

---

# Approche à deux échelles pour la prise en compte de défauts surfaciques dans l'analyse à rupture des structures

**Delphine BRANCHERIE\***, **Marc DAMBRINE\*\***, **Grégory VIAL\*\*\***, **Pierre VILLON\***

*\*Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne  
BP 20529 60205 Compiègne Cedex  
{delphine.brancherie,pierre.villon}@utc.fr*

*\*\*LMAC, Université de Technologie de Compiègne  
BP 20529 60205 Compiègne Cedex*

*\*\*\*IRMAR Université de Rennes 1 et ENS Cachan Bretagne 35170 Bruz*

---

*RÉSUMÉ. L'objectif de ce travail est de prendre en compte l'influence de la présence de défauts surfaciques sur le comportement jusqu'à rupture des structures et ce sans description fine de la géométrie des perturbations. L'approche proposée s'appuie principalement sur deux outils : une analyse asymptotique fine des équations de Navier et l'utilisation des modèles à discontinuité forte. Une stratégie de couplage des deux approches permettant l'analyse du comportement de la structure jusqu'à rupture est également présentée.*

*ABSTRACT. This work aims at taking into account the influence of boundary defects on the behavior till rupture of structures without any fine geometrical description of the domain. This is achieved by appealing to two approaches : an asymptotic analysis of Navier equations and strong discontinuity models. We present in this work a strategy to couple the two approaches in order to provide the analysis till rupture of the structure behavior.*

*MOTS-CLÉS : analyse asymptotique, perturbations de frontière, modèles à discontinuité forte, rupture*

*KEYWORDS: asymptotic analysis, boundary perturbations, strong discontinuity models, failure*

---

## 1. Introduction

Le travail présenté ici a pour objectif de prendre en compte l'effet de la présence d'un défaut surfacique sur le comportement jusqu'à rupture. Plus précisément, il s'agit d'évaluer la charge limite ultime d'une structure en prenant en compte simultanément l'influence de perturbations géométriques de la frontière et le développement de zones de localisation, et ce, sans description fine de la géométrie du domaine.

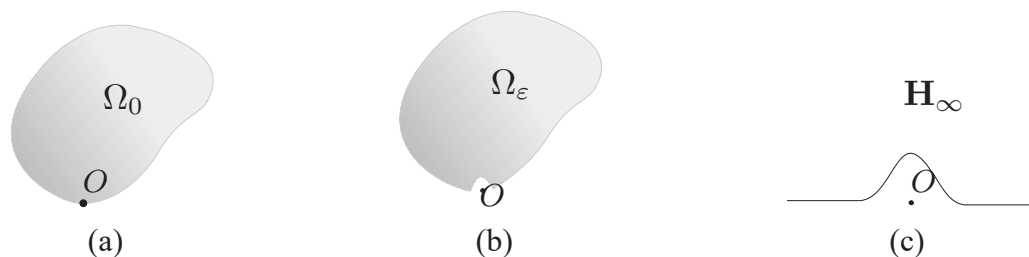
L'approche proposée s'appuie sur deux outils. D'une part, l'analyse asymptotique permet d'évaluer l'influence de la taille de micro-défauts de surface sur la solution du problème (Dambrine *et al.*, 2005). D'autre part, les modèles à discontinuité forte (Brancherie *et al.*, 2004, Dominguez *et al.*, 2005) assurent la description du comportement jusqu'à rupture par la prise en compte objective de zones de localisation.

Après avoir présenté les *points clés* de chacune des deux approches précédentes, nous présentons une technique de couplage de ces deux méthodes permettant de décrire le comportement de la structure jusqu'à rupture en s'affranchissant de toute description fine de la géométrie du domaine et des bandes de localisation.

## 2. Influence de défauts surfaciques : analyse asymptotique

Cette partie présente les points clés de l'analyse asymptotique qui permet de définir l'influence d'une perturbation géométrique de surface sur la solution du problème. Notons que les développements présentés ne sont valables que dans le régime élastique du comportement du matériau.

Nous considérons ici un domaine  $\Omega_\varepsilon$  percé d'une perturbation centrée en  $O$  et de taille  $\varepsilon$  (voir Figure 1). Nous noterons dans la suite  $\Omega_0$  le domaine non perturbé et, par simplicité, nous supposerons  $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_0$  (l'analyse asymptotique est présentée dans le cas général dans (Dambrine *et al.*, 2005)).



