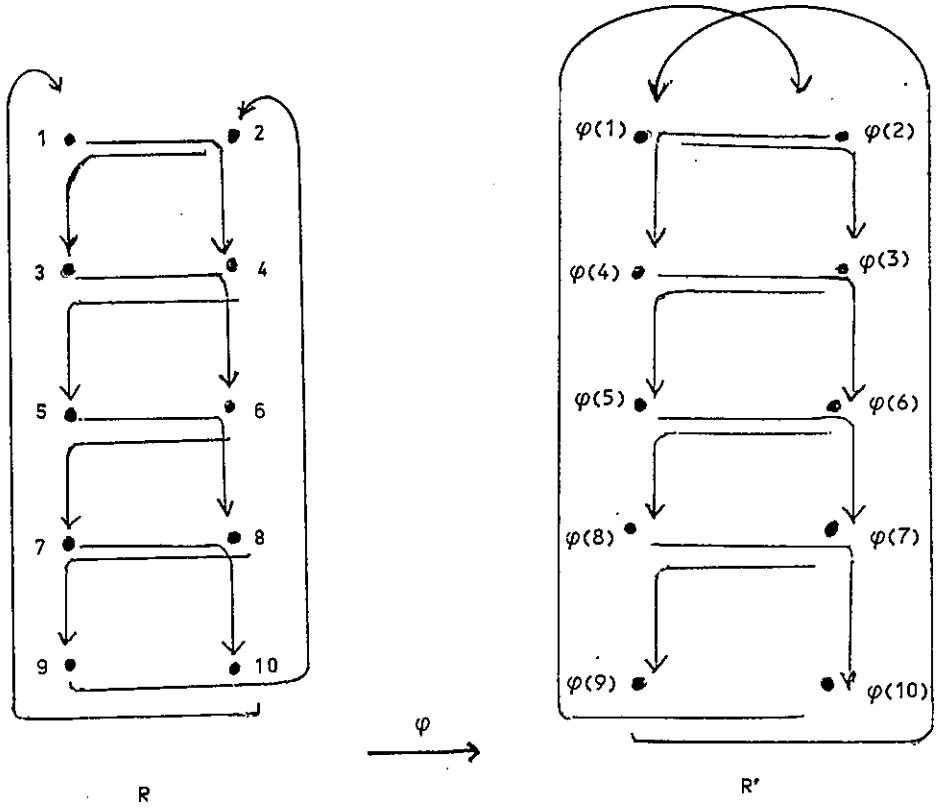
Soit Σ_m le groupe des permutations de $\{1,\cdots,m\}$. Une relation m-aires R est dite *demi-reconstructible* quand pour toutes relations m-aires R' de même base on a:

"Si pour toute partie $X \neq |R|$ de la base il existe un $\sigma \in \Sigma_m$ tel que $R|X$ et $R'|X$ sont σ-morphes, alors il existe un σ de Σ_m pour lequel R et R' sont σ-morphes."

Ainsi les relations binaires de cardinal >12 sont demi-reconstructibles avec cette définition.

On consultera avec profit les articles [20] et [21] de Maurice Pouzet pour ce qui est de l'extension aux relations non binaires des problèmes de reconstruction. Dans [21] Pouzet définit des "rubans" R et R' qui sont des relations ternaires rappelant par leur structure le cylindre et la bande de Möbius et qui constituent des exemples de relations ternaires non reconstructibles. Supposons que R et R' sont de cardinal 2(2k+1). Il n'y a pas d'isomorphisme de R sur R'; mais il y a une application φ de $|R|$ sur

$|R'|$ vérifiant $R(x,y,z)=R'(\varphi(y),\varphi(x),\varphi(z))$ ce qui ne manque pas de rappeler l'anti-isomorphie entre relations binaires. L'application φ est obtenue en permutant les deux éléments des barreaux de rang pair et en conservant les autres. Autrement dit les rubans de cardinal $2(2k+1)$ semblent demi-reconstructibles.



D'autres prolongements à la demi-reconstruction des relations binaires sont possibles. On peut faire intervenir des sous-groupes etc... En se restreignant aux relations binaires, on peut se donner un ensemble de familles de types et exiger que si $R|E$ est dans une des familles $R'|E$ y est aussi. Dans la cas de la demi-reconstruction ces familles sont les paires $\{\alpha,\alpha^*\}$.

