

# Méthode des éléments finis stochastiques étendus pour le calcul de structure à géométrie aléatoire

Alexandre Clément, Anthony Nouy, Franck Schoefs, Nicolas Moës

► **To cite this version:**

Alexandre Clément, Anthony Nouy, Franck Schoefs, Nicolas Moës. Méthode des éléments finis stochastiques étendus pour le calcul de structure à géométrie aléatoire. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495586

**HAL Id: hal-01495586**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01495586>**

Submitted on 25 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Méthode des éléments finis stochastiques étendus pour le calcul de structure à géométrie aléatoire

A. Clément, A. Nouy, F. Schoefs, N. Moës

*Institut de recherche en Génie civil et mécanique (GeM),  
Université de Nantes Atlantique, Ecole Centrale de Nantes, UMR CNRS 6183  
anthony.nouy@univ-nantes.fr*

---

*RÉSUMÉ. Les méthodes éléments finis stochastiques offrent un outil robuste pour la prise en compte dans le calcul de structure des aléas sur les propriétés matériau et les chargements. L'aléa portant sur la géométrie reste cependant un point mal maîtrisé dans le cadre de ces techniques. Afin de répondre à cette problématique, nous proposons une nouvelle méthode basée sur une extension de la méthode éléments finis étendus (X-FEM) au cadre stochastique. Cette méthode repose sur trois points : la description implicite de la géométrie par des level-sets aléatoires, l'utilisation d'une approximation de Galerkin au niveau stochastique et spatial et l'utilisation de la méthode de la partition de l'unité pour l'enrichissement de l'espace d'approximation.*

*ABSTRACT. In structural analysis, stochastic finite element methods offer a robust tool to deal with randomness on material properties or loadings. Unfortunately, there is still no available efficient strategy to deal with uncertainties on the geometry. Here, we bring an answer to this problem by proposing a new method based on an extension to the stochastic framework of the eXtended Finite Element Method (X-FEM). This method lies on three major points : the implicit description of geometry by the level-set technique, the use of Galerkin approximation at space and stochastic levels and the use of the partition of unity method for the enrichment of the finite element approximation space.*

*MOTS-CLÉS : Calcul stochastique, X-FEM, Géométrie aléatoire, Level set, Eléments Finis Stochastiques, X-SFEM*

*KEYWORDS: Stochastic calculus, X-FEM, Random Geometry, Level set, Stochastic Finite Element, X-SFEM*

---

## 1. Introduction

Un des challenges de ces dernières années a consisté à développer des méthodes de calcul robustes pour la prise en compte des incertitudes dans le calcul de structures. Les méthodes éléments finis stochastiques (Ghanem *et al.*, 1991, Deb *et al.*, 2001, Matthies *et al.*, 2005) offrent un outil performant pour l'intégration d'aléas sur les propriétés matériau ou les chargements. Cependant il n'existe toujours pas de stratégie efficace pour traiter le cas des aléas portant sur la géométrie. Une approche non-intrusive (type Monte-Carlo), couplée à une méthode éléments finis, peut bien sûr être appliquée. Elle nécessite cependant autant de remaillages que de réalisations de la géométrie, ce qui rend le coût de calcul prohibitif. Une technique alternative consiste à rendre aléatoire la position des noeuds du maillage (ou de manière équivalente les jacobiens des éléments). Des remaillages sont cependant encore nécessaires afin d'éviter des distorsions du maillage pour de fortes variabilités géométriques. De plus, les codes éléments finis sont mal adaptés à une mise en oeuvre directe de ces techniques. Ici, nous présentons une méthode éléments finis stochastiques étendus (X-SFEM) qui permet la prise en compte d'aléa sur la géométrie sans nécessiter de remaillage (Nouy *et al.*, 2007). Elle est basée sur la méthode X-FEM (Moës *et al.*, 1999, Sukumar *et al.*, 2001), étendue au cadre stochastique. Cette méthode repose sur trois points : une représentation implicite de la géométrie aléatoire par la technique des level-set (Sethian, 1999), l'utilisation d'une approximation de Galerkin au niveau spatial et stochastique, et son enrichissement éventuel par la partition de l'unité. Elle conduit par un calcul direct réalisé sur un maillage fixe à une solution d'une grande précision, explicite en fonction des variables de base décrivant l'aléa sur la géométrie.