**Figure 1.** Domaines : initial  $\Omega_0$  (a), perturbé  $\Omega_\varepsilon$  (b) et adimensionné  $\mathbf{H}_\infty$  (c)

Le problème considéré fait apparaître naturellement deux échelles : la première correspond à l'échelle de la structure ici  $\Omega_0$  alors que la deuxième correspond à l'échelle de la perturbation. La solution est alors calculée comme la superposition de la solution sur le domaine non perturbé  $\Omega_0$  et d'une correction évaluée à l'échelle de la perturbation. Pour ce faire, un domaine semi-infini, obtenu par l'utilisation d'une variable adimensionnée, est introduit au voisinage de la perturbation.

Le problème à résoudre sur le domaine perturbé  $\Omega_\varepsilon$  s'écrit :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u}_\varepsilon - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f} \text{ sur } \Omega_\varepsilon \\ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}^d \text{ sur } \Gamma_d \text{ (frontière de Dirichlet du domaine)} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_t \text{ (frontière de Neumann du domaine)} \end{cases} \quad [1]$$

On suppose, par ailleurs, que  $\mathbf{g}$  s'annule près de la perturbation.

Il a été montré (Dambrine *et al.*, 2005) que la solution sur  $\Omega_\varepsilon$  est approchée au premier ordre par la superposition de la solution sur le domaine non perturbé  $\Omega_0$  et d'une correction :

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon [ -\sigma_{xx}(\mathbf{u}_0(O)) \mathbf{v}_1(\mathbf{x}/\varepsilon) - \sigma_{xy}(\mathbf{u}_0(O)) \mathbf{v}_2(\mathbf{x}/\varepsilon) ] \quad [2]$$

où les correcteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont solutions du problème homogène sur le domaine semi-infini  $\mathbf{H}_\infty$  obtenu par l'introduction de la variable adimensionnée  $\mathbf{x}/\varepsilon$ . En pratique, ces correcteurs sont calculés sur un domaine borné de rayon  $R$  suffisamment grand. Notons que la solution sur le domaine non perturbé comme la correction sont calculées sur des domaines indépendants de la taille du défaut  $\varepsilon$ .

### 3. Description des zones de localisation : modèle à discontinuité forte

L'objectif des modèles à discontinuité forte est de traiter de façon objective le développement de bandes de localisation. Ces dernières sont prises en compte par l'introduction de surfaces de discontinuité du champ de déplacement. La description fine des bandes de localisation n'est ainsi pas recherchée, seuls leurs effets sur la réponse globale de la structure sont pris en compte à l'échelle de la structure. Ceci est permis par l'introduction sur la surface de discontinuité d'une loi traction/saut de déplacement rendant compte, à l'échelle de la structure, des phénomènes dissipatifs ayant lieu à l'échelle des bandes de localisation.

Le point clé des modèles à discontinuité forte est ainsi de considérer un champ de déplacement discontinu. En notant  $\Gamma_s$  la surface de discontinuité, le champ de déplacement et le champ de déformation associé s'écrivent :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}\mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \nabla^s \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + (\bar{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \mathbf{n}) \delta_{\Gamma_s} \quad [3]$$

Deux lois de comportement sont alors construites. L'une, écrite dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, permet de relier la déformation  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \bar{\mathbf{u}}$  et la contrainte régnant dans le matériau hors discontinuité, l'autre, écrite quant à elle dans le cadre de la thermodynamique des interfaces, permet de relier le saut de déplacement  $\bar{\bar{\mathbf{u}}}$  à la traction sur la discontinuité notée  $\mathbf{t}_{\Gamma_s}$ . Les deux modèles utilisés dans ce travail sont un modèle élastique pour le matériau hors discontinuité et un modèle d'endommagement surfacique pour la surface de discontinuité. Une présentation détaillée du modèle utilisé est donnée dans (Brancherie *et al.*, 2004).