§10 . ULAM-RECONSTRUCTIBILITÉ DES CHAÎNES AYANT UN POINT FIXE.

Dans les § 10 et 11 les ordres et les chaînes sont obligatoirement réflexifs.

On rappelle la conjecture suivante: les chaînes sont *Ulam-reconstructibles*, c'est à dire que si A et B sont deux chaînes de même base E vérifiant $A|E-\{x\}\approx B|E-\{x\}$ pour tout x de E, alors $A\approx B$.

PROPOSITION . Les chaînes ayant un premier élément *fixe* (par tout plongement de la chaîne dans elle-même) sont Ulam-reconstructibles.

PREUVE . Soit A une chaîne de premier élément *a* sur un ensemble E où une autre chaîne B est telle que pour tout x de E $A|E-\{x\}\approx B|E-\{x\}$. En particulier $B|E-\{a\}\approx A-\{a\}$. Soit b un autre élément de E. $A|E-\{b\}$ est isomorphe à $B|E-\{b\}$; $A|E-\{b\}$ ayant un premier élément (en l'occurrence *a*), $B|E-\{b\}$ doit en avoir un aussi. Premier cas cet élément est *a* : $A|E-\{a\}$ étant isomorphe à $B|E-\{a\}$ on a $A=\{a\}+(A-\{a\})\approx\{a\}+(B-\{a\})=B$. Deuxième cas ce premier élément n'est pas a. Appelons b_1 cet élément. Ce premier élément de $B-\{b\}$ est aussi un premier élément de $B-\{a\}$ à moins que b ne soit premier élément de $B-\{a\}$ mais b étant quelconque ($\neq a$) on peut choisir b en sorte que b_1 soit premier élément de $B-\{a\}$. $A-\{a\}$ a donc aussi un premier élément qu'on appellera a_1. On poursuit ce raisonnement de proche en proche: a et a_1 sont les deux premiers éléments de $A-\{b\}$ et donc $B-\{b\}$ possède aussi deux premiers éléments etc... De proche en proche on a $A=\{a\}+\{a_1\}+\cdots+A_1$, ce qui est incompatible avec le fait que le premier élément de A est fixe. □

Une relation est dite *décomposable* (il s'agit d'une définition personnelle) si elle possède au moins une restriction *stricte* (c'est à dire

dans laquelle la relation ne se plonge pas) qui est un intervalle au sens de Fraïssé [6] (tout automorphisme local de l'intervalle se prolonge par l'identité en dehors de l'intervalle en un automorphisme local) et qui n'est ni le vide ni un singleton. Les chaînes sont (avec cette définition) décomposables. Les relations binaires décomposables de cardinal fini assez grand (>4 ?) ou infini sont-elles Ulam-reconstructibles? Les diamants (qui sont de cardinal 4) sont décomposables mais non Ulam-reconstructibles puisque D_5 s'Ulam-reconstruit en D_6.

La proposition suivante est plus fine que la précédente mais elle utilise la Halin-reconstructibilité des chaînes ([9]): "si A et B sont deux chaînes de même base E vérifiant $A|E-\{x\}\approx B|E-\{x\}$ pour tout x de E alors A et B sont équimorphes (c'est à dire se plongent l'une dans l'autre)", et aussi un lemme de S. Ginsburg ([7]): "Si la chaîne $C+D+\{a\}+E$ est équimorphe à la chaîne $C+\{b\}+D+E$ et ne se plonge pas dans $C+D+E$ alors D est fini". Au §11 je proposerai en guise de conjecture une généralisation de ce lemme.