## 2. Formulation du problème et représentation implicite de la géométrie

On choisit comme problème modèle un problème de diffusion stationnaire. On considère que la modélisation probabiliste a conduit à la définition d'un espace probabilisé ad-hoc  $(\Theta, \mathcal{B}, P)$  de dimension finie, où  $\Theta$  désigne l'espace des événements élémentaires,  $\mathcal{B}$  une  $\sigma$ -algèbre et  $P$  une mesure de probabilité. Le problème de diffusion est défini sur un domaine aléatoire  $\Omega : \theta \in \Theta \rightarrow \Omega(\theta) \subset \mathbb{R}^d$ . On introduit alors un domaine  $B \subset \mathbb{R}^d$  tels que  $\bigcup_{\theta \in \Theta} \Omega(\theta) \subset B$ . La formulation variationnelle peut s'écrire : trouver  $u(x, \theta) \in \mathcal{V}$  tel que  $\forall v \in \mathcal{V}$ ,

$$A(u, v) \equiv \int_{\Theta} a(u, v; \theta) dP(\theta) = \int_{\Theta} b(v; \theta) dP(\theta) \equiv L(v) \quad [1]$$

où  $a(\cdot, \cdot; \theta)$  et  $b(\cdot; \theta)$  sont respectivement une forme bilinéaire aléatoire et une forme linéaire aléatoire définies par

$$a(u, v; \theta) = \int_{\Theta} \int_B \kappa \nabla u \cdot \nabla v I_{\Omega(\theta)} dx dP(\theta) \quad [2]$$

$$b(v; \theta) = \int_{\Theta} \int_B f v I_{\Omega} dx dP(\theta) + \int_{\Theta} \int_B g v \delta_{\Gamma_2} dx dP(\theta) \quad [3]$$

où  $I_\Omega(x, \theta)$  est la fonction indicatrice du domaine aléatoire et  $\delta_{\Gamma_2}(x, \theta)$  la fonction dirac dont le support est une partie  $\Gamma_2(\theta)$  de la frontière  $\partial\Omega(\theta)$ .  $g$ ,  $\kappa$  et  $f$  sont des données du problème, éventuellement aléatoires. L'espace  $\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{W}; v|_{\Gamma_1 \times \Theta} = 0\}$  prend en compte des conditions de Dirichlet sur une partie de la frontière  $\Gamma_1$ , considérée comme déterministe. On pose comme espace de travail  $\mathcal{W} = H^1(B) \otimes \mathcal{S}$ , avec classiquement  $\mathcal{S} = L^2(\Theta, dP)$ .

REMARQUE. —  $A$  définit une pseudo norme  $\|\cdot\|_A$  sur  $\mathcal{V}$ . Notons  $\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{V}; \|u\|_A = 0\}$ , espace qui non réduit à zéro *a priori*. Il correspond cependant à des fonctions identiquement nulles sur le domaine physique  $\Omega(\theta)$ ,  $\forall \theta \in \Theta$ . On montre alors que le problème admet une solution unique sur l'espace quotient  $\mathcal{V}/\mathcal{N}$ , ce qui revient à dire que la partie physique de la solution est unique.

La géométrie aléatoire est représentée par la technique des level-sets (Sethian, 1999). Une surface aléatoire est ici représentée par l'iso-zéro d'une fonction level-set aléatoire. Afin de représenter la frontière  $\partial\Omega(\theta)$ , on introduit donc la level-set aléatoire  $\phi(x, \theta) : B \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour un événement  $\theta$  fixé,  $\phi(x, \theta)$  représentera classiquement la fonction distance signée à la frontière  $\partial\Omega(\theta)$  (par convention négative dans le domaine  $\Omega(\theta)$ ). L'utilisation des level-sets permet de réécrire les formes  $a$  et  $b$  des équations [2] et [3], en remarquant que  $I_\Omega(x, \theta) = \mathcal{H}(-\phi(x, \theta))$  et  $\delta_{\Gamma_2}(x, \theta) = \delta(\phi(x, \theta))$ , où  $\mathcal{H}$  représente la fonction Heaviside et  $\delta$  la fonction dirac.