L'implémentation numérique d'un tel modèle s'appuie, quant à elle, sur la méthode des modes incompatibles (Ibrahimbegović *et al.*, 1991). Une fonction de forme élémentaire présentant une discontinuité de déplacement et nulle sur tous les noeuds de l'élément est introduite. La solution est alors obtenue par la résolution d'un système de deux équations. La première équation correspond à la forme faible de l'équation d'équilibre global alors que la deuxième équation correspond à la forme faible de l'équation de continuité des contraintes le long de la surface de discontinuité  $\Gamma_s$ . Il est à noter que, en raison de l'enrichissement choisi, cette équation est une équation d'équilibre local résolue au niveau élémentaire. Une opération de condensation statique au niveau élémentaire conduit alors à la résolution d'une équation d'équilibre global où la matrice de raideur est modifiée par l'introduction du comportement de la discontinuité.

#### 4. Couplage des deux approches : influence de défauts surfaciques sur le comportement jusqu'à rupture

L'objectif de ce travail est de décrire le comportement jusqu'à rupture de structures présentant des défauts de surface sans description fine de la géométrie des perturbations. La stratégie mise en place ici va donc coupler les deux approches présentées précédemment au travers de deux phases. La première consiste à calculer la solution sur le domaine perturbé à partir des correcteurs calculés sur le domaine adimensionné semi-infini soit directement par superposition soit en implémentant un élément fini enrichi, en utilisant la PUM (Melenk *et al.*, 1996). La deuxième phase consiste à transférer la solution avec perturbation vers le modèle à discontinuité forte de façon à rendre compte de l'apparition et du développement de bandes de localisation conduisant à la rupture.

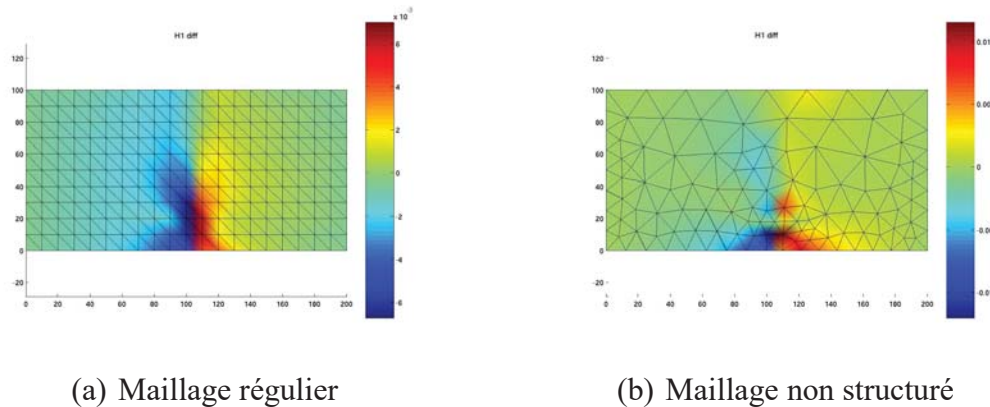
##### 4.1. Transfert de champs

Nous considérons ici un domaine ne présentant qu'une seule perturbation. La prise en compte du défaut de surface pour l'initiation de la fissuration par le modèle à discontinuité forte se fait en transférant le champ obtenu dans la première phase sur le maillage grossier. Ce dernier a servi pour le calcul de la solution non perturbée  $\mathbf{u}_0$  et servira pour la suite du calcul jusqu'à rupture. Le transfert est opéré en imposant au champ reconstruit de produire la même énergie de déformation que le champ enrichi et d'être le plus près possible, d'un point de vue énergétique, de la solution corrigée. Ainsi, le champ de déplacement reconstruit, qui servira de valeur initiale à la reprise du calcul par le modèle à discontinuité forte, est obtenu comme la solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon) d\omega \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_{\Gamma_d} = \mathbf{u}^d \\ \mathcal{E}^{\text{def}}(\mathbf{u}) = \mathcal{E}^{\text{def}}(\mathbf{u}_\varepsilon) \end{cases} \quad [4]$$