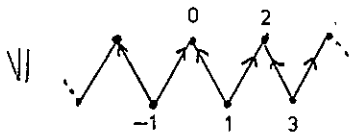
PROPOSITION . Toute chaîne possédant un point fixe est Ulam-reconstructible.
PREUVE. Soit A une telle chaîne et a un de ses points fixes. Soit B une chaîne de même base (-1)-hypomorphe à A (c'est à dire $B||A|-\{u\}\approx A||A|-\{u\}$ pour tout u de $|A|$). La chaîne $A-\{a\}$ est isomorphe à $B-\{a\}$ soit φ un isomorphisme de $A-\{a\}$ sur $B-\{a\}$. Raisonnons par l'absurde. Supposons par exemple quitte à renverser le sens de A et de B qu'il existe des $x<a$ (mod A) tel que $\varphi(x)>a$ (mod B). Soit C la chaîne des x tels que $\varphi(x)<a$ (mod B), D la chaîne des y strictement compris (mod A) entre a et tous les x de C, et E la chaîne des $z>a$ (mod A). On a alors $C+D+\{a\}+E=A$ et $B=\varphi(C)+\{a\}+\varphi(D)+\varphi(E)$. L'équimorphie de A et B exige, si a est fixe dans A, que D soit fini ([7]) et donc A et B sont isomorphes. □

§11 . QUELQUES CONTREXEMPLES À DES GÉNÉRALISATIONS AUX ORDRES DE PROPRIÉTÉS DES CHAÎNES.

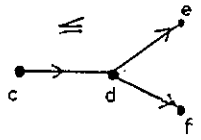
Je proposerai ici une généralisation du lemme de S. Ginsburg [7] qui m'a servi au §10 précédent.

• On sait que dans une chaîne A un élément *a* est **fixe** (c'est à dire par définition qu'il vérifie la condition " f(x) = x " pour tout plongement f de A dans A) dès qu'il est *essentiel* (c'est à dire par définition que A-{a} ne se plonge pas dans A).

Ce n'est plus vrai dans l'ordre suivant $\cdots -5<-4>-3<-2>-1<0>1<2>3<4>5\cdots$ où chaque élément est essentiel mais aucun n'est fixe ($x \mapsto x+2$ est un plongement):



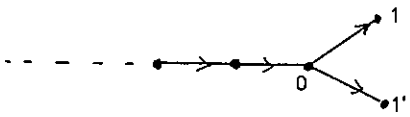
Autre contrexemple l'arbre suivant $c<d<e$, $c<d<f$ $e|f$, e et f sont essentiels mais pas fixes:



• On sait que dans une chaîne A si *a* et b sont deux éléments essentiels, *a* est essentiel dans A-{b} et b dans A-{*a*}.

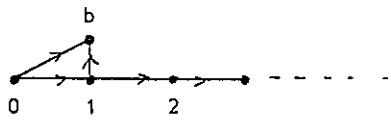
Ceci n'est plus vrai dans l'arbre A suivant $\cdots -3<-2<-1<0<1$ et,

$\cdots -3<-2<-1<0<1'$ avec $1|1'$: 1 et 1 sont essentiels dans A mais 1' n'est plus essentiel dans A-{1} ni 1 dans A-{1'}. Idem si A est la consécutivité sur $\mathbb{Z}$.

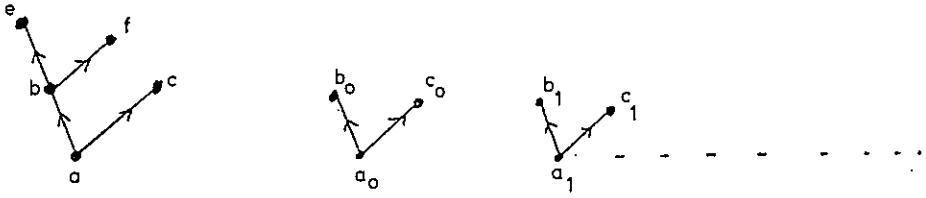


Il est vrai qu'ici 1 et 1' ne sont pas comparables. Apportons donc une amélioration de cet exemple où a et b seront comparables.

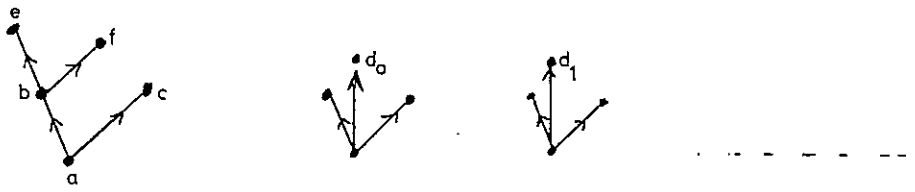
Soit A l'arbre $\mathbb{N}\cup\{b\}$ avec $b>0$, $b>1$ et b incomparables aux autres éléments. Les éléments 0 et b sont essentiels dans A, $a=0$ n'est pas essentiel dans A-{b} mais b l'est dans A-{0}:



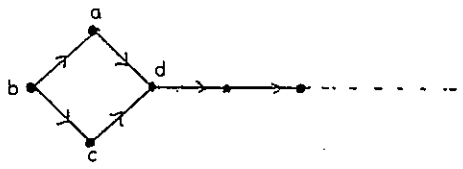
Soit A l'arbre suivant sur $\{a,b,c,e,f,a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots,b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots,c_0,c_1,\cdots,c_n,\cdots\}$ avec $a<b<f$, $a<b<e$, $a<c$, $a_n<b_n$, $a_n<c_n$ tous les autres éléments étant incomparables sauf les comparabilités imposées par la transitivité. Les éléments a et b sont alors essentiels dans A mais b n'est pas essentiel dans A-{a} tandis que a l'est dans A-{b}:



Rajoutons maintenant des $d_0,\cdots,d_n,\cdots$ avec $a_n<d_n$ les d_n étant incomparables au reste. Alors bien que a et b soient essentiels dans A, ni a n'est essentiel dans A-{b} ni b dans A-{a}.

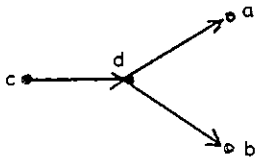


Voici un exemple plus simple mais pour un ordre A qui n'est pas un arbre: $b<a<d<1<2<3\cdots$ et $b<c<d<1<2<3\cdots$ avec $a|c$. Les éléments a et b sont essentiels alors que si a est essentiel A-{b}, b ne l'est pas dans A-{a}.



• On sait que dans une chaîne A où deux éléments essentiels a et b vérifient A-{a}≡A-{b} [le signe "≡" désigne l'équimorphie] l'ensemble des intermédiaires (larges) entre a et b est un intervalle fini totalement ordonné (i.e. a et b sont voisins, voir §4 de [9]).

Cela n'a plus de sens dans l'arbre $c<d<a$, $c<d<b$, $a|b$, où a et b vérifient la condition A-{a}≡B-{b} mais sont incomparables [pour le préordre du plongement entre relations].

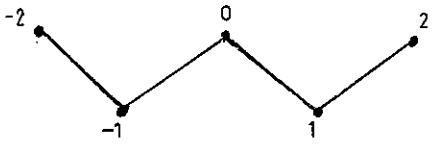


<u>Mais on peut se demander</u>:

Dans un arbre A où deux éléments essentiels et comparables a et b vérifient A-{a}≡A-{b} l'ensemble des intermédiaires (larges) entre a et b est-il un intervalle fini (totalement) ordonné?

Une réponse positive apporterait une généralisation au lemme de Ginsburg auquel j'ai fait allusion en début de paragraphe.

Cet énoncé n'est pas toujours vrai dans un ordre. Soit A l'ordre suivant: $\cdots -5<-4>-3<-2>-1<0>1<2>3<4>5\cdots$ l'ensemble $\{-1,0\}$ n'est pas un intervalle.



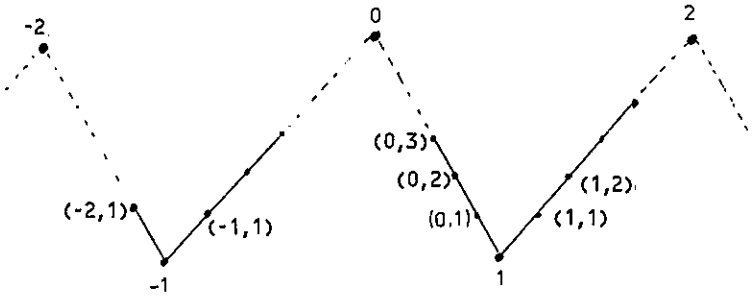
Soit A l'ordre suivant:

$\cdots\cdot(-3)<(-3,1)<(-3,2)<\cdots<(-3,n)<\cdots<(-2)>\cdots>(-2,n)>\cdots>(-2,2)>(-2,1)>$

$(-1)<(-1,1)<(-1,2)<(-1,3)<(-1,4)<\cdots<(-1,n)<\cdots<(0)>\cdots>(0,n)>\cdots(0,2)>$

$(0,1)>(1)<(1,1)<(1,2)<(1,3)<\cdots<(1,n)<\cdots<(2)>\cdots\cdot$

Les éléments intermédiaires entre a=-1 et b=0 ne forment pas un intervalle et ne sont même pas en nombre fini:



On voit facilement en compliquant le dernier exemple que cet ensemble d'intermédiaires peut ne pas être totalement ordonné.