REMARQUE. — Pour représenter une interface matérielle aléatoire, on pourra simplement prendre pour  $\kappa$  la définition suivante :  $\kappa = \kappa_1 \mathcal{H}(\phi^{(m)}) + \kappa_2 \mathcal{H}(-\phi^{(m)})$ , où  $\phi^{(m)}$  représente la level-set associée à l'interface aléatoire et où  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  représentent les paramètres matériau d'un côté et de l'autre de l'interface.

### 3. Approximation de Galerkin au niveau spatial et stochastique

On utilise au niveau spatial une approximation éléments finis classique définie sur un maillage du domaine  $B$ . Notons  $\{N_i(x)\}_{i \in I}$  les fonctions de forme associées à ce maillage. Les méthodes de Galerkin au niveau stochastique consistent à choisir un espace d'approximation  $\mathcal{S}_P = \{v = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} v_\alpha H_\alpha(\theta), v_\alpha \in \mathbb{R}, H_\alpha \in \mathcal{S}\}$  de dimension finie. La base d'approximation  $\{H_\alpha\}$  est classiquement constituée de polynômes (ou polynômes par morceaux) orthogonaux pour le produit scalaire naturel sur  $\mathcal{S}$  (Ghanem *et al.*, 1991, Soize *et al.*, 2004, Deb *et al.*, 2001). L'approximation s'écrit :

$$u(x, \theta) = \sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} N_i(x) H_\alpha(\theta) u_{i, \alpha}.$$

Notons  $\mathcal{V}_n$  l'espace d'approximation correspondant. L'approximation de Galerkin est alors définie en remplaçant  $\mathcal{V}$  par  $\mathcal{V}_n$  dans la formulation variationnelle [1]. Le maillage spatial n'étant pas conforme à la géométrie, les propriétés de convergence de l'approximation peuvent dans certains cas être détériorées. Comme dans le cadre de l'approche X-FEM classique (Moës *et al.*, 1999, Sukumar *et al.*, 2001), on pourra alors recourir à l'utilisation de la méthode de la partition de l'unité afin d'enrichir l'espace d'approximation par des fonctions judicieusement choisies. Si l'on cherche à rajou-

ter dans l'espace d'approximation la fonction aléatoire  $\varphi(x, \theta)$ , on enrichira l'espace d'approximation  $\mathcal{V}_n$  avec les fonctions de base  $N_i(x)H_\alpha(\theta)\varphi(x, \theta)$ . Notamment, dans le cas d'une interface aléatoire, on choisira une fonction d'enrichissement permettant de représenter une discontinuité de gradient à l'interface (Moës *et al.*, 2003).

#### 4. Construction du problème discrétisé

En notant  $u = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \mathbf{N}(x)\mathbf{u}_\alpha H_\alpha(\theta)$ , l'approximation de Galerkin est définie par le système d'équations suivant :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} E(\mathbf{A}H_\alpha H_\beta)\mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{b}H_\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{I}_P \quad [4]$$

où  $E$  désigne l'espérance mathématique et où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  sont respectivement une matrice aléatoire et un vecteur aléatoire définis par

$$\mathbf{A}(\theta) = \int_B \kappa \nabla \mathbf{N}^T \nabla \mathbf{N} \mathcal{H}(-\phi) dx, \quad \mathbf{b}(\theta) = \int_B \mathbf{N}^T (f \mathcal{H}(-\phi) + g \delta(\phi)) dx$$