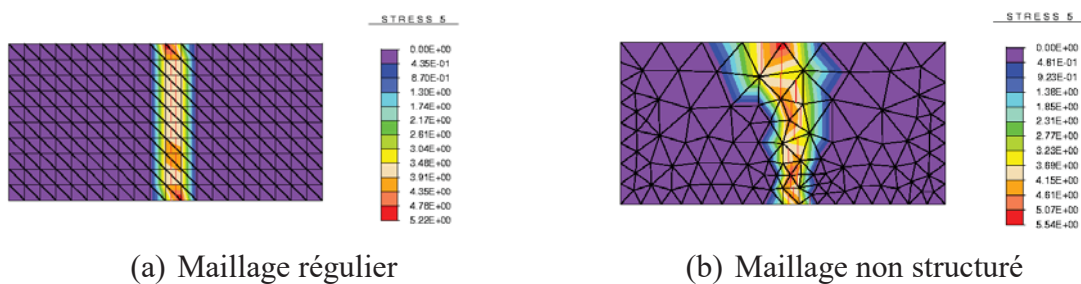
## 4.2. Quelques résultats

Nous considérons ici un essai de traction simple sur un barreau élastique de dimension  $200 \times 100 \text{ mm}^2$ . Une perturbation semi-circulaire centrée au point  $(x_0 = 105 \text{ mm}, y_0 = 0 \text{ mm})$  et de rayon  $1 \text{ mm}$  est introduite. Nous présentons à la Figure 2 la différence entre le champ reconstruit sur le maillage grossier après transfert et le champ obtenu sur le domaine non perturbé et ce pour deux maillages différents. Comme attendu, on constate un fort gradient autour de la perturbation générant une concentration de contraintes.



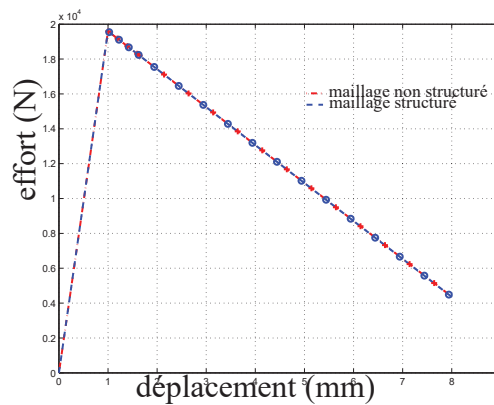
**Figure 2.** Différence entre le champ reconstruit  $u$  et le champ non perturbé  $u_0$

La Figure 3 représente le saut de déplacement dans la direction de traction ainsi que l'orientation des lignes de discontinuité introduites pour les deux maillages précédents en fin de calcul. On constate dans les deux cas que les bandes de localisation s'initient,



**Figure 3.** Lignes de discontinuité et saut de déplacement

comme attendu, au niveau des défauts de surface introduits. Enfin, la Figure 4 donne l'effort global mesuré en fonction du déplacement imposé pour les deux maillages. Les deux transferts, sur deux maillages différents, conduisent à des résultats tout à fait semblables en termes de réponse globale de la structure. Le comportement prédit jusqu'à rupture est donc le même quelque soit la discrétisation choisie.



**Figure 4.** Courbe effort/déplacement imposé pour les deux discrétisations considérées

## 5. Conclusion

L'approche présentée ici permet de prendre en compte l'influence de la présence de défauts de surface sur la réponse jusqu'à rupture et ce en s'affranchissant d'une discrétisation fine de la géométrie exacte du domaine. La présentation se limite à la prise en compte d'une seule perturbation. La prise en compte de plusieurs perturbations de frontière est rendue possible par le développement d'un élément enrichi grâce à la méthode de partition de l'unité (Melenk *et al.*, 1996) par les profils de correction de la solution non perturbée.

## 6. Bibliographie

- Brancherie D., Dambrine M., Vial G., Villon P., « Ultimate load computation : effect of surfacic defects and adaptive techniques », *WCCM VII*, Los Angeles, USA, July, 2006.
- Brancherie D., Ibrahimbegovic A., « Modélisation “macro” de phénomènes dissipatifs localisés à l'échelle “micro” : formulation et implantation numérique », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 13, n° 5-6-7, p. 461-473, 2004.
- Dambrine M., Vial G., « Influence of a boundary perforation on the Dirichlet energy », *Control and Cybernetics*, vol. 34, n° 1, p. 117-136, 2005.
- Dominguez N., Brancherie D., Davenne L., Ibrahimbegovic A., « Prediction of crack pattern distribution in reinforced concrete by coupling a strong discontinuity model of concrete cracking and a bond-slip of reinforcement model », *Engineering Computations*, vol. 22, n° 5-6, p. 558-581, 2005.
- Ibrahimbegović A., Wilson E., « A modified method of incompatible modes », *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 7, p. 187-194, 1991.
- Melenk J., Babuška I., « The partition of unity finite element method : Basic theory and applications », *CMAME*, vol. 136, p. 289-314, 1996.