BIBLIOGRAPHIE

1. J.A BONDY, A graph reconstructor's manual, Surveys in combinatorics, 1991, Proceedings of the 13th British Combinatorial Conference, p221-252.

2. J.A. BONDY et R.L. HEMMINGER, Graph reconstruction, a survey, J of graph theory V1 n°3 p227-268 (1977)

3. R. FRAÏSSÉ et G. LOPEZ, La reconstruction d'une relation dans l'hypothèse forte: isomorphie des restrictions à chaque partie stricte. Les Presses de l'Université de Montréal , n° 109 (1990).

4. R. FRAÏSSÉ, Abritement entre relations et spécialement entre chaînes, Symposia Mathematica, Instituto Nazionale di Alta Matematica. 5 (1970), p203-251.

5. R. FRAÏSSÉ, Theory of relations, North-Holland Publ. Comp, Amsterdam (1986).

6. R. FRAÏSSÉ, L'intervalle en théorie des relations *in* "Orders, descriptions and roles", M.Pouzet, D.Richard ed. North-Holland (1984) p313-342.

7. S. GINSBURG, Some remarks on order types and decompositions of sets, Trans.Amer.Math.Soc 74 (1953) p511-535.

8. C. GNANVO et P. ILLE, La reconstruction des tournois sans diamants. Comptes rendus t306 (1988) p577-580.

9. J. G. HAGENDORF, Restriction respectueuse et reconstruction des chaînes et des relations infinies, Prépublications de l'Université Paris-sud Bat 425; publié (pour les § 1 à 8) dans les Zeitschrift fur Math. Logic 38 (1992) p457-490.

10. J. G. HAGENDORF, La reconstruction des chaînes et des relations infinies, Note aux comptes rendus de l'académie des Sciences, Paris, t313, p53-58 1991.

11. J.G. HAGENDORF, Extensions respectueuses de chaînes, Zeitschrift fur Math. Logic 25 (1979) p423-444.

12. J.G. HAGENDORF, Extensions immédiates de chaînes, Zeitschrift fur Math. Logic 28 (1982) p15-44.

13. J.G. HAGENDORF, Sur la reconstruction des ordres totaux, Zeitschrift fur Math. Logic 34 (1988) p193-200.

14. P. ILLE, La reconstructibilité des relations binaires. Comptes rendus t306 (1988) p635-638.

15. G. LOPEZ, Thèse de doctorat d'état (1982), Marseille.

16. G. LOPEZ, Indéformabilité des relations et multirelations binaires, Zeitschrift Math. Logik 24, (1978) p303-317.

17. G. LOPEZ et C. RAUZY, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2,3,4 and (n-1), Zeitschrift Math. Logik 38, p27-37 et p157-168 (1992).

18. G. LOPEZ et C. RAUZY, La (n-4)-reconstructibilité des tournois de cardinalité >9, Comptes rendus 307 (1988) p639-642.

19. G. LOPEZ et C. RAUZY, Reconstructibilité des relations binaires par des familles de leurs restrictions, Comptes rendus 307 (1988) p697-699 et p739-741.

20. POUZET, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, Math. Zeitschrift, 150, (1976) p117-134.

21. M. POUZET, Relations non reconstructibles par leurs restrictions, J. of combinatorial theory B 26 (1979) p22-34.

22. J.G. ROSENSTEIN, Linear Orderings, Academic Press (1982).

23. B. ROTMAN, On the comparison of order types, Acta Math.Scient.Hung 19 (1968) p311-327.

24. R.R. STOCKMEYER, The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments, J. Graph. Theory 1 (1977) p19-25.

25. S. M. ULAM, A collection of mathematical problems, Intersciences Publishers, New York, 1960.