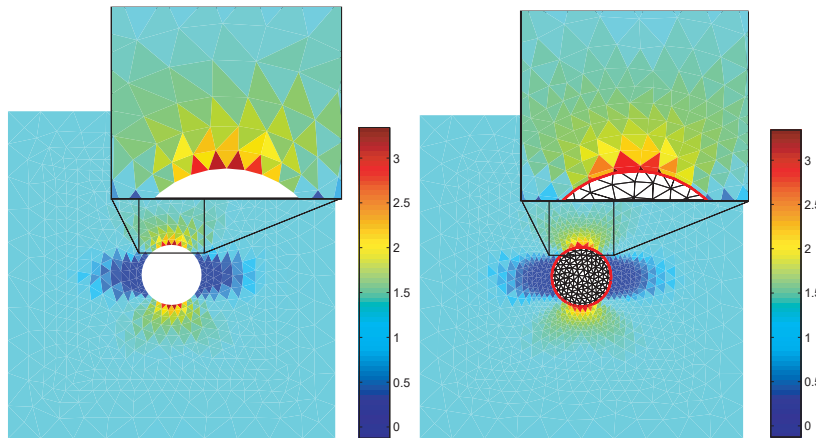
Le calcul des termes  $E(\mathbf{A}H_\alpha H_\beta)$  et  $E(\mathbf{b}H_\alpha)$  nécessite le calcul d'une intégrale sur  $\Theta$  avec la mesure  $dP$ . Il est à noter que les composantes de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  ne sont pas des fonctions régulières au niveau stochastique. Par exemple, dans le cas où seule la géométrie est aléatoire, on montre aisément que les contributions d'un élément fini  $B_e \subset B$ , notées  $\mathbf{A}_e(\theta)$  et  $\mathbf{b}_e(\theta)$ , sont nulles sur  $\Theta_{out}^e = \{\theta \in \Theta; \forall x \in B_e, \phi(x, \theta) > 0\}$ , est constante sur  $\Theta_{in}^e = \{\theta \in \Theta; \forall x \in B_e, \phi(x, \theta) < 0\}$  et qu'elles évoluent sur le reste du domaine stochastique  $\Theta_{cut}^e = \{\theta \in \Theta; \exists x \in B_e, \phi(x, \theta) = 0\}$ , qui correspond aux événements où la frontière coupe l'élément  $B_e$ . En pratique, afin de bien intégrer le problème discrétisé, on réalise un maillage de l'espace stochastique permettant de représenter approximativement ces différents domaines stochastiques. On utilise pour cela une technique de type octree. On utilise alors sur chaque élément stochastique une méthode de quadrature classique, qui nous ramène donc à l'évaluation des matrices élémentaires  $\mathbf{A}_e(\theta_k)$  et  $\mathbf{b}_e(\theta_k)$  pour des réalisations  $\theta_k$  particulières, calculs classiques dans le cadre de la méthode X-FEM déterministe (Sukumar *et al.*, 2001). Le maillage stochastique dépend bien sûr de l'élément. Sa génération et le calcul des matrices élémentaires peuvent être parallélisés. On notera qu'une quadrature de faible ordre est généralement suffisante pour intégrer correctement le problème discrétisé.

#### 5. Exemple : plaque trouée en traction

On considère une plaque de longueur et largeur 3 percée en son centre d'un trou circulaire de rayon<sup>1</sup>  $R(\theta) = U(0.25, 0.35)$ . La plaque est soumise à une sollicitation de traction simple. On choisit un module d'Young  $E = 1$  et un coefficient de Poisson

1.  $U(\alpha, \beta)$  désigne une variable uniforme sur  $[\alpha, \beta]$ .

$\nu = 0$ . Pour résoudre un tel problème, on peut classiquement utiliser une technique non-intrusive. Pour chaque événement, correspondant à une réalisation de la géométrie, un calcul éléments finis doit être mené sur un nouveau maillage conforme à la géométrie. Avec la méthode X-SFEM, on construit un seul et unique maillage du domaine  $B = [0, 3] \times [0, 3]$ . Ce maillage est obtenu en maillant une plaque possédant un trou de rayon  $R = 0.3$  et en maillant également l'intérieur du trou. Cela permet notamment de contrôler la finesse du maillage dans la zone d'intérêt et de mieux comparer notre méthode avec une approche FEM classique. Au niveau stochastique, on utilise une approximation éléments finis, constituée de polynômes de degré  $p = 2$  par morceaux. Le maillage stochastique de  $\Theta$  utilisé pour l'approximation et l'intégration est obtenu par une procédure automatique. Les figures 1 comparent les solutions obtenues par X-SFEM et une approche FEM pour 1 réalisation de la géométrie. Pour X-SFEM, on affiche la réalisation correspondante de l'iso-zéro de la level-set aléatoire. Le champ de contrainte n'est affiché que dans la partie physique du domaine maillé. Les figures 2 et 3 montrent respectivement la surface de réponse et la densité de probabilité de l'élongation centrale  $\Delta u$ . La surface de réponse est comparée avec des calculs FEM avec remaillages. On remarque que la méthode conduit à des résultats d'une grande précision sur toute la plage de variation de  $R$ . On notera que le problème [4] étant résolu, on obtient une solution explicite en fonction de la variable aléatoire  $R(\theta)$ . Les résultats montrés ici ne sont donc qu'un simple post-traitement rapide de la solution. La méthode X-SFEM permet de gagner un facteur 200 en temps de calcul, en comparaison à une approche Monte-Carlo/FEM avec 1000 tirages.

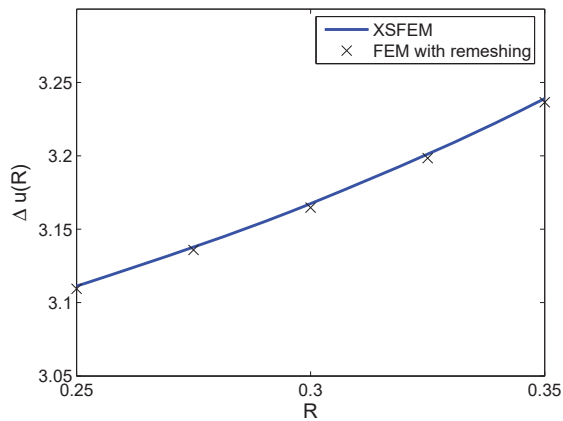


**Figure 1.** Comparaison FEM / X-SFEM : contraintes  $\sigma_{xx}$  pour  $R = 0.275$

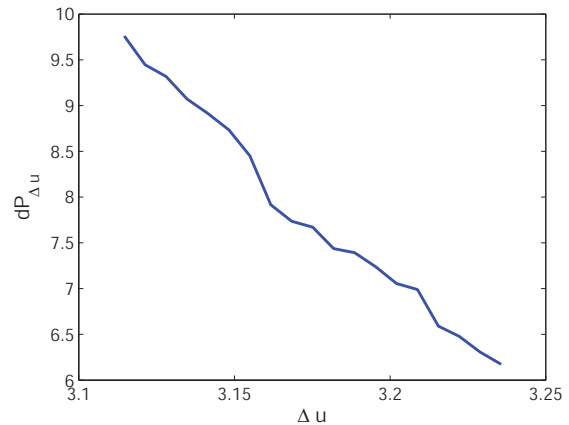
## 6. Conclusion

Nous avons proposé une méthode de calcul de structure pour des domaines à géométrie aléatoire. Cette méthode conduit à une solution d'une grande précision et à des temps de calcul très inférieurs à ceux des méthodes classiques. De plus, l'utilisation des level-sets permet une description aisée de la géométrie aléatoire. Les travaux futurs concerneront l'utilisation de la méthode de partition de l'unité, qui permettra





**Figure 2.** Comparaison FEM/X-SFEM : surface de réponse  $\Delta u(R)$



**Figure 3.** Densité de probabilité de  $\Delta u$  comme post-traitement de X-SFEM

une prise en compte efficace des problèmes à géométrie "interne" aléatoire (fissures, interfaces matérielles).

## Remerciements

Ces travaux sont soutenus par l'Agence National de la Recherche (ANR) dans le cadre du programme "Jeunes chercheurs" (projet "X-SFEM").

## 7. Bibliographie

- Deb M., Babuška I., Oden J. T., « Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques », *CMAME*, vol. 190, p. 6359-6372, 2001.
- Ghanem R., Spanos P., *Stochastic finite elements : a spectral approach*, Springer, Berlin, 1991.
- Matthies H. G., Keese A., « Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations », *CMAME*, vol. 194, n° 12-16, p. 1295-1331, 2005.
- Moës N., Cloirec M., Cartraud P., Remacle J., « A computational approach to handle complex microstructure geometries », *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, vol. 192, p. 3163-3177, 2003.
- Moës N., Dolbow J., Belytschko T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, p. 131-150, 1999.
- Nouy A., Schoefs F., Moës N., « X-SFEM : a computational technique based on X-FEM to deal with random shapes », *To appear in European Journal of Computational Mechanics*, 2007.
- Sethian J., *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- Soize C., Ghanem R., « Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 26, n° 2, p. 395-410, 2004.
- Sukumar N., Chopp D., Moës N., Belytschko T., « Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method », *CMAME*, vol. 190, p. 6183-6200, 2001.